

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于概率盒演化的时变系统不确定性量化方法

张保强, 陈梅玲, 孙东阳, 锁斌

引用本文:

张保强, 陈梅玲, 孙东阳, 等. 基于概率盒演化的时变系统不确定性量化方法[J]. *控制与决策*, 2020, 35(10): 2459–2465.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0283>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 基于多模型假设检验的认知无线电频谱感知方法

Cognitive radio spectrum sensing approach based on multiple-model hypothesis testing

*控制与决策*. 2020, 35(8): 1909–1915 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1669>

### 概率盒框架下多响应模型确认度量方法

Model validation metrics with multiple correlated responses under the frame of probability box

*控制与决策*. 2019, 34(12): 2642–2648 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.0309>

### 基于Delta算子的时变时延网络系统鲁棒 $H^\infty$ 滤波

Robust  $H^\infty$  filtering for networked control systems with time-varying delay via delta operator

*控制与决策*. 2017, 32(3): 487–492 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2016.0147>

### 基于自适应重复学习的不确定多涡卷混沌系统同步控制

Adaptive repetitive learning-based synchronization control of uncertain multi-scroll chaotic systems

*控制与决策*. 2016, 31(8): 1387–1393 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2015.1037>

### 基于NDO的ROV变深自适应终端滑模控制器设计

Design of adaptive terminal sliding mode controller based on nonlinear disturbance observer for ROV depth changing

*控制与决策*. 2016(2): 373–377 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2014.1792>

# 基于概率盒演化的时变系统不确定性量化方法

张保强<sup>1†</sup>, 陈梅玲<sup>1</sup>, 孙东阳<sup>2</sup>, 锁斌<sup>3</sup>

(1. 厦门大学 航空航天学院, 福建 厦门 361102; 2. 重庆大学 航空航天学院, 重庆 400044;  
3. 中国工程物理研究院 电子工程研究所, 四川 绵阳 621900)

**摘要:** 针对时变系统的不确定性量化和传递问题, 提出一种概率盒演化方法. 根据系统的时变规律, 获取系统响应的累积分布函数随时间变化的规律. 将认知不确定性参数和随机不确定性参数分离在外层和内层, 用蒙特卡洛法量化外层的认知不确定性参数, 用基于随机配点的非嵌入式混沌多项式法量化内层的随机不确定性参数, 通过求取不同时刻系统响应的累积分布函数的上下边界创建时变概率盒. 最后, 通过一延时电路性能退化算例验证所提出方法的有效性. 研究表明, 时变概率盒不仅可以表征系统特定时刻的混合不确定性, 而且反映了输出响应的时变规律和输出不确定性随时间变化的趋势.

**关键词:** 混合不确定性; 累积分布函数; 时变概率盒; 混沌多项式展开

中图分类号: TP114.3 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0283

引用格式: 张保强, 陈梅玲, 孙东阳, 等. 基于概率盒演化的时变系统不确定性量化方法 [J]. 控制与决策, 2020, 35(10): 2459-2465.

## Uncertainty quantification for time-variant system based on probability box evolution

ZHANG Bao-qiang<sup>1†</sup>, CHEN Mei-ling<sup>1</sup>, SUN Dong-yang<sup>2</sup>, SUO Bin<sup>3</sup>

(1. College of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361102, China; 2. College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 3. Institute of Electronic, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China)

**Abstract:** A probability evolution method is proposed to quantify time-variant systems with mixed uncertainty based on a probability box. The cumulative distribution function (CDF) evolution is obtained from time-variant system response. The double-loop sampling method is used to separate for the epistemic uncertainties from the sampling of the aleatory uncertainties. The outer loop is for sampling of the epistemic uncertainties by Monte Carlo, and the inner loop is for sampling the aleatory uncertainties by a point-collocation non-intrusive polynomial chaos method. A time-variant probability box for system response can be obtained by the CDF boundary calculating at different time. The proposed method is verified through a delay performance degradation circuit. The studies demonstrate that the time-variant probability box not only quantifies the mixed uncertainty at each time, but also reflects the system response and uncertainty changing with time.

**Keywords:** mixed uncertainty; CDF; time-variant probability box; polynomial chaos expansion

## 0 引言

从不确定属性角度看, 系统输入不确定性一般可分为随机不确定性和认知不确定性<sup>[1]</sup>. 实际工程系统中经常同时存在这两种不确定性. 目前, 处理这类混合不确定性的方法主要有概率盒 (probability box, P-box) 方法、二阶概率理论 (second order probability, SOP) 和 Dempster-Shafer 理论 (Dempster Shafer theory,

DST)<sup>[2]</sup>, 其中, 概率盒是通过求取累积分布函数 (cumulative distribution function, CDF) 的上下边界来量化混合不确定性, 近年来备受关注<sup>[3-6]</sup>. 目前, 这 3 种混合不确定性量化方法主要用于分析特定时刻的系统响应<sup>[7]</sup>. 然而, 由于材料退化、环境腐蚀氧化、运动磨损、动态载荷等因素的影响, 工程系统的性能参数将会发生变化, 这是一个动态的时变过程. 准确合

收稿日期: 2019-03-12; 修回日期: 2019-07-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51505398); 国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金项目 (U1530122).

责任编辑: 刘民.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: bqzhang@xmu.eud.cn.

理地量化这些不确定性因素及其演化过程对系统的影响,对于实现更符合实际工程的系统设计具有重大意义。

对时变系统进行不确定性分析,国内外学者主要集中于时变不确定性结构的时变可靠性研究<sup>[8-12]</sup>。然而,鲜有文献提及时变系统的混合不确定性量化与传递问题。

时变系统的不确定性参数具有动态特性,导致其概率信息也随时间发生变化。Mitani等<sup>[13]</sup>研究了在偏压温度应力下,具有超薄栅极氧化层的P型金属氧化物半导体场效应晶体管和N型金属氧化物半导体场效应晶体管的阈值电压的CDF的时变规律,为含这类金属氧化物半导体场效应晶体管的电路可靠性分析奠定了基础。Li等<sup>[14]</sup>发展了一类概率密度演化理论,用于求解任意时刻随机结构响应的概率密度曲线。Zhai等<sup>[15]</sup>针对性能退化的电子电路提出了基于系统响应的概率演化特性的容差设计方法,以提高电路鲁棒性。陈健云等<sup>[16]</sup>针对大坝抗震性能退化问题,基于概率演化分析,获得了坝体服役期间丰富的概率演化信息和动力可靠度时变规律,为大坝抗震安全评估提供了新思路。薛斌等<sup>[17]</sup>基于概率密度演化方法,由铅芯橡胶支座参数的变异性得到支座水平等效刚度的概率密度曲线,以此分析输入参数的变异性对输出性能指标的影响。Chen<sup>[18]</sup>研究了混凝土裂缝的演变规律,为评价混凝土裂缝增长及其结构强度劣化情况提供了依据。

本文基于系统响应的CDF演化规律,结合概率盒理论,提出一种时变概率盒方法以量化时变系统的混合不确定性。利用双层嵌套蒙特卡洛(Monte Carlo simulation, MCS)和混沌多项式展开(polynomial chaos expansion, PCE)法高效求取不同时刻系统响应的CDF上下边界,创建时变概率盒。相比于文献[7]中的特定时刻的概率盒,本文提出的时变概率盒给出了系统响应在时域上的变化情况,同时也给出了不同时刻输出不确定性的变化趋势,为实现更精细化、更经济的系统设计和更安全的可靠性设计奠定了基础。最后,以一延时电路长期工作过程中的性能退化问题为应用算例,验证了所提出时变概率盒方法的有效性。

## 1 理论和方法

### 1.1 混沌多项式展开

PCE<sup>[19]</sup>是利用正交多项式的混沌之和建立输出变量与输入变量之间的函数关系,可以快速求取输出变量的概率信息。

考虑一个模型 $Y = M(\beta)$ ,其中 $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$ 是已知概率分布的输入变量。 $Y$ 在基函数空间的正交展开为

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varphi(\beta_i). \quad (1)$$

其中: $\varphi(\beta_i)$ 是根据随机变量 $\beta$ 的概率分布类型选定的正交多项式基函数<sup>[20]</sup>, $\alpha_i$ 是多项式系数。

引入截断误差,用有限项拟合式(1)。于是, $Y$ 关于 $n$ 维随机变量 $\beta$ 的 $d$ 阶截断混沌多项式展开为

$$\hat{Y} = \sum_{i=0}^p \alpha_i \varphi(\beta_i), \quad (2)$$

$$p = \frac{(n+d)!}{n!d!}, \quad (3)$$

其中 $p$ 为截断系数,用来统计 $\hat{Y}$ 的PCE项数。

利用随机配点法<sup>[21]</sup>求解非嵌入式混沌多项式展开(non-intrusive polynomial chaos expansion, NIPCE)的系数,则式(2)可转化为一个线性方程组

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(\beta_1) & \varphi_2(\beta_1) & \dots & \varphi_p(\beta_1) \\ \varphi_1(\beta_2) & \varphi_2(\beta_2) & \dots & \varphi_p(\beta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(\beta_p) & \varphi_2(\beta_p) & \dots & \varphi_p(\beta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(\beta_1) \\ Y(\beta_2) \\ \vdots \\ Y(\beta_p) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中式(4)的右侧是选定随机点代入原始模型的计算结果。对式(4)进行线性计算,即可求得多项式系数。

为了评价PCE模型精度,引入误差 $\text{err}^{[22]}$ ,定义如下:

$$\text{err}[Y] = \frac{E[(Y - Y_{\text{NIPCE}})^2]}{\text{Var}[Y]}. \quad (5)$$

其中: $Y$ 是原始模型的输出响应, $Y_{\text{NIPCE}}$ 是PCE模型的输出响应。

$\text{err}[Y]$ 可由 $N$ 个样本估计得到,即

$$\hat{\text{err}}[Y] = \frac{\sum_{i=1}^N [(Y_i - Y_{\text{NIPCE}_i})^2]}{\sum_{i=1}^N [(Y_i - \mu_Y)^2]}. \quad (6)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, N$ , $Y_i$ 是原始模型的第 $i$ 个输出响应, $Y_{\text{NIPCE}_i}$ 是PCE模型的第 $i$ 个输出响应, $\mu_Y$ 是 $N$ 个原始模型输出响应的均值。

### 1.2 概率盒

对于随机变量 $X$ ,当其估计值不是精确的点估计值时, $X$ 的累积概率函数 $F(x)$ 不能用一条曲线表示(其中, $F(x) = P(X < x)$ , $x \in R$ ),定义其上界和下界<sup>[23]</sup>为

$$\bar{F}(x) = 1 - \underline{P}(X > x), x \in R;$$

$$\underline{F}(x) = \underline{P}(X < x), x \in R. \quad (7)$$

即  $\underline{F}(x) \leq F(x) \leq \bar{F}(x)$ , 记作  $[\underline{F}, \bar{F}]$ .  $\underline{F}(x)$  与  $\bar{F}(x)$  之间就定义了一个概率盒, 它不但可以描述未知参数的分布, 而且能够描述未知类型的分布.

基于概率盒的不确定性传播旨在将输入不确定性传递至输出响应, 并用概率盒表征输出响应的不确定性. 用传统双层抽样法(如双层循环抽样、参数优化抽样、P-box 卷积抽样<sup>[24]</sup>)求取概率盒, 虽然操作简单、应用灵活, 但是, 需要大量采样和重复计算,

计算效率低下, 不适用于复杂的工程问题.

### 1.3 基于双层 MCS/NIPCE 的时变概率盒

为改善传统双层抽样法效率低下的问题, 本文首先利用双层嵌套 MCS 和 NIPCE(双层 MCS/NIPCE) 法高效创建单个概率盒; 然后, 基于系统响应的 CDF 演化规律, 改进双层 MCS/NIPCE, 高效创建时变概率盒.

为减少复杂结构时变不确定性分析时庞大的计算量, 这里用离散的典型时刻的单一概率盒组成时变概率盒.

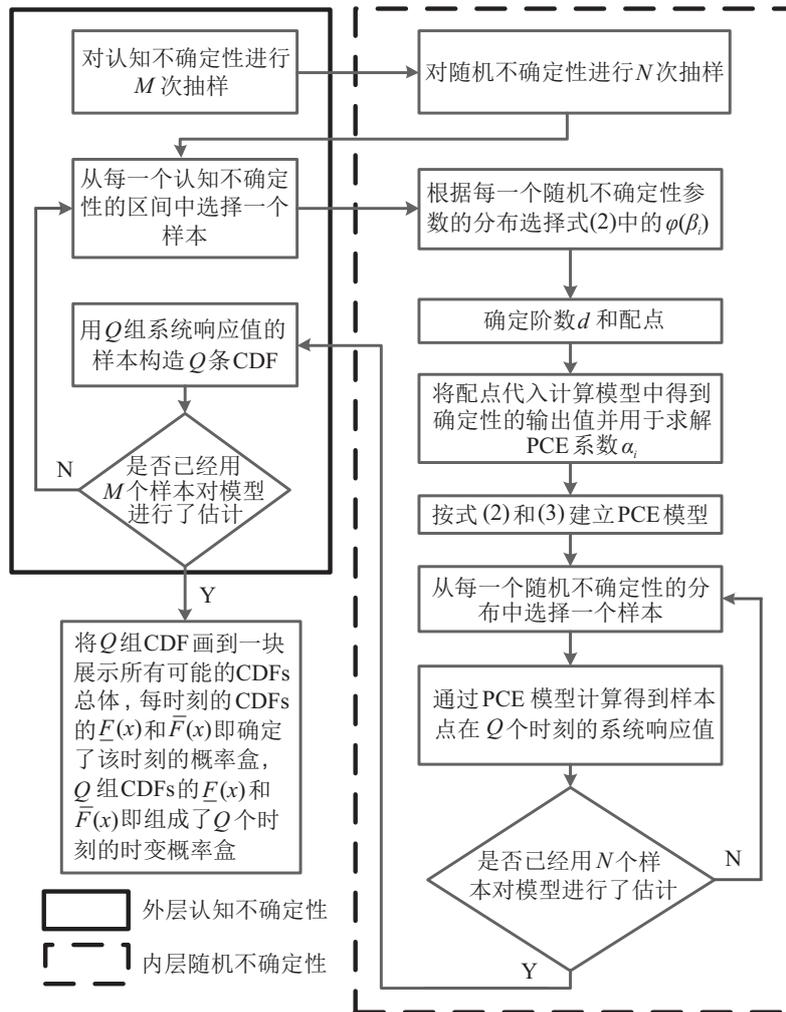


图 1 基于改进的双层 MCS/NIPCE 的时变概率盒创建流程

基于改进的双层 MCS/NIPCE 法构建时变概率盒的操作流程如图 1 所示, 具体步骤如下.

step 1: 对认知不确定性参数进行  $M$  次抽样, 若采用拉丁超立方抽样(Latin hypercube sampling, LHS), 则  $M$  的最小值可以参考文献[25]  $M = m^3 + 2$  进行估算, 其中  $m$  是认知不确定性参数的数量.

step 2: 对随机不确定性参数进行  $N$  次抽样, 为能精确描述系统响应的分布,  $N$  一般要求较大.

step 3: 从每一个认知不确定性参数的区间选择一个样本.

step 4: 在给定认知不确定性样本的条件下, 根据随机不确定性参数的分布类型选择合适的正交多项式基底  $\varphi(\beta_i)$ .

step 5: 采用与高阶作精度对比的方法, 选择合适的阶数  $d$  和配点数.

step 6: 将配点代入计算模型中得到系统输出值,

并根据随机配点法求解PCE系数 $\alpha_i$ .

step 7: 先将阶数  $d$  和随机变量维数  $n$  代入式 (3) 计算  $p$ , 再将  $p$ 、step 4 选定的  $\varphi(\beta_i)$  和 step 6 求解的  $\alpha_i$  分别代入式 (2) 建立 PCE 模型.

step 8: 从每一个随机不确定性参数的分布中选择一个样本.

step 9: 通过 PCE 模型计算得到样本点在  $Q$  个时刻的系统响应值.

step 10: 判断随机不确定性参数的  $N$  个样本是否已经评估完. 如果否, 则返回 step 8; 如果是, 则继续 step 11.

step 11: 用  $Q$  组系统响应量的样本 (每组有  $N$  个样本) 分别构造  $Q$  条 CDF 曲线, 得到系统响应的 CDF 在  $Q$  个时刻的演化规律.

step 12: 判断认知不确定性参数的  $M$  个样本是否已经评估完. 如果否, 则返回 step 3; 如果是, 则继续 step 13;

step 13: 将  $Q$  组 CDF (每组有  $M$  条 CDF) 画在同一张图上, 某组 CDF 的下边界  $\underline{F}(x)$  与上边界  $\overline{F}(x)$  之间即确定了某特定时刻的概率盒,  $Q$  组 CDF 的上下边界即组成了  $Q$  个时刻的时变概率盒.

## 2 时变混合不确定性量化算例

由于材料差异、制造和装配误差等影响, 导致电子元器件参数存在不确定性, 且在长期工作过程中, 电子元器件发生退化, 各不确定参数随时间发生演化, 影响电路的整体性能. 这里以一延时电路性能退化问题为例, 说明时变概率盒的应用.

基于 Synopsys 公司的 Saber 软件建立某延时电路的仿真模型, 如图 2 所示. 该电路的主要功能是在输入 12 V、5 V 直流电压和 YSQDctr 控制信号的情况

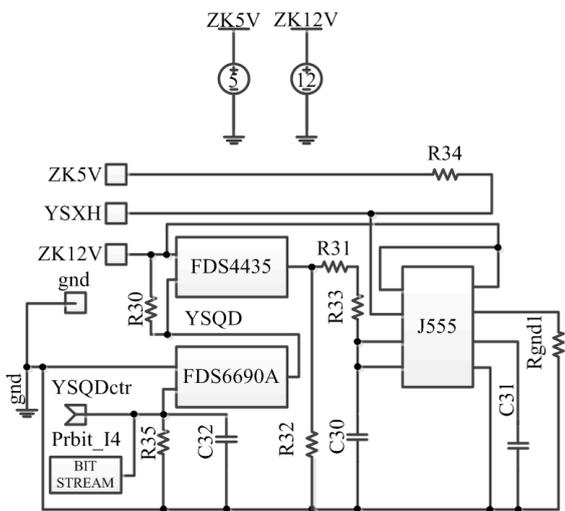


图 2 延时电路的仿真模型

下输出 YSXH 延时信号, YSXH 延时信号相对于 YSQDctr 控制信号产生 0.5 s 的延时. 对此, 研究电子元器件参数的混合不确定性演化过程对延时时间的影响.

首先, 确定延时电路的关键退化元器件参数. 基于木桶原理, 将问题转化为考察关键退化元器件的不确定性参数对延时时间的影响, 以提高分析效率. 综合灵敏度分析和性能退化分析结果, 确定关键退化元器件参数.

对图 2 的延时电路仿真模型进行灵敏度分析, 表 1 给出了延时电路的电子元器件参数的灵敏度值排序情况.

表 1 延时电路的电子元器件参数的灵敏度值排序

元器件参数	灵敏度值
C30 电容	1
R31 阻值	0.967
R33 阻值	0.0329
FDS4435 阻值	0.006 16
⋮	⋮

由于缺乏延时电路的相关元器件性能退化的数据, 假设其各元器件的主要参数按线性退化, 用下式所示的退化函数来表征退化规律:

$$x_t = x_0(1 + at). \quad (8)$$

其中:  $x_0$  是初始时刻参数值,  $x_t$  是  $t$  时刻参数值,  $a$  是退化率,  $t$  是退化时刻, 并假设  $x_0$  和  $a$  相互独立.

假设电阻 R31 和 R33 的退化率服从正态分布, 退化率均值为 4 ppm/h, 3 倍标准差为 1 ppm; 其他元器件的退化率服从正态分布, 退化率均值为 2 ppm/h, 3 倍标准差为 0.4 ppm.

定义关键退化值为灵敏度值与退化率均值的乘积, 以关键退化值排序情况作为关键退化元器件参数选择的依据. 表 2 给出了延时电路的电子元器件参数的关键退化值排序情况 (表 2 中,  $1 \mu = 10^{-6}$ ), 据此选定 C30 的电容值、R31 和 R33 的阻值为延时电路的关键退化元器件参数.

表 2 延时电路关键退化值排序情况

元器件参数	灵敏度值	退化率/ $\mu$	关键退化值/ $\mu$
R31 阻值	0.967	4	3.6
C30 电容	1	2	2
R33 阻值	0.0329	4	0.131 6
FDS4435 阻值	0.006 16	2	0.012 32
⋮	⋮	⋮	⋮

在延时电路的关键退化元器件参数中,假设R31属于认知不确定性参数,C30和R33属于随机不确定性参数,且各不确定性参数之间相互独立.表3给出了R31、C30和R33的不确定性取值情况.

表 3 延时电路关键退化值排序情况

认知不确定性参数				
元器件参数	下限	上限	参数变化范围	分布
R31阻值	1.96e+4	2.04e+4	[1.96e+4, 2.04e+4]	区间
随机不确定性参数				
元器件参数	均值	容差	参数变化范围	分布
C30电容	2.20e-5	0.01	(2.2e-5±2.20e-7)	正态
R33阻值	680	0.01	(680±6.80)	正态

其次,建立延时电路的PCE模型,用于双层MCS/NIPCE的内层来量化随机不确定性参数.以退化至 $100 \times 10^3$  h的延时电路为例,阐述基于随机配点法建立PCE模型的过程,具体步骤如下.

step 1: 根据不确定参数的概率分布类型选择PCE基底 $\varphi(\beta_i)$ ,延时电路的随机不确定性参数C30、R33互相独立且服从正态分布,此处选取Hermite多项式作为基底.采用与高阶作精度对比的方法,确定PCE的阶数为2阶.

step 2: 基于拉丁超立方抽样抽取12个配点样本,根据式(4)进行线性计算,求取PCE系数 $\alpha_j$ .

step 3: 计算PCE模型的精度.根据上述信息建立PCE模型,求得err为 $1.97e-10$ ,精度满足使用要求.以MCS为比较对象,PCE与MCS量化随机不确定性参数C30、R33的对比结果见图3,显然,两种方法的量化结果基本吻合.

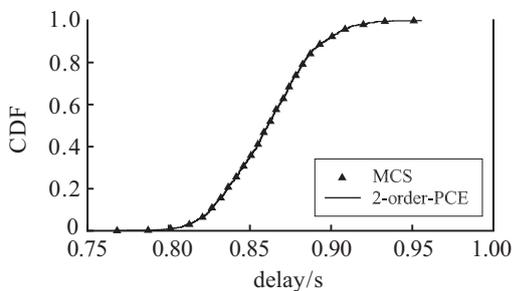


图 3 MCS和PCE量化随机不确定性参数的对比结果

再次,结合关键退化元器件参数的退化函数建立不同时刻的PCE模型.对模型抽取 $N$ 个样本,求解模型在不同时刻系统响应值(每个时刻均有 $N$ 个系统响应值),再基于不同时刻的系统响应量,获取系统响应在不同时刻的CDF演化情况.图4给出了基于

延时电路的PCE模型在0h、 $20 \times 10^3$  h、 $40 \times 10^3$  h、 $60 \times 10^3$  h、 $80 \times 10^3$  h、 $100 \times 10^3$  h这6个退化时刻的CDF演化结果,其中每条CDF曲线的抽样次数都为1000.由图4可知,随着工作时间增加,延时时间不断增长,延时电路性能发生退化.

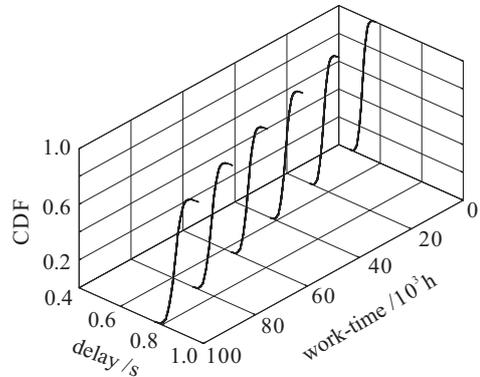


图 4 延时电路在6个退化时刻的CDF演化结果

最后,利用改进的双层MCS/NIPCE法创建时变概率盒.对表3中的参数进行 $50 \times 1000$ 的内外层抽样,获得对应6个时刻的6组CDF曲线,每组曲线有50条CDF曲线;提取6组CDF曲线下边界 $\underline{F}(x)$ 和上边界 $\overline{F}(x)$ ,得到由6个时刻的概率盒组成的时变概率盒.

图5和图6给出了延时电路在6个退化时刻的概率盒时变情况,其中图6是图5在YOZ平面的投影.

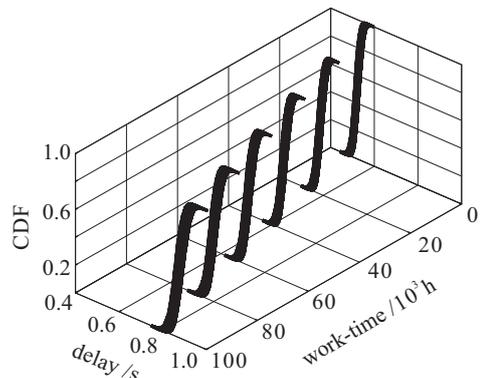


图 5 延时电路在6个退化时刻的时变概率盒

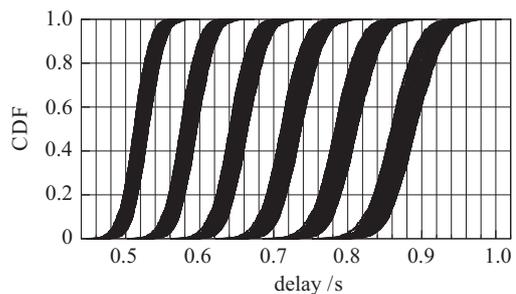


图 6 延时电路在6个退化时刻的时变概率盒在YOZ平面的投影

从图5和图6中可以得到以下信息:

1) 由图5可知,随着工作时间的累加,延时时间均值近似从0.5 s增加到0.9 s,延时电路的延时性能不断退化.

2) 由图6可知,随着工作时间的累加,P-box的宽度不断变大(例如,0 h时刻P-box的宽度大约占据0.02 s,而到 $100 \times 10^3$  h时刻,其宽度增加到了近似0.04 s),说明延时电路的认知不确定性不断变大.

3) 由图6可知,随着工作时间的累加,P-box在delay(s)轴跨越的范围不断扩大(例如,0 h时刻P-box跨越0.14 s,而到 $100 \times 10^3$  h时刻P-box跨越了近似0.24 s),说明延时电路的随机不确定性不断变大.

综上,随着延时电路工作时间的累积,电子元器件发生退化,各项不确定性因素随时间发生演化,使得延时时间不断变大,其不确定性也不断增加.这就要求在设置电路故障判定标准时,不仅要考虑电路性能参数的阈值判定,而且要考虑参数不确定性判定.时变概率盒不仅为电路的故障判定提供更为精细的标准,也为电子元器件的精度选择提供了更为精细的依据.

分别使用双层MCS和改进的双层MCS/NIPCE求取该延时电路输出响应的时变概率盒,双层MCS需调用模型 $50 \times 1000$ 次,而改进的双层MCS/NIPCE仅需调用模型 $50 \times 12$ 次,可见,改进的双层MCS/NIPCE极大地提高了计算效率.

### 3 结论

本文提出了时变概率盒的方法来量化时变系统的混合不确定性,并通过电路性能退化的算例验证了该方法的有效性,主要结论如下:

1) 在获取系统响应的CDF演化规律的基础上,结合概率盒理论,利用改进后的双层MCS/NIPCE求取时变概率盒.与双层MCS相比,双层MCS/NIPCE法在计算效率方面体现出明显的优势.

2) 时变概率盒不仅表征了特定时刻的混合不确定性,而且反映了输出响应的时变情况和输出不确定性随时间变化的趋势,为系统设计和可靠性分析提供了更符合实际和更为精细准确的依据.

3) 概率盒是一种不精确的概率模型,本文在100%的置信度下求取时变概率盒,其置信度问题有待于进一步研究.

#### 参考文献(References)

[1] Roy C J, Oberkampf W L. A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification

in scientific computing[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(25): 2131-2144.

[2] Sentz K, Ferson S. Probabilistic bounding analysis in the quantification of margins and uncertainties[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, 96(9): 1126-1136.

[3] Schöbi R, Sudret B. Global sensitivity analysis in the context of imprecise probabilities (p-boxes) using sparse polynomial chaos expansions[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2019, 187: 129-141.

[4] Chen N, Yu D J, Xia B Z, et al. Uncertainty analysis of a structural-acoustic problem using imprecise probabilities based on p-box representations[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 80: 45-57.

[5] Schöbi R, Sudret B. Uncertainty propagation of p-boxes using sparse polynomial chaos expansions[J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, 339: 307-327.

[6] 张保强, 苏国强, 展铭, 等. 概率盒框架下多响应模型确认度量方法研究[J]. *控制与决策*, 2019, 34(12): 2642-2648.

(Zhang B Q, Su G Q, Zhan M, et al. Model validation metrics with multiple correlated responses under the frame of probability box[J]. *Control and Decision*, 2019, 34(12): 2642-2648.)

[7] Helton J C. Quantification of margins and uncertainties: Conceptual and computational basis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2011, 96(9): 976-1013.

[8] Jiang C, Ni B, Han X, et al. Non-probabilistic convex model process: A new method of time-variant uncertainty analysis and its application to structural dynamic reliability problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, 268: 656-676.

[9] Hu Z, Mahadevan S, Du X P. Uncertainty quantification of time-dependent reliability analysis in the presence of parametric uncertainty[J]. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part B: Mechanical Engineering*, 2016, 2(3): 031005.

[10] Wang L, Wang X J, Wu D, et al. Structural optimization oriented time-dependent reliability methodology under static and dynamic uncertainties[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 57(4): 1533-1551.

[11] Zhang J F, Du X P. Time-dependent reliability analysis for function generation mechanisms with random joint clearances[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2015, 92: 184-199.

[12] 郭弘原, 顾祥林, 周彬彬, 等. 基于概率密度演化的锈蚀混凝土梁时变可靠性分析[J]. *建筑结构学报*, 2019, 40(1): 67-73.

(Guo H Y, Gu X L, Zhou B B, et al. Time-dependent reliability analysis for corroded RC beams based

- on probability density evolution theory[J]. *Journal of Building Structures*, 2019, 40(1): 67-73.)
- [13] Mitani Y, Satake H. Time evolution of 5th distribution under BT stress in ultra-thin gate oxides[C]. *International Conference on Integrated Circuit Design & Technology*. Austin: IEEE, 2004: 341-345.
- [14] Li J, Chen J B. Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters[J]. *Computational Mechanics*, 2004, 34(5): 400-409.
- [15] Zhai G F, Zhou Y G, Ye X R. A tolerance design method for electronic circuits based on performance degradation[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2015, 31(4): 635-643.
- [16] 陈健云, 贾启彬, 徐强. 地震作用下混凝土坝时变动力可靠度的概率密度演化方法研究[J]. *水利学报*, 2017, 48(11): 1348-1354.  
(Chen J Y, Jia Q B, Xu Q. Study on probability density evolution method for time-dependent dynamic reliability of concrete dams subjected to earthquake[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2017, 48(11): 1348-1354.)
- [17] 薛斌, 朱玉华, 何毅, 等. 基于概率密度演化的铅芯橡胶支座水平等效刚度不确定性[J]. *地震工程与工程振动*, 2018, 38(6): 145-152.  
(Xue B, Zhu Y H, He Y, et al. Uncertainty of equivalent horizontal stiffness of lead-rubber bearings based on probability density evolution method[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Dynamics*, 2018, 38(6): 145-152.)
- [18] Chen H P. Residual flexural capacity and performance assessment of corroded reinforced concrete beams[J]. *Journal of Structural Engineering*, 2018, 144(12): 04018213.
- [19] Rochoux M C, Ricci S, Lucor D, et al. Towards predictive data-driven simulations of wildfire spread—Part I: Reduced-cost ensemble Kalman filter based on a polynomial chaos surrogate model for parameter estimation[J]. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2014, 14(11): 2951-2973.
- [20] Xiu D B, Karniadakis G E. The Wiener—Askey polynomial chaos for stochastic differential equations[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2002, 24(2): 619-644.
- [21] Hosder S, Walters R, Balch M. Efficient sampling for non-intrusive polynomial chaos applications with multiple uncertain input variables[C]. *The 48th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Honolulu, 2007: 1939.
- [22] Marelli S, Sudret B. UQLab user manual—Polynomial chaos expansions[C]. *Chair of Risk, Safety & Uncertainty Quantification*. Zirocj, 2015: 97-110.
- [23] Du Y, Ding J M, Liu A. A probability box modeling method of dimensionless mechanical fault features in time domain[C]. *Proceedings of the 2014 International Conference on Mechatronics, Control and Electronic Engineering (MCE-14)*. Paris: Atlantis Press, 2014: 427-430.
- [24] Bruns M C. Propagation of imprecise probabilities through black box models[D]. Atlanta: School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, 2006.
- [25] Oberkampf W L, Roy C J. *Verification and validation in scientific computing*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010: 606-610.

### 作者简介

张保强(1981—), 男, 助教, 博士, 从事飞行器结构仿真模型确认方法的研究, E-mail: bqzhang@xmu.edu.cn;

陈梅玲(1990—), 女, 硕士生, 从事不确定性量化方法的研究; E-mail: 35020171150918@stu.xmu.edu.cn;

孙东阳(1985—), 男, 讲师, 博士, 从事模型确认、系统可靠性分析与评估的研究, E-mail: sundongyang@cqu.edu.cn;

锁斌(1979—), 男, 副研究员, 博士, 从事不确定性信息处理、系统可靠性分析与评估等研究, E-mail: suo.y.y@163.com.

(责任编辑: 李君玲)