

# 考虑气动效应不确定性的气动辅助变轨制导算法

张学钢<sup>1,2,3†</sup>, 朱振才<sup>1,4</sup>, 陈宏宇<sup>1,4</sup>

(1. 中国科学院 微小卫星创新研究院, 上海 201203; 2. 中国科学院 上海微系统与信息技术研究所, 上海 200050; 3. 中国科学院大学, 北京 100049; 4. 上海科技大学 信息技术学院, 上海 201210)

**摘要:** 气动辅助变轨技术在节省推进、延长航天器寿命等方面具有可观的应用价值,但工程实践却严重受制于气动效应不确定性,因此,设计了针对气动效应不确定性的 SMC- $H_2/H_\infty$  鲁棒制导算法. 算法基于高斯伪谱法获取的标称轨迹和控制序列,通过构建气动效应的不确定性模型,利用奇异摄动理论将气动辅助变轨飞行器动力学划分为位置和速度回路,设计滑模和鲁棒  $H_2/H_\infty$  控制器分别实现制导控制. 进一步,通过 MatLab/xPC 和飞行器机载计算模块组成的实时仿真系统验证,所设计鲁棒制导算法在计算复杂度满足工程约束前提下,能够在存在气动效应不确定性的场景下实现标称轨迹的跟踪,表明所设计的鲁棒制导算法能够有效地增强系统的鲁棒性,具有重要的工程应用价值.

**关键词:** 气动辅助变轨; 气动效应不确定性; 鲁棒制导; 高斯伪谱法

中图分类号: V448.2

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0333

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 张学钢,朱振才,陈宏宇. 考虑气动效应不确定性的气动辅助变轨制导算法 [J]. 控制与决策, 2020, 35(11): 2773-2779.

## Aeroassisted orbital transfer robust guidance method considering atmosphere effect uncertainty

ZHANG Xue-gang<sup>1,2,3†</sup>, ZHU Zhen-cai<sup>1,4</sup>, CHEN Hong-yu<sup>1,4</sup>

(1. Innovation Academy for Microsatellites, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201203, China; 2. Shanghai Institute of Microsystem and Information Technology, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200050, China; 3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 4. School of Information Science and Technology, Shanghai Technology University, Shanghai 201210, China)

**Abstract:** Aeroassisted orbital transfer has remarkable potential in reducing propellant requirement and prolonging spacecraft lifetime. However, it is heavily influenced by the atmosphere effect uncertainty in engineering. Hence atmosphere effect uncertainty model is established and a robust  $H_2/H_\infty$  guidance algorithm is designed, based on the nominal transfer trajectory and control series derived via Gauss pseudospectral method (GPM) in the paper. Considering the limited calculation ability of on-board computer in engineering, the guidance system is further divided into position and velocity subsystems to reduce computational burden based on the singular perturbation theory. Besides, a real-time simulation system, mainly consisting of Matlab/xPC and on-board computer module, is designed to verify the proposed guidance method. Simulation results show that the method can derive and trace the desired optimal transfer trajectory with satisfying accuracy and sustainable calculation, and strengthen the robustness of atmosphere effect uncertainty remarkably. It has remarkable potential in engineering applications.

**Keywords:** aeroassisted orbital transfer; atmosphere effect uncertainty; robust guidance method; Gauss pseudospectral method

## 0 引言

气动辅助变轨技术由 London 于 20 世纪 60 年代首次提出<sup>[1]</sup>,相比于经典的霍曼变轨等轨道转移策略,气动辅助变轨在降低变轨推进剂需求、延长航天器寿命等方面具有重要意义. 在气动辅助变轨技

术提出后的数十年间涌现出诸多研究成果<sup>[2]</sup>,并在工程实践的成功案例中进一步证明了其巨大的应用价值<sup>[3-5]</sup>,最为经典的应用案例即是麦哲伦号探测器利用气动辅助变轨技术成功降低至 1 200 m/s 飞行速度<sup>[6]</sup>. 历经数 10 年的发展,目前气动辅助变轨技术在

工程中已经发展出气动辅助制动、气动辅助捕获等方向<sup>[7-11]</sup>,理论研究重心也转移到工程中的新问题,如热流约束<sup>[12-14]</sup>、空间快速响应<sup>[15]</sup>等。

通过工程实践发现,气动辅助变轨技术严重受限于高层大气的气动效应不确定性现象。因此,本文设计针对气动效应不确定性的SMC- $H_2/H_\infty$ 鲁棒制导算法。算法分析气动辅助变轨任务,构建辅助变轨数学模型,通过高斯伪谱法获取标称轨迹和控制序列。在此基础上,通过构建气动效应的等效不确定性模型,利用奇异摄动理论将气动辅助变轨飞行器动力学划分为位置和速度两个回路,针对等效气动效应不确定性仅直接影响速度回路的特点和飞行器机载计算资源有限的现状,设计滑模和鲁棒 $H_2/H_\infty$ 控制器分别实现制导控制,保证制导算法鲁棒性的前提下有效地降低计算复杂度。此外,通过基于Matlab/xPC和飞行器机载计算模块组成的半物理实时仿真系统的仿真实验表明,本文所设计的鲁棒制导算法在计算复杂度满足工程约束前提下,能够在气动效应不确定性的场景下准确地实现标称轨迹的跟踪,可靠地完成气动辅助变轨的任务。因此,本文所涉及的鲁棒制导算法满足工程实用的需求和条件,在气动辅助变轨工程中具有可观的应用价值。

## 1 气动辅助变轨问题描述

### 1.1 气动辅助变轨任务

气动辅助变轨任务如图1所示,可以分为3个主要阶段。第1阶段为离轨段:飞行器在第1次推力脉冲(以速度增量 $\Delta V_1$ 表示)作用下离开初始轨道,进入转移轨道,再入大气层;第2阶段为气动滑行段:飞行器在大气层内做无动力滑行;第3阶段为再入轨段:飞行器在逸出大气层后,进行第2次脉冲控制( $\Delta V_2$ )补偿大气层内消耗的动能,进入转移轨道并在转移轨道远地点进行第3次脉冲控制( $\Delta V_3$ ),圆化轨道使飞行器进入目标轨道。其中第2次脉冲控制视飞行器逸出大气层状态可以省略。

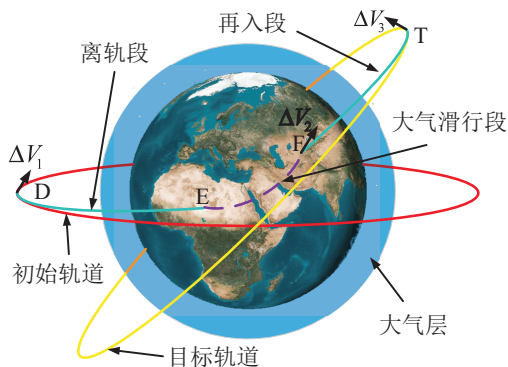


图1 气动辅助变轨任务概述

依据文献[16-17],气动辅助变轨飞行器在气动段的动力学模型为

$$\dot{r} = v \sin \gamma, \quad (1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi}, \quad (2)$$

$$\dot{\phi} = \frac{v \cos \gamma \sin \psi}{r}, \quad (3)$$

$$\dot{v} = -\frac{\rho v^2 S C_D}{2m} - \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma, \quad (4)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{v} \left[ \frac{\rho v^2 S}{2m} C_L \cos \sigma - \left( \frac{\mu}{r^2} - \frac{v^2}{r} \right) \cos \gamma \right], \quad (5)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{v} \left[ \frac{\rho v^2 S}{2m \cos \gamma} C_L \sin \sigma - \frac{v^2}{r} \cos \gamma \cos \psi \tan \phi \right]. \quad (6)$$

其中: $\rho$ 是大气密度, $\theta$ 和 $\varphi$ 是经度和纬度, $\gamma$ 是飞行路径角, $\psi$ 是航向角, $\alpha$ 是飞行攻角, $\sigma$ 是倾斜角, $\mu$ 是地球引力常数, $r$ 是地心距, $v$ 是飞行速度, $m$ 和 $S$ 是飞行器质量和迎流面面积, $C_D$ 和 $C_L$ 是气动阻力和升力系数,满足

$$\rho = \rho_0 \exp(-\beta h), \quad (7)$$

$$C_L = C_{L\alpha} \cdot \alpha, \quad (8)$$

$$C_D = C_{D0} + K C_L^2. \quad (9)$$

$h = r - R_s$ 是飞行器标高, $R_s$ 是地球半径, $\rho_0$ 是海平面大气密度, $C_{L\alpha}$ 、 $C_{D0}$ 和 $K$ 为飞行器气动参数。

此外, $\phi$ 、 $\psi$ 和轨道倾角 $i$ 间满足

$$\cos i = \cos \phi \cos \psi. \quad (10)$$

### 1.2 气动辅助转移轨迹优化

气动辅助变轨的主要意义在于节省飞行器变轨所需推进剂。因此,本文选择气动辅助变轨任务中的3次脉冲控制所需推进剂(等效于速度增量)作为优化目标,即

$$\min J = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3. \quad (11)$$

为简化后续论述,本文假定初始轨道和目标轨道均为圆轨道,但分析方法可以拓展适用于椭圆轨道。在飞行器离轨段,由能量守恒和角动量守恒原理可以得到下式:

$$\frac{V_e^2}{2} - \frac{\mu}{R_e} = \frac{(V_i - \Delta V_1)^2}{2} - \frac{\mu}{R_i}, \quad (12)$$

$$R_e V_e \cos(-\gamma_e) = R_i (V_i - \Delta V_1). \quad (13)$$

其中: $R_i$ 和 $V_i$ 是第1次脉冲前飞行器的地心距和速度, $R_e$ 和 $V_e$ 是飞行器在大气层再入点(E点)的地心距和速度, $\gamma_e$ 是对应的飞行路径角。因此,解算得到速度增量为

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{\mu}{R_i}} - \sqrt{\frac{2\mu(1/R_i - 1/R_e)}{1 - (R_i/R_e/\cos\gamma_e)^2}}. \quad (14)$$

与离轨段类似,在逸出大气层后再入轨段,依据能量守恒和角动量守恒,得到下式:

$$\frac{(V_f + \Delta V_2)^2}{2} - \frac{\mu}{R_f} = \frac{(V_t - \Delta V_3)^2}{2} - \frac{\mu}{R_t}, \quad (15)$$

$$R_f(V_f + \Delta V_2) \cos(-\gamma_f) = R_t(V_t - \Delta V_3). \quad (16)$$

其中:  $R_f$ 、 $V_f$  和  $\gamma_f$  是飞行器在大气层逸出点(F点)的地心距、速度和飞行路径角,  $R_t$  和  $V_t$  是飞行器在第 3 次脉冲后的地心距和速度. 因此,可以计算得到速度增量如下:

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{2\mu(1/R_f - 1/R_t)}{1 - (R_f \cos\gamma_f/R_t)^2}} - V_f, \quad (17)$$

$$\Delta V_3 = \sqrt{\frac{\mu}{R_t}} - \sqrt{\frac{2\mu(1/R_f - 1/R_t)}{(R_t/R_f/\cos\gamma_f)^2 - 1}}. \quad (18)$$

此外,为保证求解得到的转移轨迹在工程上是可行的,必须明确必要的约束条件,即

$$R_e - R_s = h_{\text{atm}}, \quad (19)$$

$$\gamma_e \leq 0, \quad (20)$$

保证飞行器可以再入大气层. 其中:  $R_s$  是地球半径,  $h_{\text{atm}}$  是大气层厚度. 与此类似,有

$$R_f - R_s = h_{\text{atm}}, \quad (21)$$

$$\gamma_f \geq 0, \quad (22)$$

如下约束条件可以确保再入轨段转移轨迹远地点与目标轨道相切:

$$\left(2 - \frac{V_e^2}{\mu/R_f}\right) \frac{R_t^2}{R_f^2} - 2 \frac{R_t}{R_f} + \frac{V_e^2}{\mu/R_f} \cos^2 \gamma_e = 0. \quad (23)$$

受限于飞行器的热防护能力,飞行器在气动滑行段内的驻点热流约束至关重要,有

$$\dot{Q} = \hat{Q} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{0.5} \left(\frac{v}{v_c}\right)^{3.15} \leq \dot{Q}_{\text{max}}. \quad (24)$$

其中:  $\hat{Q}$  是热流乘子,  $\dot{Q}_{\text{max}}$  是驻点热流峰值,且  $v_c = \sqrt{\mu/R_s}$ .

受限于飞行器的姿态机动能力,飞行器的姿态角及其变化率同样需要满足如下约束条件:

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \quad \sigma_{\min} \leq \sigma \leq \sigma_{\max}; \quad (25)$$

$$\dot{\alpha}_{\min} \leq \dot{\alpha} \leq \dot{\alpha}_{\max}, \quad \dot{\sigma}_{\min} \leq \dot{\sigma} \leq \dot{\sigma}_{\max}. \quad (26)$$

此外,为实现变轨的任务需求,飞行器逸出大气层后需要满足目标设定的轨道倾角

$$\cos i_f = \cos \phi_f \cos \psi_f. \quad (27)$$

其中:  $i_f$  是期望的轨道倾角,  $\phi_f$  和  $\psi_f$  是飞行器逸出大气层后的纬度和航向角.

以上列举了部分气动辅助变轨任务中主要的约束条件,针对不同的任务需求和设计约束,实际工程中考虑的约束略有不同,在此不再详细讨论.

气动辅助变轨转移轨迹优化问题等价于如下最优化问题:

$$\min J = \Delta V_1(R_e, \gamma_e) + \Delta V_2(R_e, R_f, \gamma_f, V_f) + \Delta V_3(R_f, \gamma_f); \quad (28)$$

$$\text{s.t. Eq.(1) ~ (6), (19) ~ (27).}$$

为简化后续论述和算法设计,定义气动辅助变轨飞行器在气动段的状态变量为  $\mathbf{x} = [r \ \theta \ \phi \ v \ \gamma \ \psi]^T$ , 控制变量为  $\mathbf{u} = [\alpha \ \sigma]^T$ .

利用高斯伪谱法,通过高斯点和拉格朗日插值函数,可以得到转移轨迹和控制序列

$$\mathbf{x}(\tau) \approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{i=0}^N \mathbf{x}(\tau_i) L_i(\tau), \quad (29)$$

$$\mathbf{u}(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}(\tau_i) L_i^*(\tau). \quad (30)$$

其中:  $\tau_i$  为高斯点,  $L_i(\tau)$  为拉格朗日插值函数.

转移轨迹优化问题可以转化为非线性规划问题

$$\min_{\mathbf{U}} J = \varphi(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(1), t_f); \quad (31)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau_k) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{X}(\tau_k), \mathbf{U}(\tau_k), \tau_k; t_0, t_f), \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (32)$$

$$\Phi(\mathbf{x}(-1), t_0, \mathbf{x}(1), t_f) = 0; \quad (33)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}(\tau), \mathbf{U}(\tau), \tau; t_0, t_f) \leq 0; \quad (34)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{\min} \leq \dot{\mathbf{U}}(\tau_k) \leq \dot{\mathbf{U}}_{\max}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (35)$$

通过求解非线性规划问题(31)~(35),可以得到气动辅助变轨飞行器的最优转移轨迹  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_N), \mathbf{x}(t_f)\}$  和控制序列  $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}(t_0), \mathbf{u}(t_1), \dots, \mathbf{u}(t_N)\}$ , 即标称轨迹和控制序列.

## 2 鲁棒制导算法

### 2.1 气动效应不确定性模型

前述分析中所用动力学模型(1)~模型(6)是基于系列假设和简化的基础上得到的,核心假设包括大气密度变化,符合式(7),气动效应符合

$$D = C_D S \rho V^2 / 2, \quad L = C_L S \rho V^2 / 2, \quad (36)$$

其中  $D$  和  $L$  为气动阻力和升力. 但事实上,高层大气的气体密度和气动效应是复杂多变且充满不确定性的. 因此,本文建立如下的气动效应不确定性模型:

$$F = \frac{C + \Delta C}{2} S(\rho_r + \Delta \rho) V^2 = \frac{C}{2} S \left( \rho_r + \Delta \rho + \frac{\Delta C \rho_r}{C} + \frac{\Delta C \Delta \rho}{C} \right) V^2 =$$

$$\frac{C}{2}S(\rho_r + \rho_\delta)V^2. \quad (37)$$

其中:  $F$  为气动阻力或升力;  $C$  为相应的气动系数;  $\Delta C$  和  $\Delta\rho$  为气动效应和气体密度的随机不确定性;  $\rho_r$  为标称的气体密度, 其变化符合式(7);  $\rho_\delta$  是有界的不确定项, 满足约束  $\|\rho_\delta\| \leq \bar{\delta}$ . 观察式(37)可以发现, 气体密度和气动效应的不确定性可以等效为气动密度不确定性, 这有助于降低制导算法复杂度.

依据式(37), 包含气动效应不确定性的气动辅助变轨飞行器的动力学模型为

$$\dot{r} = v \sin \gamma, \quad (38)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v \cos \gamma \cos \psi}{r \cos \phi}, \quad (39)$$

$$\dot{\phi} = \frac{v \cos \gamma \sin \psi}{r}, \quad (40)$$

$$\dot{v} = -\frac{\rho_r v^2 S C_D}{2m} - \frac{\mu}{r^2} \sin \gamma - \frac{\rho_\delta v^2 S C_D}{2m}, \quad (41)$$

$$\dot{\gamma} = \left[ \frac{\rho_r v S}{2m} C_L \cos \sigma - \left( \frac{\mu}{r^2 v} - \frac{v}{r} \right) \cos \gamma \right] + \frac{\rho_\delta v S}{2m} C_L \cos \sigma, \quad (42)$$

$$\dot{\psi} = \left[ \frac{\rho_r v S}{2m \cos \gamma} C_L \sin \sigma - \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \psi \tan \phi \right] + \frac{\rho_\delta v S}{2m \cos \gamma} C_L \sin \sigma. \quad (43)$$

## 2.2 鲁棒 $H_2/H_\infty$ 制导算法

基于动力学模型(38)~(43), 可以设计鲁棒  $H_2/H_\infty$  制导控制器处理气动效应引入的不确定项. 为设计鲁棒  $H_2/H_\infty$  控制器, 首先将动力学模型在时间区间  $(t_k, t_{k+1})$  内线性化, 即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_k}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_k}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_k). \quad (44)$$

定义变量和系数矩阵

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_k, \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_k; \quad (45)$$

$$\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_k}}, \quad \mathbf{B} + \Delta \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_k}}. \quad (46)$$

其中: 矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  包含所有与不确定项  $\rho_\delta$  的无关项,  $\Delta \mathbf{A}$  和  $\Delta \mathbf{B}$  则涵盖所有  $\rho_\delta$  的相关项. 进一步将其分解为如下结构:

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{E}_1, \quad \Delta \mathbf{B} = \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{E}_2. \quad (47)$$

$\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{E}_1$  和  $\mathbf{E}_2$  是确定性矩阵, 包含动力学系统不确定项的结构信息,  $\mathbf{F}$  是不确定矩阵且满足  $\mathbf{F}^T \mathbf{F} \leq \mathbf{I}$ . 所以有

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0^{3 \times 3} & 0^{3 \times 3} \\ 0^{3 \times 3} & \mathbf{I}^{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \frac{\rho_\delta}{\bar{\delta}} \mathbf{I}^{6 \times 6}; \quad (48)$$

$$\mathbf{E}_1 = \bar{\delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{v^k S C_D}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{S \cos u_2^k u_1^k}{2m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{S u_1^k \sin u_2^k}{2m \cos \gamma^k} & \frac{v^k S \sin \gamma^k u_1^k \sin u_2^k}{2m \cos^2 \gamma^k} & 0 \end{bmatrix}; \quad (49)$$

$$\mathbf{E}_2 = \bar{\delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{(v^k)^2 S K u_1^k}{m} & 0 \\ \frac{v^k S \cos u_2^k}{2m} & \frac{v^k S u_1^k \sin u_2^k}{2m} \\ \frac{v^k S \sin u_2^k}{2m \cos \gamma^k} & \frac{v^k S u_1^k \cos u_2^k}{2m \cos \gamma^k} \end{bmatrix}; \quad (50)$$

其中上标  $k$  标识标称序列中第  $k$  个元素.

在时间区间  $[t_k, t_{k+1})$ , 动力学模型可以近似为线性系统

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \Delta \mathbf{x} + (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}) \Delta \mathbf{u} + \mathbf{M} \mathbf{w}, \quad (51)$$

$\mathbf{w}$  表示除气动效应不确定项外的其他摄动和干扰.

鲁棒  $H_2/H_\infty$  控制算法的目标是设计状态反馈控制器

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{x}, \quad (52)$$

使得系统对于给定的  $\varepsilon > 0$  满足:

- 1) 闭环系统渐近稳定;
- 2)  $\mathbf{w}$  至  $\Delta \mathbf{x}$  的传递函数  $\mathbf{T}_{\mathbf{w} \Delta \mathbf{x}}$  的  $\mathcal{H}_\infty$  范数满足

$$\|\mathbf{T}\|_\infty \leq \varepsilon; \quad (53)$$

- 3) 系统  $H_2$  性能的上确界  $J(\mathbf{K})$  满足

$$J(\mathbf{K}) = \sup_F \lim_{t \rightarrow \infty} E\{\mathbf{z}^T \mathbf{z}\} \leq \bar{J}(\mathbf{K}). \quad (54)$$

依据参考文献[18], 鲁棒  $H_2/H_\infty$  状态反馈控制器可以通过求解如下线性矩阵不等式获取:

$$\min_{\alpha, \beta, \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{N}} \text{Trace}(\mathbf{N}); \quad (55)$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{0} & (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{V})^T \\ \mathbf{0} & -\alpha \varepsilon^2 \mathbf{I} & \alpha \mathbf{M}^T \\ \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{V} & \alpha \mathbf{M} & -\mathbf{X} + \beta \mathbf{H}\mathbf{H}^T \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{X} + \mathbf{E}_2 \mathbf{V} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} E_1 X + E_2 V)^T & X & X \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\beta I & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha I & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (56)$$

$$\begin{bmatrix} -N & M^T \\ M & -X \end{bmatrix} < 0. \quad (57)$$

其中:  $\alpha > 0, \beta > 0, X$  为正定对称矩阵,  $\text{Trace}(N)$  为矩阵  $N$  的迹.

依线性矩阵不等式最优解, 可以得到所需鲁棒  $H_2/H_\infty$  状态反馈控制器

$$\Delta u = V X^{-1} \Delta x = K_{\text{gain}} \Delta x. \quad (58)$$

由式 (45), 得到气动辅助变轨飞行器的鲁棒  $H_2/H_\infty$  制导控制为

$$u_k^{\text{robust}} = u(t_k) + \Delta u. \quad (59)$$

### 2.3 SMC- $H_2/H_\infty$ 鲁棒制导算法

鲁棒  $H_2/H_\infty$  制导算法可以有效地处理气动效应的不确定性, 完成飞行器的制导任务, 但是其状态反馈控制器设计需要求解计算复杂度较高的线性矩阵不等式 (56), 对于计算资源有限的飞行器机载计算模块而言负担沉重. 因此, 本文基于奇异摄动理论, 将气动辅助变轨飞行器动力学划分为位置和速度两个回路分别进行制导控制, 可以降低系统维数和矩阵不等式的阶数, 有效降低制导算法计算复杂度, 减轻计算模块的负担.

进一步定义位置回路状态变量为  $p = [r \ \theta \ \phi]^T$ , 速度回路状态变量为  $v = [v \ \gamma \ \psi]^T$ . 则飞行器动力学模型 (51) 等效为

$$\Delta \dot{p} = A_{pp} \Delta p + A_{pv} \Delta v + M_p \omega_p, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{v} &= A_{vp} \Delta p + (A_{vv} + \Delta A_{vv}) \Delta v + \\ & (B_v + \Delta B_v) \Delta u + M_v \omega_v. \end{aligned} \quad (61)$$

其中系数矩阵满足

$$A = \begin{bmatrix} A_{pp} & A_{pv} \\ A_{vp} & A_{vv} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_v \end{bmatrix}; \quad (62)$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta A_{vv} \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta B_v \end{bmatrix}; \quad (63)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_p \\ M_v \end{bmatrix}. \quad (64)$$

观察两个回路的动力学方程可以发现, 气动效应及其不确定性项仅直接影响速度回路, 可以将鲁棒  $H_2/H_\infty$  制导算法进一步降低计算复杂度, 并将算法

修改为 SMC- $H_2/H_\infty$  鲁棒制导算法, 即速度回路采用鲁棒  $H_2/H_\infty$  控制器处理气动效应的不确定性, 而在位置回路设计滑模控制器实现轨迹跟踪.

位置回路: 视飞行器速度为虚拟控制量, 设计滑模制导控制律

$$s_n = K_p (\Delta p_d - \Delta p) + K_i \int (\Delta p_d - \Delta p) dt, \quad (65)$$

$$\dot{s}_n = -\epsilon \text{sign}(s_n). \quad (66)$$

其中:  $K_p, K_i$  和  $\epsilon$  是控制系数,  $\Delta p_d$  是由高斯伪谱法得到的期望值. 因此, 计算得到速度补偿量  $\Delta v_{pd}$  为

$$\begin{aligned} \Delta v_{pd} &= (A_{pv}^T K_p^T K_p A_{pv})^{-1} (A_{pv}^T K_p^T) [K_p (\Delta \dot{p}_d - \\ & A_{pp} \Delta p) + K_i (\Delta p_d - \Delta p) + \epsilon \text{sign}(s_n)]. \end{aligned} \quad (67)$$

速度回路: 采用鲁棒  $H_2/H_\infty$  制导控制, 将状态反馈控制器 (58) 修正为

$$\Delta u = K_{\text{gain}} (\Delta v + \Delta v_{pd}). \quad (68)$$

## 3 仿真实验与分析

为验证所设计气动辅助变轨飞行器的鲁棒制导算法, 本文设计了仿真实验进行验证. 实验中所用气动辅助变轨任务及飞行器的参数见表 1.

表 1 气动辅助变轨仿真实验参数

参数	参数值	参数	参数值
$\rho_0$	1.225/(kg/m <sup>3</sup> )	$S$	1/m <sup>2</sup>
$1/\beta$	7 200	$C_{D0}$	0.032
$m_0$	1.4	$C_{L\alpha}$	0.5699
$h_{\text{atm}}$	110/km	$\dot{Q}_{\text{max}}$	19 987/(W/cm <sup>2</sup> )
$\mu$	3.986/10 <sup>14</sup> (m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> )	$R_s$	6 378.145/km
$K$	1.4	$i_f$	10/(°)
$R_i$	7 491.145/km	$R_t$	6 749.145/km

在验证本文所设计制导算法前, 首先设计仿真实验, 验证气动辅助变轨节省推进剂的优势. 选取霍曼变轨作为对比组, 定义推进节省率为

$$\eta = \frac{\Delta V_H - \Delta V_A}{\Delta V_H}. \quad (69)$$

$\Delta V_H$  和  $\Delta V_A$  分别表示霍曼变轨和气动辅助变轨所需推进控制的速度增量. 图 2 展示了不同轨道倾角改变场景下的推进剂节省比例.

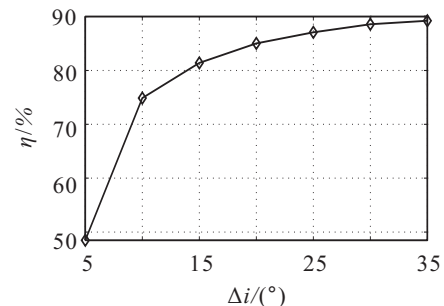


图 2 推进节省比例

由图2可以看出,气动辅助变轨能够有效地降低变轨所需推进剂,且随着轨道倾角变量的增加,节省的推进剂比例逐步提高.因此,气动辅助变轨在工程实践中具有重要价值.

下面设计仿真实验以验证本文所设计的鲁棒制导算法.为取得可靠的验证结果,需要搭建可行的仿真平台和模拟气动效应不确定性.

1) 仿真平台.为验证本文所设计的鲁棒制导算法的计算复杂度满足飞行器机载计算模块的要求,本文设计了图3所示的实时仿真系统.该系统由模拟飞行器动力学的Matlab/xPC实时模拟器、飞行器机载计算模块和终端数据存储显示器构成.

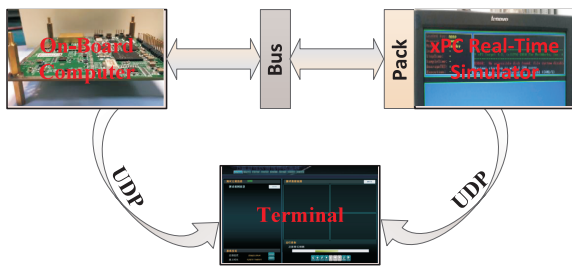


图3 实时仿真系统结构

2) 气动效应不确定性模拟.准确地模拟气动效应不确定性, $\rho_\delta$ 是仿真实验的关键,在本文中,借鉴傅立叶变换的思路,将 $\rho_\delta$ 建模为

$$\rho_\delta(t) = \dots + \bar{\delta} \sin(0.1\omega_c t) + \bar{\delta} \sin(\omega_c t) + \bar{\delta} \sin(2\omega_c t) + \dots, \quad (70)$$

其中 $\omega_c = 2\pi/T_c$ ,  $T_c$ 是飞行器在大气层内飞行时长.

实际上,在仿真实验中不可能也没有必要计算式(70)的无穷多项.因此,本文首先通过仿真实验寻找得到式中的主导频率项,如图4所示.

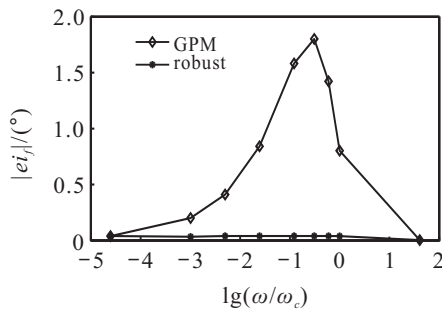


图4 轨道倾角偏离量

由图4所示实验结果可以得到不确定性的主导项,线性叠加即可实现对气动效应不确定性的模拟.

在图3所示仿真系统的基础上,利用图4所示主导项模拟气动效应不确定性,即可对本文所设计的鲁棒制导算法进行仿真验证,仿真结果如图5~图7所示.其中,GPM为高斯伪谱法得到的标称轨迹,robust

为本文所设计的SMC- $H_2/H_\infty$ 鲁棒制导算法的控制结果.

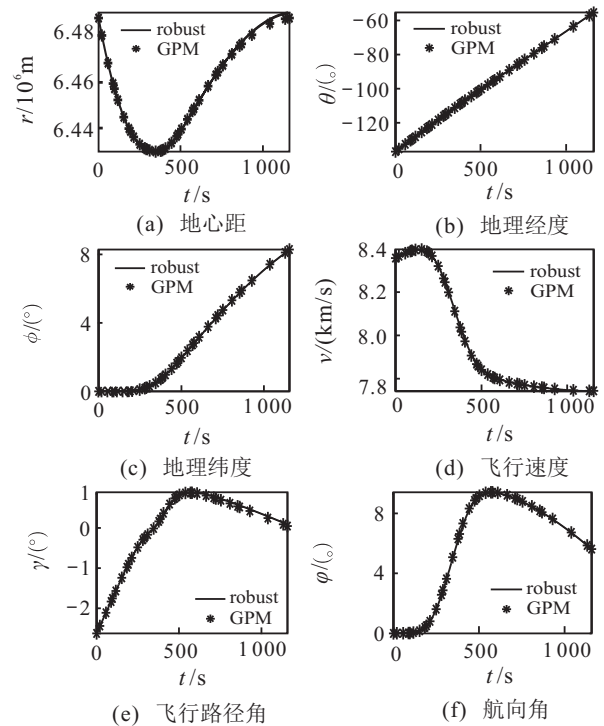


图5 气动辅助变轨飞行器气动段轨迹

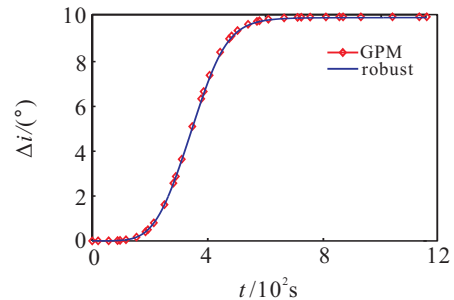
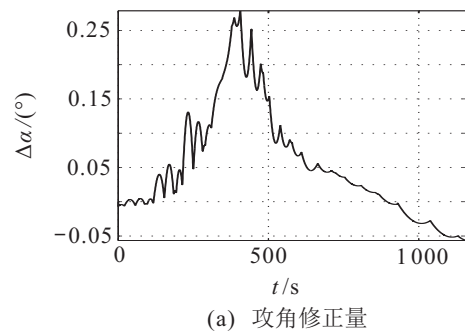
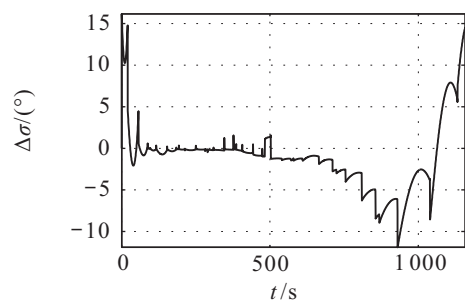


图6 气动辅助变轨轨道倾角改变量



(a) 攻角修正量



(b) 倾斜角修正量

图7 鲁棒制导算法对飞行器姿态的修正量

由图5和图6可以明显地看出,本文所设计的鲁棒制导算法,能够有效地解决气动效应不确定性的影响,准确地实现对标称轨迹的跟踪,可靠地实现飞行器轨道倾角的改变.图7展示了SMC- $H_2/H_\infty$ 制导算法对飞行器姿态的修正量.通过仿真实验,验证了本文所设计的鲁棒制导算法能够有效地解决工程中气动效应不确定性的影响,在飞行器机载计算模块有限的计算资源前提下实现标称轨迹的准确跟踪,增强了系统的鲁棒性,具有重要的工程应用价值.

## 4 结论

本文针对气动辅助变轨飞行器受气动效应不确定性影响明显的现象,设计了工程适用的SMC- $H_2/H_\infty$ 鲁棒制导算法.算法基于高斯伪谱法获取的标称转移轨迹和控制序列,通过奇异摄动理论将动力学划分为位置和速度回路,设计了工程适用的鲁棒制导算法.通过设计半物理实时仿真系统,验证了所设计的鲁棒制导算法能够利用飞行器机载计算模块有限的计算资源,有效地解决气动效应不确定性的影响,实现对标称轨迹的准确跟踪,显著提升系统的鲁棒性.因此,所设计的鲁棒制导算法具有可观的工程应用价值.

## 参考文献(References)

- [1] London S Howard. Change of satellite orbit plane by aerodynamic maneuvering[J]. *Journal of the Aerospace Sciences*, 1962, 29(3): 323-332.
- [2] Walberg G D. A survey of aeroassisted orbit transfer[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1985, 22(1): 3-18.
- [3] Chai R, Savvaris A, Tsourdos A, et al. Optimal tracking guidance for aeroassisted spacecraft reconnaissance mission based on receding horizon control[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2018, 54(4): 1575-1588.
- [4] James E Randolph, Angus D Mcronald. Solar system 'fast mission' trajectories using aerogravity assist[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1992, 29(2): 223-232.
- [5] Anderson J D, Lewis M J, Kothari A P, et al. Hypersonic waveriders for planetary atmospheres[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1991, 28(4): 401-410.
- [6] Curtis H H, Magellan. Aero braking at venus[J]. *Aerospace America*, 1994, 32: 32-36.
- [7] Reagan Fuhr, Anil V Rao. Minimum-fuel low-earth orbit aeroglide and aer thrust aeroassisted orbital transfer subject to heating constraints[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2018, 55(3): 723-748.
- [8] Ping Lu, Christopher J Cerimele, Michael A Tigges, et al. Optimal aerocapture guidance[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, 38(4): 553-565.
- [9] Henning G A, Edelman P J, Longuski J M. Design and optimization of interplanetary aerogravity-assist tours[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2014, 51(6): 1849-1856.
- [10] Santos W G D, Kuga H K, Rocco E M. Application of the Kalman filter to estimate the state of an aerobraking maneuver[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 36(6): 1802-1810.
- [11] Begüm Şenses, Anil V Rao. Optimal finite-thrust small spacecraft aeroassisted orbital transfer[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, 36(6): 1802-1810.
- [12] Ghosh P, Conway B A. Spatial statistical point prediction guidance for heating-rate-limited aeroassisted orbital transfer[J]. *Acta Astronautica*, 2015, 111: 257-269.
- [13] Taugeer ul Islam RIZVI, He Lin-shu, Xu Da-jun, et al. Optimal trajectory and heat load analysis of different shape lifting reentry vehicles for medium range application[J]. *Defence Technology*, 2015, 11(4): 350-361.
- [14] Christian Gogu, Taiki Matsumura, Rafael T Haftka, et al. Aeroassisted orbital transfer trajectory optimization considering thermal protection system mass[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2009, 32(3): 927-938.
- [15] Anil V Rao, Arthur W Scherich, Skylar Cox, et al. A concept for operationally responsive space mission planning using aeroassisted orbital transfer[C]. 2008 Responsive Space Conference. Los Angeles: AIAA, 2008: 1-10.
- [16] Darby C L, Rao A V. Minimum-fuel low-earth orbit aeroassisted orbital transfer of small spacecraft[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2011, 48(4): 618-628.
- [17] Rao A V, Tang S A, Hallman W P. Numerical optimization study of multiple-pass aeroassisted orbital transfer[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2002, 23(4): 215-238.
- [18] 俞立. 鲁棒控制: 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.  
(Yu L. Robust control: Linear matrix inequality processing method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

## 作者简介

张学钢(1990—),男,博士生,从事卫星动力学控制的研究, E-mail: gangg6010@126.com;

朱振才(1963—),男,研究员,博士生导师,从事卫星智能化管理等研究, E-mail: zczhu@hotmail.com;

陈宏宇(1976—),男,研究员,博士,从事空间信息传输等研究, E-mail: chenhy@shanghaitech.edu.cn.

(责任编辑:孙艺红)