# 基于加权信息熵的直觉模糊信息系统的三支决策

李小南[1†], 赵　璐[1], 易黄建[2]

(1. 西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710126；2. 西北大学 信息科学与技术学院, 西安 710127)

**摘　要:** 本文讨论直觉模糊信息系统上的三支决策问题. 首先, 定义一个由模糊因子、均值因子和概率因子三部分组成的相似度函数, 从而建立了直觉模糊信息系统上的三支决策模型并指出该模型理论上统一了各种双论域模型. 其次, 考虑论域对象的评价值不同, 提出了一种基于评价值的划分测度: 加权信息熵, 并且证明了划分越细, 加权信息熵越大. 最后, 基于加权信息熵的性质, 给出了最优三划分的合理解释, 从而提出了一种新的阈值求解方法.

**关键词:** 三支决策; 直觉模糊集; 信息系统; 加权信息熵

**中图分类号:** O159　　**文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2021.0337　　**开放科学 (资源服务) 标识码 (OSID):**

# Three-way Decision of Intuitionistic Fuzzy Information Systems Based on the Weighted Information Entropy

*LI Xiao-nan*[1†], *ZHAO Lu*[1], *YI Huang-jian*[2]

(1. School of Mathematics and Statistics，Xidian University，Xi’an 710126，China；2. School of Information Science and Technology, Northwest University，Xi’an 710127，China)

**Abstract:** This paper discusses three-way decision problems on intuitionistic fuzzy information systems. Firstly, a similarity degree function is defined, which is composed of the fuzzy factor, the mean factor and the probability factor, and then a three-way decision model on intuitionistic fuzzy information systems is established, and it is pointed out that the model theoretically unifies all kinds of two-universe models. Secondly, considering the different evaluation values of objects in the universe, this paper proposes a partition measure based on evaluation values: the weighted information entropy, and it is proved that the finer the partition is, the greater the weighted information entropy is. Finally, based on the property of the weighted information entropy, a reasonable explanation of the optimal tri-partition is given, and a new thresholds solution method is proposed.

**Keywords:** three-way decision; intuitionistic fuzzy sets; information systems; the weighted information entropy

## 0　引　言

为了给决策粗糙集的概率正域、负域和边界域提供一个合理的语义解释, Yao[1-3] 提出了三支决策理论. 该理论以一种 “三分而治” 的思想, 改进了传统的 “非此即彼” 的二支决策, 为解决复杂问题提供了一种有效方法[4]. 近年来, 学者们在三支决策领域做出了许多成果[5-11]. 例如, Hu 和 Yao[5] 提出了在粗糙集理论中用结构近似作为基础来研究三支决策; Jiao 等[6] 讨论了在单值中智信息系统中基于决策理论粗糙集的三支决策; 胡等[7] 将三支决策理论应用到机器学习领域中, 提出一种基于三支决策理论的主动学习方法; Yao[8] 将三支决策应用于冲突分析领域, 提出了三支冲突分析的概念. 经过十多年的发展, 三支决策理论已经在冲突分析[8,9]、聚类分析[10] 等诸多领域有着广泛的应用.

将经典 Pawlak 粗糙集模型中的等价关系推广为两个论域间的一般二元关系, 再定义相应的近似算子就产生了双论域粗糙集模型[12]. 不同二元关系 (例如, 兼容关系、模糊关系等) 上的近似算子, 诱导出各种各样的双论域模型[13-15]. 值得注意的是, Shakiba 等[16] 定义的 S-近似空间其实也是一种双论域模型. Li 等[17] 分析了各种 (分明) 双论域粗糙集模型的特点, 指出了双论域模型的三要素: 信息表、评价函数和划分方法, 进而提出了一种统一各种双论域模型的新模型, 即 0-1 表上的三支决策模型. 这里所谓 0-1 表, 就是属性值只有两种选择的特殊信息系统. 进一

**收稿日期:** 2021-02-27；**修回日期:** 2021-06-22.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目 (61772019, 61976244, 61906154).

†通讯作者. E-mail: lxn2007@163.com.

步, Li 等[18] 讨论了一般信息表上的三支决策问题, 并研究了该模型的数学结构性质.

直觉模糊集[19] 是处理不确定性、不精确性和模糊性问题的重要工具. 直觉模糊背景下的属性约简、规则提取、多属性决策、冲突分析等问题一直是粒计算研究领域的热点. 如前所述, 我们虽然统一了各种经典 (即 0-1 表上) 双论域模型, 但并未涉及模糊情况[20,21]. 因此研究直觉模糊背景下的三支决策问题、将各种 (分明或模糊) 双论域模型统一到直觉模糊信息系统的三支决策模型下就成了一个非常必要的工作, 这是本文的第一个研究动机. 现有涉及决策粗糙集或三支决策模型的研究中, 规则提取或决策结果往往和阈值有关. 而传统方法是用基于贝叶斯最小风险原理的决策粗糙集理论来计算阈值. 该方法计算阈值时需要确定较多参数而使得计算结果主观性较大且缺乏解释性. 为克服上述缺点, 本文提出了一种基于加权信息熵的阈值求解方法. 我们先利用评价函数 (可以是相似度函数、包含度函数等, 取决于具体问题) 给对象排序, 然后用加权信息熵去度量三划分从而选出最优结果. 新方法中一旦评价函数和三划分测度选定, 就不需要确定任何参数. 虽然评价函数的设定也具有主观性, 但对具体问题而构造的评价函数往往具有可解释性; 熵也早被用于不确定性的度量, 针对新模型而改进的加权熵也有合理的解释. 因此相比传统方法诸多参数的随机选取, 我们提供了一种相对客观的方法, 这是本文的第二个研究动机.

综上, 本文将一般信息系统的三支决策模型推广到直觉模糊信息系统上. 首先, 定义直觉模糊信息系统的评价函数为一种由模糊因子、均值因子和概率因子三部分组成的相似度函数. 其次, 建立了基于相似度函数的三支决策模型, 提出了一种基于知识划分测度的阈值求解方法. 最后, 证明了加权信息熵作为知识划分测度的合理性, 从而提出了一种基于加权信息熵的最优三划分方法.

## 1 相关知识

下面回顾直觉模糊集的概念及相关运算法则.

**定义 1[19]** 设 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是非空有限的对象集, 称为论域. 集合 $A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle | x \in U\}$ 称为直觉模糊集, $\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$ 分别称为对象 $x$ 属于 $U$ 的隶属度和非隶属度, 也就是说,

$$\mu_A(x): U \to [0,1], x \mapsto \mu_A(x) \in [0,1],$$
$$\nu_A(x): U \to [0,1], x \mapsto \nu_A(x) \in [0,1].$$

其中 $0 \le \mu_A(x) + \nu_A(x) \le 1$, 另外 $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$, 代表直觉模糊集 $A$ 中元素 $x$ 的犹豫度或者直觉模糊指标. $U$ 上的全体直觉模糊集所构成的集合记为 $IF(U)$.

Xu 等[22] 将直觉模糊集中的每个元素称为直觉模糊数. 通常情况下, 直觉模糊数可以用 $a = \langle \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle$ 表示. 在不引起混淆的情况下, 可以简记为 $a = \langle \mu_A, \nu_A\rangle$.

**定义 2[19]** 设 $A = \{\langle x_i, \mu_A(x_i), \nu_A(x_i)\rangle | x_i \in U\}$, $B = \{\langle x_i, \mu_B(x_i), \nu_B(x_i)\rangle | x_i \in U\}$ 为两个直觉模糊集, 则其相关运算法则和关系有

(1) $A \cup B = \{\langle x_i, \mu_A(x_i) \vee \mu_B(x_i), \mu_A(x_i) \wedge \mu_B(x_i)\rangle | x_i \in U\}$;

(2) $A \cap B = \{\langle x_i, \mu_A(x_i) \wedge \mu_B(x_i), \mu_A(x_i) \vee \mu_B(x_i)\rangle | x_i \in U\}$;

(3) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x_i) \le \mu_B(x_i), \nu_A(x_i) \ge \nu_B(x_i), \forall x_i \in U$;

(4) $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x_i) = \mu_B(x_i), \nu_A(x_i) = \nu_B(x_i), \forall x_i \in U$.

直觉模糊信息系统, 也称为直觉模糊信息表, 它在粗糙集、三支决策等诸多领域被广泛应用. 下面回顾直觉模糊信息系统的定义.

**定义 3[23]** 直觉模糊信息系统可以用一个四元数组 $\tilde{Q} = (U, AT, V, f)$ 来表示, 其中 $U$ 为非空有限的对象集, 称为论域; $AT$ 为属性集, $V = \bigcup_{a \in AT} V_a$ 为属性值的集合, $V_a$ 为属性 $a$ 的直觉模糊值域; 信息函数 $f: U \times AT \to V$ 为 $U$ 到 $V$ 上的直觉模糊映射, 使得对任意的 $x \in U$ 和 $a \in AT$, 有 $f(x,a) = \langle \mu_a(x), \nu_a(x)\rangle \in A$($A$ 为 $U$ 上的直觉模糊集).

**例 1** 下面的表 1 给出了一个直觉模糊信息系统. 采用 Pawlak[24] 冲突分析研究中关于中东冲突问题经典例子的解释, 可赋予表 1 如下含义: 对象集 $U$ 中的元素代表国家; 属性集 $A$ 中的元素代表事件; 表中的每个直觉模糊数表示对应国家对相关事件的态度. 例如 $x_6$ 对事件 $a_1$ 的态度为 $\langle 0.1, 0.2\rangle$. 从中可以看出支持 (肯定) 度或反对 (否定) 度都很低, 而犹豫度为 0.7 实际上反映出对该事件一种未置可否的态度.

表 1 冲突分析的直觉模糊信息系统

| $U \setminus AT$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\langle 0.5, 0.5\rangle$ | $\langle 0.1, 0.8\rangle$ | $\langle 0.2, 0.3\rangle$ | $\langle 0, 0.8\rangle$ |
| $x_2$ | $\langle 0.1, 0.6\rangle$ | $\langle 0.1, 0.6\rangle$ | $\langle 0.5, 0.3\rangle$ | $\langle 0.2, 0.6\rangle$ |
| $x_3$ | $\langle 0.5, 0.4\rangle$ | $\langle 0.2, 0.3\rangle$ | $\langle 0.1, 0.5\rangle$ | $\langle 0.7, 0.2\rangle$ |
| $x_4$ | $\langle 0.3, 0.3\rangle$ | $\langle 0.3, 0.4\rangle$ | $\langle 0.4, 0.6\rangle$ | $\langle 0.2, 0.6\rangle$ |
| $x_5$ | $\langle 0.4, 0.2\rangle$ | $\langle 0.5, 0.3\rangle$ | $\langle 0.7, 0.2\rangle$ | $\langle 0.8, 0.2\rangle$ |
| $x_6$ | $\langle 0.1, 0.2\rangle$ | $\langle 0.7, 0.1\rangle$ | $\langle 0.9, 0\rangle$ | $\langle 0.7, 0.2\rangle$ |

## 2 直觉模糊信息系统上的三支决策模型

在本节中, 首先定义一个由模糊因子、均值因子和概率因子三部分组成的相似度函数, 其次通过相似度函数建立了直觉模糊信息系统上的三支决策模型.

相似度用来测量两个集合之间的相似程度. 直觉模糊集的相似度不仅受隶属度的影响, 也受非隶属度的影响, 因此我们同时考虑这两个因素来构造模糊因子和均值因子. 前者通过与最负理想的直觉模糊数 (即隶属度为 0, 非隶属度为 1 的直觉模糊数) 的接近程度来反映, 后者通过直觉模糊集与其均值的分散程度来反映.

**定义 4** 设 $A=\{\langle x_i,\mu_A(x_i),\nu_A(x_i)\rangle | x_i\in U\}\in IF(U)$, 则 $A$ 的模糊因子 $F(A)$ 定义为

$$F(A)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\mu_A\left(x_i\right)-0\right|+\left|\nu_A\left(x_i\right)-1\right|\right).$$

**定义 5** 设 $A=\{\langle x_i,\mu_A(x_i),\nu_A(x_i)\rangle | x_i\in U\}\in IF(U)$, 则 $A$ 的均值因子 $E(A)$ 定义为

$$E(A)=\frac{1}{2n}\left|\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_A\left(x_i\right)-\bar{\mu}_A\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\nu_A\left(x_i\right)-\bar{\nu}_A\right)\right|,$$

其中

$$\bar{\mu}_A=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_A\left(x_i\right)}{n},\bar{\nu}_A=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_A\left(x_i\right)}{n}$$

分别是隶属度、非隶属度的均值.

模糊集有许多推广, 例如二型模糊集、犹豫模糊集、直觉模糊集、区间值模糊集、中智集、毕达哥拉斯模糊集等. 注意到, 直觉模糊集与区间值模糊集在数学形式上是等价的. 下面回顾区间值模糊集的定义.

**定义 6** [25] 设 $U$ 为论域, 在 $U$ 上存在一个映射 $M:U\rightarrow[I], x\mapsto M(x)$, 则称映射 $M$ 为 $U$ 上的区间值模糊集. 其中 $[I]=\{\bar{a}=[a^-,a^+]\,|a^-\le a^+\}$ 是有界闭区间.

直觉模糊集中的元素和区间值模糊集中的元素是一一对应的, 因此直觉模糊集中的问题可以转化到区间值模糊集中. 由于直觉模糊集中隶属度 $\mu_A(x)$ 与非隶属度 $\nu_A(x)$ 间的关系为 $0\le\mu_A(x)+\nu_A(x)\le 1$, 即 $0\le\mu_A(x)\le 1-\nu_A(x)\le 1$, 则直觉模糊集 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle | x\in U\}$ 可表示为区间值模糊集 $A:U\rightarrow[\mu_A(x),1-\nu_A(x)], x\mapsto A(x)$, 即直觉模糊数 $\langle\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle$ 可以转化为区间值 $[\mu_A(x),1-\nu_A(x)]$.

下面根据隶属度 $\mu_A(x)$ 与非隶属度 $\nu_A(x)$ 的大小不同, 给出六种不同的情况. 以两个直觉模糊数进行分析, 设 $\tilde{m}=\langle\mu_m(x),\nu_m(x)\rangle$ 和 $\tilde{n}=\langle\mu_n(x),\nu_n(x)\rangle$ 为两个直觉模糊数, 根据两个直觉模糊数之间不同的位置关系, 会出现六种不同的情况 (见表 2).

表 2 两个直觉模糊数之间的位置关系

| 位置关系 | $p(\tilde{m}\cap\tilde{n})$ | $p(\tilde{m}\cup\tilde{n})$ |
|---|---|---|
| $\mu_m(x)\le 1-\nu_m(x)\le\mu_n(x)\le 1-\nu_n(x)$ | $0$ | $1-\nu_n(x)-\mu_n(x)+1-\nu_m(x)-\mu_m(x)$ |
| $\mu_m(x)\le\mu_n(x)\le 1-\nu_m(x)\le 1-\nu_n(x)$ | $1-\nu_m(x)-\mu_n(x)$ | $1-\nu_n(x)-\mu_m(x)$ |
| $\mu_m(x)\le\mu_n(x)\le 1-\nu_n(x)\le 1-\nu_m(x)$ | $1-\nu_n(x)-\mu_n(x)$ | $1-\nu_m(x)-\mu_m(x)$ |
| $\mu_n(x)\le 1-\nu_n(x)\le\mu_m(x)\le 1-\nu_m(x)$ | $0$ | $1-\nu_m(x)-\mu_m(x)+1-\nu_n(x)-\mu_n(x)$ |
| $\mu_n(x)\le\mu_m(x)\le 1-\nu_m(x)\le 1-\nu_n(x)$ | $1-\nu_m(x)-\mu_m(x)$ | $1-\nu_n(x)-\mu_n(x)$ |
| $\mu_n(x)\le\mu_m(x)\le 1-\nu_n(x)\le 1-\nu_m(x)$ | $1-\nu_n(x)-\mu_m(x)$ | $1-\nu_m(x)-\mu_n(x)$ |

设 $\tilde{m}=\langle\mu_m(x),\nu_m(x)\rangle$ 和 $\tilde{n}=\langle\mu_n(x),\nu_n(x)\rangle$ 为两个直觉模糊数, 则 $\tilde{m}$ 和 $\tilde{n}$ 之间的概率因子为

$$P\left(\tilde{m},\tilde{n}\right)=\frac{p\left(\tilde{m}\cap\tilde{n}\right)}{p\left(\tilde{m}\cup\tilde{n}\right)},$$

其中 $p(\tilde{m}\cap\tilde{n})$ 表示 $\tilde{m}\cap\tilde{n}$ 所占区间 $[0,1]$ 的比例, $p(\tilde{m}\cup\tilde{n})$ 表示 $\tilde{m}\cup\tilde{n}$ 所占区间 $[0,1]$ 的比例. 特别地, 如果 $p(\tilde{m}\cap\tilde{n})=0, p(\tilde{m}\cup\tilde{n})=0$, 则记 $P(\tilde{m},\tilde{n})=1$.

显然, 两个直觉模糊数的概率因子可推广到两个直觉模糊集上, 下面给出两个直觉模糊集之间概率因子的定义.

**定义 7** 设 $A$ 和 $B$ 是论域 $U$ 上的两个直觉模糊

集, 则 $A$ 和 $B$ 之间的概率因子定义为

$$P(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p(A_i\cap B_i)}{p(A_i\cup B_i)},$$

其中, $A_i$ 和 $B_i$ 分别表示直觉模糊集 $A$ 和 $B$ 中的第 $i$ 个元素, 即第 $i$ 个直觉模糊数. $p(A_i\cap B_i)$ 表示 $A_i\cap B_i$ 所占区间 $[0,1]$ 的比例, $p(A_i\cup B_i)$ 表示 $A_i\cup B_i$ 所占区间 $[0,1]$ 的比例. 特别地, 如果 $p(A_i\cap B_i)=0$, $p(A_i\cup B_i)=0$, 则记 $P(A,B)=1$.

**注 1** 由于直觉模糊数可以转化为区间数, 所以 $A_i$ 和 $B_i$ 可以转化为两个区间数, $A_i\cap B_i$ 和 $A_i\cup B_i$ 表示两个区间数进行交运算和并运算. 因此,“$A_i\cap B_i$ 所占区间 [0,1] 的比例”, 以及“$A_i\cup B_i$ 所占区间 [0,1] 的比例” 分别表示两个区间数进行交运算和并运算之后得到的新区间所占区间 [0,1] 的比例.

根据模糊因子、均值因子和概率因子, 我们定义相似度如下:

**定义 8** 设 $A$ 和 $B$ 是论域 $U$ 上的两个直觉模糊集, 定义 $S(A,B)$ 为

$$S(A,B)=\frac{1}{3}[\frac{F(A)\wedge F(B)}{F(A)\vee F(B)}+\frac{E(A)\wedge E(B)}{E(A)\vee E(B)}+P(A,B)].$$

下面证明 $S(A,B)$ 是一种相似度, 也即满足相似度的四条公理[26]:

(i) $0\le S(A,B)\le 1$;

(ii) 如果 $A=B$, 则有 $S(A,B)=1$;

(iii) $S(A,B)=S(B,A)$;

(iv) 如果 $A\subseteq B\subseteq C$, 则有 $S(A,B)\ge S(A,C)$ 和 $S(B,C)\ge S(A,C)$ 成立.

**定理 1** 设 $U$ 为论域, $A$ 和 $B$ 是论域 $U$ 上的两个直觉模糊集, 则 $S(A,B)$ 是直觉模糊集的相似度.

**证明** 为了证明 $S(A,B)$ 是相似度, 只需证明 $S(A,B)$ 满足上述 (i)(ii)(iii)(iv) 即可.

(i) 显然 $0\le S(A,B)\le 1$.

(ii) 如果 $A=B$, 有 $P(A,B)=1$, 则

$$\begin{aligned}S(A,B)&=\frac{1}{3}[\frac{F(A)\wedge F(B)}{F(A)\vee F(B)}+\frac{E(A)\wedge E(B)}{E(A)\vee E(B)}+\\&\quad P(A,B)]\\&=\frac{1}{3}[\frac{F(A)}{F(A)}+\frac{E(A)}{E(A)}+1]\\&=1.\end{aligned}$$

故 $S(A,B)=1$.

(iii) 由于 $\vee,\wedge$ 满足交换律, 且

$$\begin{aligned}P(A,B)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p(A_i\cap B_i)}{p(A_i\cup B_i)}\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p(B_i\cap A_i)}{p(B_i\cup A_i)}\\&=P(B,A).\end{aligned}$$

故 $S(A,B)=S(B,A)$.

(iv) 如果 $A\subseteq B\subseteq C$, 则有

$$0\le\mu_A(x_i)\le\mu_B(x_i)\le\mu_C(x_i)\le 1,$$
$$1\ge\nu_A(x_i)\ge\nu_B(x_i)\ge\nu_C(x_i)\ge 0,$$
$$i=1,2,\cdots,n.$$

1) 模糊因子

$$\begin{aligned}F(A)&=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(|\mu_A(x_i)-0|+|\nu_A(x_i)-1|)\\&=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)+1-\nu_A(x_i))\\&=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)+1)\\&\le\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_B(x_i)-\nu_B(x_i)+1)\\&=F(B).\end{aligned}$$

同理可得 $F(B)\le F(C)$, 故 $F(A)\le F(B)\le F(C)$.

2) 均值因子

$$\begin{aligned}E(A)&=\frac{1}{2n}|(\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)-\bar{\mu}_A)-(\sum_{i=1}^{n}\nu_A(x_i)-\bar{\nu}_A)|\\&=\frac{1}{2n}|(1-\frac{1}{n})(\mu_A(x_1)+\mu_A(x_2)+\cdots+\mu_A(x_n))-\\&\quad(1-\frac{1}{n})(\nu_A(x_1)+\nu_A(x_2)+\cdots+\nu_A(x_n))|\\&\le\frac{1}{2n}|(1-\frac{1}{n})(\mu_B(x_1)+\mu_B(x_2)+\cdots+\mu_B(x_n))-\\&\quad(1-\frac{1}{n})(\nu_B(x_1)+\nu_B(x_2)+\cdots+\nu_B(x_n))|\\&=E(B).\end{aligned}$$

同理可得 $E(B)\le E(C)$, 故 $E(A)\le E(B)\le E(C)$.

3) 概率因子

如果 $A\subseteq B\subseteq C$, 则 $P(A,B)$ 出现两种情况, 即表 2 中的第一种和第二种位置关系.

第一种情况 $P(A,B)=0$, 此时显然有 $S(A,B)\ge S(A,C)$ 和 $S(B,C)\ge S(A,C)$ 成立.

第二种情况

$$\begin{aligned}P(A,B)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\nu_A(x_i)-\mu_B(x_i)}{1-\nu_B(x_i)-\mu_A(x_i)}\\&\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1-\nu_A(x_i)-\mu_C(x_i)}{1-\nu_C(x_i)-\mu_A(x_i)}\\&=P(A,C)\end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned}S(A,B)&=\frac{1}{3}[\frac{F(A)\wedge F(B)}{F(A)\vee F(B)}+\frac{E(A)\wedge E(B)}{E(A)\vee E(B)}+\\&\quad P(A,B)]\\&=\frac{1}{3}[\frac{F(A)}{F(B)}+\frac{E(A)}{E(B)}+P(A,B)]\\&\geq\frac{1}{3}[\frac{F(A)}{F(C)}+\frac{E(A)}{E(C)}+P(A,C)]\\&=\frac{1}{3}[\frac{F(A)\wedge F(C)}{F(A)\vee F(C)}+\frac{E(A)\wedge E(C)}{E(A)\vee E(C)}+\\&\quad P(A,C)]\\&=S(A,C).\end{aligned}$$

即 $S(A,B)\geq S(A,C)$, 同理 $S(B,C)\geq S(A,C)$. 证明成立. □

**注 2** 当定义 8 中的 1/3 权值改为 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 时, 定理 1 仍成立. 即可以证明

$$\begin{aligned}S_\omega(A,B)=&\omega_1(\frac{F(A)\wedge F(B)}{F(A)\vee F(B)})+\omega_2(\frac{E(A)\wedge E(B)}{E(A)\vee E(B)})+\\&\omega_3(P(A,B)),\end{aligned}$$

也是直觉模糊集的相似度, 其中 $\omega_1+\omega_2+\omega_3=1$ 且 $0\leq\omega_1,\omega_2,\omega_3\leq 1$. 本文中, 我们认为模糊因子、均值因子和概率因子同等重要, 故取 $\omega_1=\omega_2=\omega_3=1/3$.

现在根据上面定义的相似度来建立直觉模糊信息系统上的三支决策模型.

**定义 9** 设 $\tilde{Q}=(U,AT,V,f)$ 是一个直觉模糊信息系统, $S: IF(U)\times IF(U)\to[0,1]$ 是相似度函数, 设 $0\leq\beta<\alpha\leq 1$, 对任意的 $\xi=\{\langle x,\mu_\xi(x),\nu_\xi(x)\rangle|x\in U\}\subseteq IF(U)$, 则 $\xi$ 的正域、负域和边界域定义为

$$\begin{cases}POS^\alpha(\xi)=\{x_i\in U\,|S(f(x_i),\xi)\geq\alpha\},\\NEG_\beta(\xi)=\{x_i\in U\,|S(f(x_i),\xi)\leq\beta\},\\BND_\beta^\alpha(\xi)=\{x_i\in U\,|\beta<S(f(x_i),\xi)<\alpha\}.\end{cases}$$

其中 $f(x_i)$ 表示对象 $x_i$ 在所有属性下的直觉模糊数的集合, 即 $f(x_i)=\{\langle\mu_{a_1}(x_i),\nu_{a_1}(x_i)\rangle,\cdots,\langle\mu_{a_j}(x_i),\nu_{a_j}(x_i)\rangle\}$.

而正域、负域和边界域三个集合两两互不相交且它们的并集为 $U$, 则称 $\Omega=(\tilde{Q},S,\alpha,\beta)$ 为直觉模糊信息系统上的三支决策模型.

**注 3** 直觉模糊信息系统上的三支决策模型是一般信息系统上三支决策模型的推广, 而后者又统一了各种双论域模型[18], 因此定义 9 中的新模型理论上统一了现有的双论域模型.

**注 4** 根据定义 9 可看出正域、负域和边界域受阈值 $\alpha$ 和 $\beta$ 的影响而变化. 具体地讲, 一方面, $\alpha$ 越大, 正域越小; 另一方面, $[0,1]$ 区间可被划分为许多小区间, 在每个小区间内, 正域是不变的. 这样正域就随 $\alpha$ 的变化形成了一种 "塔" 状结构, 称之为正域塔[27]. 此外, 显然阈值决定着三个区域, 我们将在下一节讨论阈值的求解.

## 3 阈值确定和模型求解

在本节中, 我们先定义加权信息熵这一度量, 然后提出模型求解的方法.

### 3.1 加权信息熵

根据相似度的值, 我们可基于一对阈值 $\alpha$ 和 $\beta$ 将对象集进行三划分, 而不同的阈值会得到不同的三划分. 实际问题中, 需要确定一组最优三划分来进行决策. 为了解决这个问题, 先介绍 Liang 等[28] 提出的一种知识划分的度量——信息熵.

**定义 10[28]** 令 $K=(U,R)$ 是近似空间, 其中 $U$ 是论域, $R=\{R_1,R_2,\cdots,R_n\}$ 是论域 $U$ 上的一个划分, 则信息熵定义为

$$E(R)=\sum_{i=1}^{n}\frac{|R_i|}{|U|}\frac{|U\backslash R_i|}{|U|}=\sum_{i=1}^{n}\frac{|R_i|}{|U|}\left(1-\frac{|R_i|}{|U|}\right),$$

其中 $\frac{|R_i|}{|U|}$ 表示 $R_i$ 在论域 $U$ 上的概率, $\frac{|U\backslash R_i|}{|U|}$ 表示 $R_i$ 的补集在论域 $U$ 上的概率.

在第三节提出的三支决策模型中, 如果相似度给定, 则 $U$ 中的每个对象都有对应的相似度的值. 也就是说, 在决策问题时, $U$ 中的每个对象都占有不同的权重, 当我们计算多组三划分的信息熵时, 应该考虑到每个对象所占权重的不同. 因此, 我们将文献 [28] 中的信息熵加以改进, 给出加权信息熵的概念.

**定义 11** 设 $S$ 是 $U$ 上的相似度量, 其中 $U$ 是非空有限集合, 称为论域, $R=\{R_1,R_2,\cdots R_n\}$ 是论域 $U$ 上的一个划分, 则 $R$ 上的加权信息熵定义为

$$\begin{aligned}E_\omega(R)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{x\in R_i}|S(x)|}{\sum_{x\in U}|S(x)|}\frac{\sum_{x\in U\backslash R_i}|S(x)|}{\sum_{x\in U}|S(x)|}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{x\in R_i}|S(x)|}{\sum_{x\in U}|S(x)|}\left(1-\frac{\sum_{x\in R_i}|S(x)|}{\sum_{x\in U}|S(x)|}\right).\end{aligned}$$

下面给出加权信息熵的一个重要性质.

设 $P$ 和 $Q$ 是 $U$ 上的两个划分, 如果有 $P\leq Q\Leftrightarrow\forall P_i\in P,\exists Q_j\in Q,\text{s.t. }P_i\subseteq Q_j$, 我们称划分 $Q$ 比划分 $P$ 粗糙 (或者划分 $P$ 比划分 $Q$ 精细), 记为 $P\leq Q$. 如果 $P\leq Q$ 且 $P\neq Q$, 则称划分 $Q$

比划分 $P$ 严格粗糙 (或者划分 $P$ 比划分 $Q$ 严格精细), 记为 $P < Q$. 另外, 我们也有 $P \le Q \Leftrightarrow \forall Q_i \in Q, \exists P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{ik} \in P$, s.t. $Q_i = \bigcup_{j=1}^{k} P_{ij}$.

**定理 2** 设 $P = \{P_1, P_2, \cdots, P_k\}$ 和 $Q = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_l\}$ 是论域 $U$ 上的两个划分, 如果 $P < Q$, 则有 $E_\omega(Q) < E_\omega(P)$.

**证明** 由于 $P < Q$, 则对每一个 $Q_i \in Q$, 存在 $P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{im_i} \in P$ 满足 $Q_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} P_{ij}$.

显然有 $\sum_{i=1}^{l} m_i = k$. 令

$$p_{ij} = \frac{\sum_{x \in P_{ij}} |S(x)|}{\sum_{x \in U} |S(x)|}, q_{ij} = \frac{\sum_{x \in P_{ij}} |S(x)|}{\sum_{x \in Q_i} |S(x)|},$$
$$p_i = \frac{\sum_{x \in Q_i} |S(x)|}{\sum_{x \in U} |S(x)|},$$

其中, $\forall i \in 1, 2, \cdots, l; j \in 1, 2, \cdots m_i$.

则有 $p_{ij} = p_i q_{ij}, \sum_{j=1}^{m_i} q_{ij} = 1$.

根据定义 11，我们有

$$\begin{aligned} E_\omega(P) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\sum_{x \in P_i} |S(x)|}{\sum_{x \in U} |S(x)|} \left(1 - \frac{\sum_{x \in P_i} |S(x)|}{\sum_{x \in U} |S(x)|}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=i}^{m} p_{ij}(1 - p_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=i}^{m} p_i q_{ij}(1 - p_i q_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m_i} q_{ij}\right) p_i(1 - p_i) + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m_i} p_i^2 q_{ij}(1 - q_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{l} p_i(1 - p_i) + \sum_{i=1}^{l} p_i^2 \sum_{j=1}^{m_i} q_{ij}(1 - q_{ij}) \\ &= E_\omega(Q) + \sum_{i=1}^{l} p_i^2 E_\omega(\{P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{im_i}\}). \end{aligned}$$

注意到 $E_\omega(\{P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{im_i}\})$ 是 $Q_i$ 的划分 $\{P_{i1}, P_{i2}, \cdots, P_{im_i}\}$ 的加权信息熵, 故 $E_\omega(Q) < E_\omega(P)$ 成立. 证明成立. □

**注 5** 由定理 2 可知, 划分越细, 加权信息熵值越大. 用粒计算的术语从粗糙集的观点来看, 知识粒 (划分) 越细, 知识的表达越精确. 因此在一族知识中, 加权信息熵值最大的知识是我们关注的对象.

### 3.2 基于加权信息熵的模型求解方法

本小节介绍一种计算阈值和最优三划分的方法. 此方法中, 用相似度函数将论域 $U$ 上的每一个元素都转换成区间 $[0, 1]$ 上的数值, 也即根据相似度函数先求出对象的满意度. 这些数值作为阈值可以将论域 $U$ 进行三划分, 即分为正域、负域和边界域三部分. 不同的阈值会导致不同的三划分, 我们需要用加权信息熵将得到的三划分进行度量, 从而得到一组最优的三划分. 根据定理 2, 我们寻找加权信息熵值最大的三划分.

为了便于叙述, 下面用 $W$ 表示加权信息熵, 即 $W \triangleq E_\omega(R)$. 令 $W_{i^*j^*} = \max\{W_{ij} \mid 0 \le j < i\}$, 其中 $W_{ij}$ 是阈值 $\alpha = \alpha_i, \beta = \beta_j$ 对应三划分的加权信息熵, 则最大的熵值 $W_{i^*j^*}$ 所对应的阈值 $\alpha = \alpha_{i^*}, \beta = \beta_{j^*}$ 及三划分就是所需要的. 下面列出算法的步骤.

**算法 1** 基于直觉模糊信息系统的计算阈值和最优三划分的方法.

输入：直觉模糊信息系统 $\tilde{Q} = (U, AT, V, f)$, 一个直觉模糊集 $\xi$.

输出：$\alpha, \beta, POS^\alpha(\xi), NEG_\beta(\xi), BND_\beta^\alpha(\xi)$.

step 1: 对每一个 $x_i \in U$, 计算出相似度 $S(f(x_i), \xi)$ 的值;

step 2: 将计算出 $S(f(x_i), \xi)$ 的不同值按升序排列; 令 $\{S(f(x_i), \xi) \mid i = 1, 2, \cdots, |U|\} = \{l_1, l_2, \cdots, l_m\}$, 其中 $l_1 < l_2 < \cdots < l_m$;

step 3: 如果 $m = i\ (i = 1, 2)$, 则 $\alpha = l_i, \beta = 0$, 则执行 step 5;

step 4: 如果 $m > 2$, 则 $i^*, j^* = \underset{i,j\ j<i-1}{\arg\max}\ W_{ij}, \alpha = l_{i^*}, \beta = l_{j^*}$;

step 5: 计算 $POS^\alpha(\xi), NEG_\beta(\xi), BND_\beta^\alpha(\xi)$;

step 6: 返回 $\alpha, \beta, POS^\alpha(\xi), NEG_\beta(\xi), BND_\beta^\alpha(\xi)$.

### 3.3 例子

下面用本文中提出的方法对采购空调的例子进行计算和分析. 购买空调时考虑如下 5 个属性: 价格合理 $a_1$, 质量好 $a_2$, 售后服务好 $a_3$, 噪音小 $a_4$, 耗电量低 $a_5$, 假设有 8 台空调 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 可供买家选择. 表 3 是关于这 8 台空调信息的一个直觉模糊信息系统. 这些数值可根据专家打分、空调参数、用户评价等途径产生. 例如 $f(x_5, a_1) = \langle 0.5, 0.4 \rangle$ 表示 50% 的评估专家认为空调的价格合理, 40% 的专家认为不合理, 而 10% 的专家没有作出评估. 如果一个买家想购买一台空调, 那么他所偏好的空调类型可用一个直觉模糊集来表示, 即 $\xi = \{\langle 0.8, 0.1 \rangle, \langle 0.9, 0 \rangle, \langle 0.7, 0.2 \rangle, \langle 0.7, 0.1 \rangle, \langle 0.6, 0.2 \rangle\}$. 作为一名空调销售, 给顾客推荐哪些空调呢?

**表 3 直觉模糊信息系统**

| $U\backslash AT$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\langle 0.3, 0.6\rangle$ | $\langle 0.2, 0.6\rangle$ | $\langle 0.4, 0.5\rangle$ | $\langle 0.1, 0.8\rangle$ | $\langle 0.3, 0.6\rangle$ |
| $x_2$ | $\langle 0.1, 0.2\rangle$ | $\langle 0.2, 0.6\rangle$ | $\langle 0.4, 0.3\rangle$ | $\langle 0.3, 0.6\rangle$ | $\langle 0.3, 0.5\rangle$ |
| $x_3$ | $\langle 0.5, 0.3\rangle$ | $\langle 0.6, 0.2\rangle$ | $\langle 0.4, 0.5\rangle$ | $\langle 0.6, 0.2\rangle$ | $\langle 0.7, 0.1\rangle$ |
| $x_4$ | $\langle 0.2, 0.7\rangle$ | $\langle 0.3, 0.5\rangle$ | $\langle 0.4, 0.5\rangle$ | $\langle 0.3, 0.6\rangle$ | $\langle 0.1, 0.8\rangle$ |
| $x_5$ | $\langle 0.5, 0.4\rangle$ | $\langle 0.6, 0.3\rangle$ | $\langle 0.7, 0.2\rangle$ | $\langle 0.6, 0.3\rangle$ | $\langle 0.7, 0.2\rangle$ |
| $x_6$ | $\langle 0.6, 0.3\rangle$ | $\langle 0.9, 0.1\rangle$ | $\langle 0.8, 0.1\rangle$ | $\langle 0.7, 0.2\rangle$ | $\langle 0.7, 0.1\rangle$ |
| $x_7$ | $\langle 0.1, 0.2\rangle$ | $\langle 0.3, 0.2\rangle$ | $\langle 0.2, 0.4\rangle$ | $\langle 0.4, 0.5\rangle$ | $\langle 0.3, 0.5\rangle$ |
| $x_8$ | $\langle 0.1, 0.3\rangle$ | $\langle 0.2, 0.5\rangle$ | $\langle 0.3, 0.3\rangle$ | $\langle 0.4, 0.6\rangle$ | $\langle 0.3, 0.5\rangle$ |

根据上小节的算法 1, 我们首先计算所有对象和 $\xi$ 的相似度 $S(f(x_i), \xi)$, 见表 4.

**表 4 相似度的值**

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S(f(x_i), \xi)$ | 0.3252 | 0.2655 | 0.4732 | 0.3252 | 0.5585 | 0.6942 | 0.2390 | 0.2655 |

根据我们的经验, 我们往往不会只推荐一台空调 (例如表 4 中的 $x_6$); 另一方面, 也不能无休止的按表 4 的排序推荐, 这样顾客会厌烦. 基于加权信息熵的三支决策方法为我们提供了一种解决方案, 即把对象集分为三部分: 哪些是要推荐的, 哪些是不要推荐的, 哪些是无法确定的 (或延迟推荐). 根据算法 1 计算出基于表 4 的各种三划分的加权信息熵 $E_\omega(R)$(见表 5). 显然表中最大的加权信息熵 $E_\omega(R) = 0.6540$, 而此时所对应的阈值为 $\alpha = 0.5585$ 和 $\beta = 0.2655$, 所对应的三划分为 $POS^\alpha(\xi) = \{x_6, x_5\}$, $NEG_\beta(\xi) = \{x_2, x_8, x_7\}$ 和 $BND^\alpha_\beta(\xi) = \{x_1, x_3, x_4\}$(见表 5). 因此 $x_6$ 和 $x_5$ 应该推荐给买家; 而空调 $x_2, x_8$ 和 $x_7$ 不应推荐; 至于空调 $x_1, x_3$ 和 $x_4$, 我们需要额外的信息才能作出决策或者延迟决策.

**表 5 阈值和三划分**

| $\alpha$ | $POS^\alpha(\xi)$ | $\beta$ | $NEG_\beta(\xi)$ | $E_\omega(R)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha = 0.6942$ | $\{x_6\}$ | $\beta = 0.5585$ | $\{x_5, x_3, x_1, x_4, x_2, x_8, x_7\}$ | 0.3439 |
| | | $\beta = 0.4732$ | $\{x_3, x_1, x_4, x_2, x_8, x_7\}$ | 0.5576 |
| | | $\beta = 0.3252$ | $\{x_1, x_4, x_2, x_8, x_7\}$ | 0.6400 |
| | | $\beta = 0.2655$ | $\{x_2, x_8, x_7\}$ | 0.6056 |
| | | $\beta = 0.2390$ | $\{x_7\}$ | 0.4508 |
| $\alpha = 0.5585$ | $\{x_6, x_5\}$ | $\beta = 0.4732$ | $\{x_3, x_1, x_4, x_2, x_8, x_7\}$ | 0.4793 |
| | | $\beta = 0.3252$ | $\{x_1, x_4, x_2, x_8, x_7\}$ | 0.6150 |
| | | $\beta = 0.2655$ | $\{x_2, x_8, x_7\}$ | $\boxed{0.6540}$ |
| | | $\beta = 0.2390$ | $\{x_7\}$ | 0.5591 |
| $\alpha = 0.4732$ | $\{x_6, x_5, x_3\}$ | $\beta = 0.3252$ | $\{x_1, x_4, x_2, x_8, x_7\}$ | 0.4953 |
| | | $\beta = 0.2655$ | $\{x_2, x_8, x_7\}$ | 0.5965 |
| | | $\beta = 0.2390$ | $\{x_7\}$ | 0.5523 |
| $\alpha = 0.3252$ | $\{x_6, x_5, x_3, x_1, x_4\}$ | $\beta = 0.2655$ | $\{x_2, x_8, x_7\}$ | 0.3697 |
| | | $\beta = 0.2390$ | $\{x_7\}$ | 0.3953 |
| $\alpha = 0.2655$ | $\{x_6, x_5, x_3, x_1, x_4, x_2, x_8\}$ | $\beta = 0.2390$ | $\{x_7\}$ | 0.1404 |

### 3.4 对比分析

下面将本文所提方法与传统方法, 即基于贝叶斯最小风险决策原理的阈值求解方法进行对比分析. 由决策粗糙集理论, 基于直觉模糊信息系统的三支决策模型由两个状态 $\{X, \neg X\}$ 和三个行动 $\{a_P, a_B, a_N\}$ 组成, 相关损失函数矩阵见表 6.

**表 6 不同状态下的直觉模糊损失函数矩阵**

| | $X$ | $\neg X$ |
|---|---|---|
| $a_P$ | $\tilde{\lambda}_{PP} = \langle \mu(\lambda_{PP}), \nu(\lambda_{PP})\rangle$ | $\tilde{\lambda}_{PN} = \langle \mu(\lambda_{PN}), \nu(\lambda_{PN})\rangle$ |
| $a_B$ | $\tilde{\lambda}_{BP} = \langle \mu(\lambda_{BP}), \nu(\lambda_{BP})\rangle$ | $\tilde{\lambda}_{BN} = \langle \mu(\lambda_{BN}), \nu(\lambda_{BN})\rangle$ |
| $a_N$ | $\tilde{\lambda}_{NP} = \langle \mu(\lambda_{NP}), \nu(\lambda_{NP})\rangle$ | $\tilde{\lambda}_{NN} = \langle \mu(\lambda_{NN}), \nu(\lambda_{NN})\rangle$ |

其中 $\tilde{\lambda}_{PP} < \tilde{\lambda}_{BP} < \tilde{\lambda}_{NP}, \tilde{\lambda}_{NN} < \tilde{\lambda}_{BN} < \tilde{\lambda}_{PN}$.

根据贝叶斯最小风险决策原理, 在考虑隶属度的情形下, 可以推导出以下三条规则 (非隶属度的情形可类似得到):

$(P)$ 如果 $P(X\,|[x]) \ge \alpha, P(X\,|[x]) \ge \gamma$, 则 $x \in POS(X)$;

$(B)$ 如果 $P(X\,|[x]) \le \alpha, P(X\,|[x]) \ge \beta$, 则 $x \in BND(X)$;

$(N)$ 如果 $P(X\,|[x]) \le \beta, P(X\,|[x]) \le \gamma$, 则 $x \in NEG(X)$.

其中

$$\alpha = \log \frac{1-\mu(\lambda_{BN})}{1-\mu(\lambda_{PN})} \Big/ \log\left(\frac{1-\mu(\lambda_{PP})}{1-\mu(\lambda_{BP})} \cdot \frac{1-\mu(\lambda_{BN})}{1-\mu(\lambda_{PN})}\right),$$
$$\beta = \log \frac{1-\mu(\lambda_{NN})}{1-\mu(\lambda_{BN})} \Big/ \log\left(\frac{1-\mu(\lambda_{BP})}{1-\mu(\lambda_{NP})} \cdot \frac{1-\mu(\lambda_{NN})}{1-\mu(\lambda_{BN})}\right),$$
$$\gamma = \log \frac{1-\mu(\lambda_{NN})}{1-\mu(\lambda_{PN})} \Big/ \log\left(\frac{1-\mu(\lambda_{PP})}{1-\mu(\lambda_{NP})} \cdot \frac{1-\mu(\lambda_{NN})}{1-\mu(\lambda_{PN})}\right).$$

由上面三条规则可知, 正域、负域和边界域取决于两个因素, 一是条件概率 $P(X\,|[x])$ 的定义, 二是损失函数 (阈值取决于损失函数). 文献 [29,30] 直接给定了条件概率值和损失函数的取值, 从而计算了三个区域. 文献 [31,32] 定义了 $[x]$, 从而可以客观计算条件概率值. 下面将文献 [31] 中计算三个区域的方法运用到本文的例子中, 计算结果如表 7 所示.

**表 7 传统方法不同参数下的三划分结果**

| $\alpha$ | $\beta$ | 参数 | $POS$ | $BND$ | $NEG$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.51 | 0.39 | $\tilde{\lambda}_{PP} = \langle 0.4, 0.5\rangle, \tilde{\lambda}_{PN} = \langle 0.6, 0.3\rangle$<br>$\tilde{\lambda}_{BP} = \langle 0.6, 0.3\rangle, \tilde{\lambda}_{BN} = \langle 0.5, 0.4\rangle$<br>$\tilde{\lambda}_{NP} = \langle 0.9, 0.1\rangle, \tilde{\lambda}_{NN} = \langle 0.3, 0.7\rangle$ | $\{x_1, x_3, x_4\}$ | $\{x_2, x_5, x_7, x_8\}$ | $\{x_6\}$ |
| 0.51 | 0.45 | $\tilde{\lambda}_{PP} = \langle 0.5, 0.4\rangle, \tilde{\lambda}_{PN} = \langle 0.6, 0.3\rangle$<br>$\tilde{\lambda}_{BP} = \langle 0.6, 0.3\rangle, \tilde{\lambda}_{BN} = \langle 0.5, 0.4\rangle$<br>$\tilde{\lambda}_{NP} = \langle 0.7, 0.2\rangle, \tilde{\lambda}_{NN} = \langle 0.3, 0.6\rangle$ | $\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ | $\emptyset$ | $\{x_2, x_7, x_8\}$ |
| 0.42 | 0.53 | $\tilde{\lambda}_{PP} = \langle 0.2, 0.4\rangle, \tilde{\lambda}_{PN} = \langle 0.8, 0.1\rangle$<br>$\tilde{\lambda}_{BP} = \langle 0.3, 0.3\rangle, \tilde{\lambda}_{BN} = \langle 0.7, 0.2\rangle$<br>$\tilde{\lambda}_{NP} = \langle 0.8, 0.2\rangle, \tilde{\lambda}_{NN} = \langle 0.6, 0.4\rangle$ | $\{x_5, x_6\}$ | $\{x_1, x_3, x_4\}$ | $\{x_2, x_7, x_8\}$ |

从表 7 中可以看出, 当参数为 $\tilde{\lambda}_{PP} = \langle 0.2, 0.4\rangle, \tilde{\lambda}_{PN} = \langle 0.8, 0.1\rangle, \tilde{\lambda}_{BP} = \langle 0.3, 0.3\rangle, \tilde{\lambda}_{BN} = \langle 0.7, 0.2\rangle, \tilde{\lambda}_{NP} = \langle 0.8, 0.2\rangle, \tilde{\lambda}_{NN} = \langle 0.6, 0.4\rangle$ 时, 划分结果和本文的一致, 但是如果参数改变, 结果也就改变. 也就是说, 用传统的基于贝叶斯最小风险决策原理给出阈值求解方法的缺点是需要人为给定多个参数, 主观性强且参数选择缺乏解释. 而本文提出的基于最大加权信息熵的阈值求解方法, 一方面不需要确定参数, 另一方面也可以看作是对某种选择做出了客观解释.

## 4 总结

本文将直觉模糊集与三支决策理论结合起来, 提出了直觉模糊信息系统上的三支决策模型. 一方面, 我们提出的新模型理论上统一了各种双论域模型. 另一方面, 文中提出了一种相对客观的阈值求解方法. 即先利用评价函数给论域中的对象排序, 然后用加权信息熵去度量三划分从而选出最优结果. 新方法中涉及两个关键要素：一是评价函数; 二是划分测度. 对于评价函数而言, 可以是相似度函数、包含度函数等, 这取决于具体问题. 但一般来说, 由具体问题构造的评价函数具有一定的可解释性 (例如, 文献 [18] 中构造了一种一般信息表上三支决策模型的评价函数). 至于划分测度, 本文采用了新定义的加权熵. 熵是用来度量系统无序程度的量. 如今熵被广泛用于不确定性的度量. 考虑到对象的评价值不同, 本文改进了 Liang 等[28] 提出的知识划分测度——信息熵, 从而提出了加权信息熵, 并证明了知识划分越细, 加权信息熵越大. 虽然评价函数和划分测度的设定也具有主观性, 但对具体问题而构造的评价函数和划分测度往往具有较合理的解释. 因此相比传统基于贝叶斯最小风险决策原理的阈值求解方法中诸多参数的随机选取, 本文为三支决策理论提供了一种相对客观的阈值求解方法.

## 参考文献 (References)

[1] Yao Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets[J]. Information Sciences, 2010, 180: 341–353.

[2] Yao Y Y. An outline of a theory of three-way decisions[C]. In: Yao J. et al. (Eds.), RSCTC 2012, LNAI,7413.Springer, Berlin, Heidelberg, 2012: 1-17.

[3] Yao Y Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models[J]. Information Sciences, 2011, 181(6): 1080-1096.

[4] 李小南, 祁建军, 孙秉珍, 等. 三支决策理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
(Li X N, Qi J J, Sun B Z, et al. Three-way decision theory and approaches[M]. Beijing: Science Press, 2019.)

[5] Hu M J, Yao Y Y. Structured approximations as a basis for three-way decisions in rough set theory[J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 165: 92-109.

[6] Jiao L, Yang H L, Li S G. Three-way decision based on decision-theoretic rough sets with single-valued neutrosophic information[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11: 657-665.
[7] 胡峰, 张苗, 于洪. 基于三支决策的主动学习方法 [J]. 控制与决策, 2019, 34(04): 718-726.
(Hu F, Zhang M, Yu H. An active learning method based on three-way decision model[J]. Control and Decision, 2019, 34(04): 718-726. )
[8] Yao Y Y. Three-way conflict analysis: Reformulations and extensions of the Pawlak model[J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 180: 26-37.
[9] Li X N, Wang X, Lang G M, et al. Conflict analysis based on three-way decision for triangular fuzzy information systems[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2021, 132: 88-106.
[10] Yu H, Wang X C, Wang G Y, et al. An active three-way clustering method via low-rank matrices for multi-viewdata[J]. Information Sciences, 2020, 507: 823-839.
[11] 李美争, 王国胤. 三支近似概念格中基于对象 - 概念辨识矩阵的属性约简方法 [J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1779-1784.
(Li M Z, Wang G Y. Object-concept discernibility matrix based approach to attribute reduction in three-way approximate concept lattice[J]. Control and Decision, 2016, 31(10): 1779-1784. )
[12] Wong S K, Wang L S, Yao Y Y. Interval Structure: A Framework for Representing Uncertain Information[C]. UAI ’92: Proceedings of the Eighth Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Stanford: Stanford University, 1992: 336-343.
[13] Yan R X, Zheng J , Liu J , et al. Research on the model of rough set over dual-universes[J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23(8): 817-822.
[14] Liu C H, Miao D Q, Zhang N. Graded rough set model based on two universes and its properties[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 33(3): 65-72.
[15] Sun B Z, Ma W M, Chen X T, et al. Multigranulation vague rough set over two universes and its application to group decision making[J]. Soft Computing, 2018, 23: 8927-8956.
[16] Shakiba A, Hooshmandasl M R. S-approximation Spaces: A Three-way Decision Approach[J]. Fundamenta Informaticae, 2015, 139(3): 307-328.
[17] Li X N, Sun Q Q, Chen H M, et al. Three-way decision on two universes[J]. Information Sciences, 2020, 515: 263-279.
[18] Li X N, Wang X, Sun B Z, et al. Three-way decision on information tables[J]. Information Sciences, 2021, 545: 25-43.
[19] Atanassov K T . Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.
[20] Li T J, Zhang W X. Rough fuzzy approximations on two universes of discourse[J]. Information Sciences, 2008, 178(3): 892-906.
[21] Yang H L, Liao X W, Wang S Y, et al. Fuzzy probabilistic rough set model on two universes and its applications[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(9): 1410-1420.
[22] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. International Journal of General Systems, 2006, 35(4): 417-433.
[23] Zhang X X, Chen D G, Tsang E C C. Generalized dominance rough set models for the dominance intuitionistic fuzzy information systems[J]. Information Sciences, 2017, 378: 1-25.
[24] Pawlak Z. An inquiry into anatomy of conflicts[J]. Information Sciences, 1998, 109: 65–78.
[25] Wang G J, Li X P. The applications of interval-valued fuzzy numbers and interval-distribution numbers[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 98(3): 331-335.
[26] Boran F E, Akay D. A biparametric similarity measure on intuitionistic fuzzy sets with applications to pattern recognition[J]. Information Sciences, 2014, 255: 45-57.
[27] Li X N. Three-way fuzzy matroids and granular computing[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2019, 114: 44–50.
[28] Liang J Y, Chin K S, Dang C Y, et al. A new method for measuring uncertainty and fuzziness in rough set theory[J]. International Journal of General Systems, 2002, 31(4): 331-342.
[29] Liang D C, Liu D. Deriving three-way decisions from intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets[J]. Information Sciences, 2015, 300: 28-48.
[30] Liang D C, Xu Z S, Liu D. Three-way decisions with intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets based on point operators[J]. Information Sciences, 2017, 375: 183-201.
[31] 刘久兵. 三支直觉模糊决策方法及在人机任务分配中的应用研究 [D]. 南京: 南京大学工程管理学院, 2019: 28-44.
(Liu J B. Research on three-way intuitionistic fuzzy decision making methods and its application in man-machine task assignment[D]. Nanjing: School of Management and Engineering, Nanjing University, 2019: 28-44.)
[32] Liang M S, Mi J S, Feng T. Optimal granulation selection for similarity measure-based multigranulation intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2019, 36: 2495-2509.

## 作者简介

李小南 (1981−), 男, 教授, 博士生导师, 从事模糊集、粗糙集与三支决策等研究, E-mail: lxn2007@163.com;

赵璐 (1998−), 女, 硕士生, 从事模糊集、粗糙集、三支决策等研究, E-mail: 13383733602@163.com;

易黄建 (1985−), 女, 副教授, 博士, 从事图像处理与机器学习等研究, E-mail: yhj255@163.com.