

约束非线性车辆队列分布式多目标模型预测控制

陈 龙, 何德峰[†], 李 壮

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

摘 要: 针对具有状态与控制约束的非线性车辆队列系统多目标控制问题, 提出了一种分布式多目标模型预测控制 (Model Predictive Control, MPC) 策略. 基于前车-后车单向通信拓扑, 建立了网联车辆队列非线性纵向巡航模型. 应用字典序算法描述分布式多目标 MPC 问题. 进一步, 通过设计弦稳定与收缩约束, 并结合 MPC 三要素条件, 保证了车辆队列在经济性能与协同性能最优条件下的稳定性与弦稳定性结果. 最后, 典型工况的仿真结果验证了本文策略的有效性.

关键词: 非线性车辆队列; 分布式模型预测控制; 稳定性; 弦稳定性; 性能优化

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0510

Distributed Multi-Objective Model Predictive Control for Constrained Nonlinear Vehicle Platoons

CHEN Long, HE De-feng[†], LI Zhuang

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: This paper presents a distributed multi-objective model predictive control (MPC) strategy for multi-objective control problems of nonlinear vehicle platoon systems subject to state and control constraints. Based on the predecessor-follower communication topology, the nonlinear longitudinal cruise control models of connected vehicle platoons are established. The lexicographic method is applied to formulate the distributed multi-objective optimization problem. Moreover, together with the triple elements of MPC, the constraints on string stability and contractive are designed to guarantee stability and string stability in the context of optimality of economic performance and coordination performance of the vehicle platoon. Finally, simulation results of typical conditions illustrate the effectiveness of the proposed scheme.

Keywords: nonlinear vehicle platoons; distributed model predictive control; stability; string stability; performance optimization

0 引 言

随着汽车保有量的快速增加, 交通和能源问题日益严峻, 车辆队列近年来得到了广泛关注^[1-5]. 通过车辆间信息交互, 车辆队列协调完成编队同时以保持前后车安全间距以避免碰撞, 有效提高了道路通行效率和行车安全性, 并通过减小气动阻力提高了车辆行使经济性^[6-7].

车辆队列具有非线性动态特性和各种约束, 传统控制策略难以实现车队经济高效控制. 分布式模型预测控制 (MPC) 技术能显式处理约束与各子系统之间存在的非线性耦合问题, 在车辆队列控制中广泛应用. 例如, 文献 [8] 采用分布式 MPC 解决线性队列系统的控制一致性问题; 文献 [9] 采用轨迹优化

原理设计分布式 MPC 算法, 实现了线性队列多目标控制; 文献 [10] 对包含动力学耦合代价函数约束的非线性车辆队列系统, 提出了解耦型分布式 MPC 策略; 文献 [11] 考虑车辆间通信时延和扰动工况, 提出了一种分布式 MPC 策略; 文献 [12] 考虑连续时间非线性车辆队列系统, 设计了包含鲁棒约束的分布式 MPC 控制策略, 建立了鲁棒稳定性充分条件; 文献 [13] 考虑时变安全车距工况, 建立了车辆系统时变安全车距下的稳定性结果. 上述研究侧重车辆队列稳定性, 但车辆行驶过程消耗能源, 出于经济性与环保性的考虑, 需充分考虑车队的燃油经济性控制目标.

研究表明, 车辆队列的稳定性、弦稳定性与经济性等控制目标存在冲突特性^[8], 且各目标之间具

收稿日期: 2021-03-28; 修回日期: 2021-07-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61773345); 浙江省高校基本科研业务费项目 (RF-C2020003).

[†]通讯作者. E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn.

有相对重要性, 常规 MPC 难以显式实现车队多目标控制需求. 多目标 MPC 算法是将多目标优化原理和 MPC 技术相结合产生的算法, 是处理冲突多目标控制问题的一种有效方法, 如文献 [14] 将车辆经济、安全和稳定目标函数加权作为目标函数, 求解多目标加权 MPC 控制律; 文献 [15] 提出了基于理想点逼近的多目标 MPC 策略; 对有明显优先级排序的多目标控制问题, 文献 [16] 采用字典序 MPC 技术建立非线性闭环系统稳定性的充分条件. 字典序 MPC 将多个子目标按照优先级顺序从高到低排列, 依次极小化各目标函数, 并通过上层最优解构造字典序约束, 保证优先实现更重要目标控制^[17-18].

本文考虑含状态与控制约束的非线性车辆队列系统多目标控制问题, 应用 MPC 三要素条件与字典序法^[19], 并结合车辆队形约束条件, 建立保证车队系统渐近稳定性和弦稳定性的充分条件, 同时优化车队经济性能与协同性能. 相比现有车辆队列系统控制方法, 主要创新点包括: 考虑车辆队列的冲突多目标控制问题, 在保证稳定性与弦稳定性的同时优化车队经济性能与协同性能; 采用字典序方法处理多目标问题, 相比于多目标加权控制器设计过程, 简化冲突多目标 MPC 控制器的设计. 最后通过典型工况下的数值仿真实验, 对比验证了本文策略的有效性.

符号说明: 符号 x^T 表示向量 x 的转置, 矩阵加权范数 $\|x\|_P = x^T P x$, 其中 P 为对称正定矩阵; $x(i|k)$ 表示在 k 时刻对未来第 $k+i$ 时刻的预测量. 连续函数 $\alpha(\bullet) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 系 K 类函数, 当且仅当 $\alpha(\bullet)$ 严格递增且 $\alpha(0) = 0$; K 类函数 $\alpha(\bullet)$ 系 K_∞ 类函数, 当且仅当 $\alpha(\infty) = \infty$.

1 问题描述

考虑含 n 辆车的直线行驶车队, p_1 为头车, p_n 为尾车. 初始时刻所有车辆接收参考速度 v_0 和参考轨迹 s_0 . 随后, 头车 p_1 跟踪参考轨迹, 后车 $p_i, i=2, \dots, n$ 跟随前车 p_{i-1} , 并与 p_{i-1} 的期望安全间距为 $d_i \geq 0$. 借助车联网, 每辆车可接收前车行驶信息. 假设车辆通信网络性能良好, 无网络时延和丢包.

在 k 时刻, 车辆 i 的位置与速度分别为 $s_i(k)$ 与 $v_i(k)$, 则该车的位置和速度误差分别为 $e_{p,i}(k) = s_0(k) - s_i(k) - (i-1)d_i$ 和 $e_{v,i}(k) = v_i(k) - v_0$, 由此定义车辆 i 的纵向巡航偏差模型^[20]:

$$\begin{cases} e_{p,i}(k+1) = e_{p,i}(k) + e_{v,i}(k)\Delta t \\ e_{v,i}(k+1) = e_{v,i}(k) + \frac{\Delta t}{m_i} \left(\frac{\eta_{T,i}}{r_i} u_i(k) - \phi_i \right) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\phi_i = C_{A,i} e_{v,i}^2(k) + m_i g \mu_i$, Δt 为采样间隔, m_i 为质量, $C_{A,i}$ 为气动阻力系数, g 为重力加速度, μ_i 为滚

动阻力系数, r_i 为轮胎半径, $\eta_{T,i}$ 为机械效率, u_i 为转矩. 假设车队行驶在平坦的道路上.

令车辆 i 的状态向量 $x_i = [e_{p,i}, e_{v,i}]^T$ 和控制输入为转矩 u_i . 状态变量和控制输入满足约束

$$u_{i,\min} \leq u_i \leq u_{i,\max}, x_{i,\min} \leq x_i \leq x_{i,\max} \quad (2)$$

其中 $u_{i,\min}$ 和 $x_{i,\min}$ 分别表示控制量和状态量的下界, $u_{i,\max}$ 和 $x_{i,\max}$ 分别表示控制量和状态量的上界. 为保证车辆在紧急刹车时的性能, 通常 $|u_{i,\max}| \leq |u_{i,\min}|$. 为了方便起见, 将方程 (1) 简写为

$$x_i(k+1) = f_i(x_i(k), u_i(k)) \quad (3)$$

其中,

$$f_i(x_i, u_i) = \begin{bmatrix} x_{i,1} + x_{i,2} \Delta t \\ x_{i,2} + \frac{\Delta t}{m_i} \left(\frac{\eta_{T,i}}{r_i} u_i - \phi_i(x_{i,2}) \right) \end{bmatrix}$$

$x_{i,1}$ 和 $x_{i,2}$ 分别为 x_i 的第一和第二个分量; 将 (2) 简写为 $u_i \in U_i, x_i \in X_i$, 其中 U_i 和 X_i 分别为包含控制约束与状态约束的紧集.

车辆队列的通信拓扑关系采用有向图 $G = \{V, E, A\}$ 描述, 其中 $V = \{1, \dots, n\}$ 表示点集, $E \subseteq V \times V$ 表示边缘集, $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ 表示邻接矩阵; 若对任意 $(i, j) \in E, i \neq j, a_{ij} = 1$, 表示从 j 到 i 的有向边缘, 即车辆 i 可以直接接受到车辆 j 所传递的信息; 若 $(i, j) \notin E, a_{ij} = 0$ 表示车辆 i 和 j 间不存在通信关系. 定义存在直接有向路径到车辆 i 的车辆集合为 V_i , 并令 $|V_i|$ 表示集合 V_i 中车辆数目.

定义 1 当参考速度 v_0 发生阶跃变化后, 车辆队列系统 (3) 关于原点是渐近稳定的, 则称该车辆队列系统具有内部稳定性^[21].

定义 2 当参考速度 v_0 发生阶跃变化后, 车辆队列系统 (3) 存在 $0 < \rho_i < 1$ 使得车辆 $i = 2, \dots, n$ 的位置误差满足

$$\max_{k \geq 0} |e_{p,i}(k)| \leq \rho_i \max_{k \geq 0} |e_{p,i-1}(k)| \quad (4)$$

则称该车辆队列具有弦稳定性^[21].

车辆队列内部稳定性衡量了车辆的跟踪性能, 弦稳定性衡量了队列整体对参考速度扰动的鲁棒抑制性能. 本文目标是针对非线性车辆队列系统 (3), 同步优化车辆经济性能和车队协同性能, 使得车辆队列在满足系统约束的前提下, 保证队列内部稳定性和弦稳定性, 减少车辆行驶油耗, 提高道路通行效率. 本文采用分布式多目标 MPC 策略实现该控制目标.

2 算法设计

考虑当前时刻 k 和预测时域 $N > 0$, 在预测时域 $[k, k+N-1]$ 内, 定义车辆 i 轨迹: 1) $x_i(k)$ 为 k 时刻实际轨迹; 2) $x_i^*(k)$ 为 k 时刻最优轨迹; 3) $x_i^a(k)$

为 k 时刻假设轨迹, 由车辆 i 在 $k-1$ 时刻最优轨迹构造, 将传递给 V_i 中的车, 具体方法见后文. 考虑该车辆在 k 时刻状态 $x_i(0|k)$, 可行预测控制序列为 $\mathbf{u}_i(k) = \{u_i(0|k), \dots, u_i(N-1|k)\}$, 对应的预测状态响应序列为 $\mathbf{x}_i(k) = \{x_i(1|k), \dots, x_i(N|k)\}$. 分别定义车辆 i 的协同性、经济性和稳定性目标函数如下:

$$J_{i,c} = \sum_{t=0}^{N-1} L_{i,c}(x_i(t|k), x_j^a(t|k)), j \in V_i \quad (5)$$

$$J_{i,e} = \sum_{t=0}^{N-1} L_{i,e}(x_i(t|k), u_i(t|k)) \quad (6)$$

$$J_{i,a} = \sum_{t=0}^{N-1} L_{i,a}(x_i(t|k), u_i(t|k)) + E_{i,a}(x_i(N|k)) \quad (7)$$

其中, 协同性能函数

$$L_{i,c}(x_i) = \frac{1}{|V_i|} \sum_{j \in V_i} \|x_i(t|k) - x_j^a(t|k)\|_{C_i}$$

表示车辆 i 与其邻居车辆假设轨迹之间偏差, 能够体现车队行车空间, 用以衡量车队协同性能, 矩阵 C_i 为对称正定矩阵, 经济性能函数

$$L_{i,e}(k) = \sum_{j=0}^3 b_j v_i^j(k) + \sum_{l=0}^2 \hat{a}_i(k) c_l v_i^l(k)$$

表示车辆 i 每时刻油耗, 其中

$$\hat{a}_i(k) = -\frac{1}{2m_i} C_{A,i} v_i^2(k) - \mu_i g + \frac{u_i(k)}{m_i}$$

当 $u_i(k) < 0$ 时, 高速状态下减速或刹车的情况将视为不存在燃油损耗, 式中 b_j 和 c_l 均为参数, 稳定性目标函数中 $E_{i,a}(x_i) = x_i^T P_i x_i$ 为终端代价函数, $L_{i,a}(x_i, u_i) = x_i^T Q_i x_i + u_i^T R_i u_i$, 矩阵 Q_i 、 R_i 和 P_i 均为正定对称矩阵.

定义 $|x_{i,1}(t|k)|_{\infty,l} = \max |x_{i,1}(t|k)|, t = 0, \dots, l$. 考虑车辆 i 的协同性能函数 (5), 设计如下有限时域最优控制问题:

$$\mathbf{u}_i^{*,1}(k) = \arg \min_{\mathbf{u}_i(k)} J_{i,c}(\mathbf{u}_i(k)) \quad (8a)$$

$$\text{s.t. } x_i(t+1|k) = f_i(x_i(t|k), u_i(t|k)) \quad (8b)$$

$$(x_i(t|k), u_i(t|k)) \in X_i \times U_i, t \in [0, N-1] \quad (8c)$$

$$x_i(0|k) = x_i(k), x_i(N|k) \in X_{i,T} \quad (8d)$$

$$|x_{i,1}(t|k)|_{\infty,1} \leq \rho_i \max_{l=0,\dots,k} |x_{i-1,1}(t|l)|_{\infty,1} \quad (8e)$$

$$J_{i,a}(x_i(k), u_i(k)) \leq \eta_i(x_i(k), \lambda_i) \quad (8f)$$

其中 $\mathbf{u}_i^{*,1}(k)$ 表示优化问题 (8) 的最优解, (8b) 和 (8c) 分别为系统约束、状态变量与控制输入约束, $x_i(0|k) = x_i(k)$ 是初始条件, $x_i(N|k) \in X_{i,T}$ 为终端约束条件, $X_{i,T}$ 为车辆 i 终端集, (8e) 为弦稳定约

束 (4) 成立的充分条件^[21], (8f) 为收缩约束.

考虑车辆 i 经济性能函数 (6), 并结合优化问题 (8) 求得的最优解 $\mathbf{u}_i^{*,1}(k)$, 构造如下优化问题:

$$\mathbf{u}_i^*(k) = \arg \min_{\mathbf{u}_i(k)} J_{i,e}(\mathbf{u}_i(k)) \quad (9a)$$

$$\text{s.t. } x_i(t+1|k) = f_i(x_i(t|k), u_i(t|k)) \quad (9b)$$

$$(x_i(t|k), u_i(t|k)) \in X_i \times U_i, t \in [0, N-1] \quad (9c)$$

$$x_i(0|k) = x_i(k), x_i(N|k) \in X_{i,T} \quad (9d)$$

$$|x_{i,1}(t|k)|_{\infty,1} \leq \rho_i \max_{l=0,\dots,k} |x_{i-1,1}(t|l)|_{\infty,1} \quad (9e)$$

$$J_{i,a}(x_i(k), u_i(k)) \leq \eta_i(x_i(k), \lambda_i) \quad (9f)$$

$$J_{i,c}(\mathbf{u}_i(k)) \leq J_{i,c}(\mathbf{u}_i^{*,1}(k)) + \sigma_i(k) \quad (9g)$$

其中, $\sigma_i(k)$ 为常数且满足 $\sigma_i(k) \geq 0$.

注 1 优化问题 (8) 与 (9) 具有先后求解关系, 两者通过字典序约束 (9g) 关联. 因此, 求解优化问题 (9) 时, 通过约束 (9g) 可使问题 (9) 的最优解 $\mathbf{u}_i^*$ 不会使问题 (8) 的性能变差. 此外, 为提高计算效率, 通常 $\sigma_i(k)$ 取为小的非负常数.

如果优化问题 (8) 和 (9) 在 k 时刻均是可行的, 则根据 MPC 原理, 定义队列多目标预测控制器

$$u_i(k) = u_i^{\text{mpc}}(k) = u_i^*(0|k) \quad (10)$$

其中, $u_i^*(0|k)$ 是优化问题 (9) 在 k 时刻最优解 $\mathbf{u}_i^*(k)$ 的第一个分量. 对应的队列闭环系统为

$$x_i(k+1) = f_i(x_i(k), u_i^{\text{mpc}}(k)) \quad (11)$$

该控制器运算步骤归纳如下:

算法 1 (分布式多目标 MPC 算法)

step 1. 初始化 ($k = 0$):

1) 每辆车接收参考速度 v_0 , 令 $\eta_i(\bullet)$ 为无穷大;

2) 车辆 p_1 求解优化问题 (8), 求解时不考虑弦稳定约束 (8e), 得到最优解 $\mathbf{u}_1^{*,1}(k)$, 构造约束 (9g). 接着求解优化问题 (9), 求解时不考虑弦稳定约束 (9e), 得到最优控制律 $\mathbf{u}_1^*(k)$ 与最优状态 $x_1^*(k)$, 将 $x_{1,1}^*(k)$ 传递给其余后车, 并将最优控制律第一项作用于系统, 更新系统状态;

3) 对于车辆 $p_i, i = 2, \dots, n$ 接收状态 $x_{1,1}^*(k)$, 求解优化问题 (8), 求解时用约束

$$(1 - \xi_i) \gamma_i |x_{1,1}^*(t|k)| \leq |x_{i,1}(t|k)| \leq (1 + \xi_i) \gamma_i |x_{1,1}^*(t|k)| \quad (12)$$

代替弦稳定约束 (8e), 其中参数 $0 < \xi_i, \gamma_i < 1$, 得到最优解 $\mathbf{u}_i^{*,1}(k)$, 构造约束 (9g). 接着求解优化问题 (9), 求解时同样用 (12) 代替弦稳定约束 (9e), 得到最优控制律 $\mathbf{u}_i^*(k)$ 与最优状态, 将预测控制律作用于系统更新状态, 并用生成假设轨迹传递给后车;

4) 令 $k = k + 1$.

step 2. 迭代 ($k > 0$):

1) 车辆 i 接收前车的假设信息, 并根据上一时刻的最优控制律 $\mathbf{u}_i^*(k-1)$ 构造收缩约束 (8f) 和 (9f);

2) 车辆 i 求解优化问题 (8), 求解时系统增加额外约束条件: 对头车有

$$\begin{aligned} |x_{1,1}(t|k) - x_{1,1}^a(t|k)|_{\infty,N} \leq \\ \varepsilon_{1,k} |x_{1,1}(t|k)|_{\infty,1} \end{aligned} \quad (13)$$

对 $i = 2, \dots, n-1$ 车有

$$\begin{aligned} |x_{i,1}(t|k) - x_{i,1}^a(t|k)|_{\infty,N} \leq \varepsilon_{i,k} \min\{ \\ |x_{i,1}(t|k)|_{\infty,1}, |x_{i-1,1}^a(t|k)|_{\infty,1} \} \end{aligned} \quad (14)$$

对 $i = n$ 车, 用 $\varepsilon_{n,k} |x_{n-1,1}^a(t|k)|_{\infty,1}$ 代替 (14) 的右边. 得到最优解 $\mathbf{u}_i^{*,1}(k)$, 构造约束 (9g). 接着求解优化问题 (9), 求解时同样增加额外约束 (13) 和 (14), 得到最优控制律 $\mathbf{u}_i^*(k)$ 与最优状态, 将预测控制律作用于系统更新状态, 并用最优状态生成假设轨迹传给后车;

3) 令 $k = k+1$, 返回 1).

假设 1 在终端集 $X_{i,T}$ 内存在局部控制律 $u_i = \pi_i(x_i)$, 满足 $\pi_i(x_i) \subseteq U_i$ 和 $E_{i,a}(f_i(x_i, \pi_i(x_i))) - E_{i,a}(x_i) \leq -L_{i,a}(x_i, \pi_i(x_i))$.

假设 2 连续函数 $L_{i,a}(x_i, u_i)$ 和 $E_{i,a}(x_i)$ 分别是 $(x_{i,s}, u_{i,s})$ 和 $x_{i,s}$ 的正定函数, 并存在 K_∞ 类函数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 α_4 , 满足

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x_i\|) \leq L_{i,a}(x_i, u_i) \leq \alpha_2(\|x_i\|) \\ \alpha_3(\|x_i\|) \leq E_{i,a}(x_i) \leq \alpha_4(\|x_i\|) \end{aligned}$$

注 2 假设 1 为传统 MPC 中证明稳定性常用的三要素 $(E_i, X_{i,T}, \pi_i)$. 若 $X_{i,T}$ 定义为 $E_{i,a}$ 的水平集, 则由假设 1 可得 $X_{i,T}$ 是闭环系统 $x_i(k+1) = f_i(x_i, \pi_i(x_i))$ 的一个不变集. 考虑闭环系统 (11) 在 k 时刻状态初始值 $x_i(0|k) = x_i(k)$ 及 $x_i(t|k) \in X_i$, 若系统 (3) 存在可行控制序列 $\mathbf{u}_i(k)$, 则 $x_i(0)$ 称为可行初始状态. 全体可行初始状态的集合 X_N 称为系统 (3) 的可行初始集. 显然有 $X_{i,T} \subseteq X_{i,N} \subseteq X_i$, 且 $X_{i,N} \subseteq X_{i,N+1}$.

假设 $k-1$ 时刻问题 (9) 的最优解为 $\mathbf{u}_i^*(k-1)$, 则利用该最优解, 可构造 k 时刻的一个控制序列

$$\hat{\mathbf{u}}_i(k) = \{u_i^*(1|k-1), \dots, u_i^*(N-1|k-1), \pi_i(x_i^*(N|k-1))\} \quad (15)$$

则定义收缩约束 (8f) 和 (9f)

$$\begin{aligned} \eta_i(x_i(k), \lambda_i) = J_{i,a}(\hat{\mathbf{u}}_i(k)) + \\ \lambda_i[J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k-1)) - J_{i,a}(\hat{\mathbf{u}}_i(k))] \end{aligned} \quad (16)$$

其中, 系数 $0 \leq \lambda_i < 1$, (15) 对应的状态序列即为 i 车假设轨迹.

3 稳定性与弦稳定性

由文献 [21] 可知, 约束 (14) 表明车辆 $i = 2, \dots, n$ 初始位置误差满足 $|x_{i,1}^*(t|0)| \leq \alpha_i |x_{i-1,1}^*(t|0)|$, 其中 $\alpha_2 = (1 + \xi_2)\gamma_2, \alpha_i = (1 + \xi_i)/(1 - \gamma_{i-1})\gamma_i/\gamma_{i-1}, i =$

$3, \dots, n$, 约束 (13) 和 (14) 中参数 $\varepsilon_{i,k}$ 满足 $\varepsilon_{i,k} = \varepsilon^k$, 则满足 (13) 和 (14) 即满足弦稳定约束 (8e) 和 (9e).

定理 1 若假设 1 和 2 成立, 且系数满足

$$\alpha_i + \alpha_i \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{i-1,k} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{i,k} (1 + \varepsilon_{i-1,k}) < 1 \quad (17)$$

则控制器 (10) 在可行初始集 $X_{i,N}$ 内满足递推可行性, 进而 $X_{i,N}$ 是闭环系统 (11) 的一个不变集.

证明 假设在 $k-1$ 时刻优化问题 (8) 可行, 令最优解为 $\mathbf{u}_i^{*,1}(k-1)$, 将其代入优化问题 (9), 显然 $\mathbf{u}_i^{*,1}(k-1)$ 满足约束 (9b)-(9f). 由于 $\sigma_i(k-1) \geq 0$, 故有 $J_{i,c}(\mathbf{u}_i^{*,1}(k-1)) \leq J_{i,c}(\mathbf{u}_i^{*,1}(k-1)) + \sigma_i(k-1)$, 故 $\mathbf{u}_i^{*,1}(k-1)$ 满足约束 (9g), 则 $\mathbf{u}_i^{*,1}(k-1)$ 是优化问题 (9) 的一个可行解, 因此优化问题 (9) 存在最优解, 记为 $\mathbf{u}_i^*(k-1)$, 利用 $\mathbf{u}_i^*(k-1)$ 可构造序列 (15). 将 (15) 和状态 $x_i^*(1|k-1)$ 代入系统, 可以得到对应的状态响应序列 $\hat{x}_i(k) = \{x_i^*(2|k-1), \dots, x_i^*(N|k-1), f_i(x_i^*(N|k-1), \pi_i(x_i^*(N|k-1)))\}$. 由假设 1 及 MPC 三要素原理可知, 控制序列 (15) 满足 (8b)-(8d).

对车辆 $i = 2, \dots, n$ 由约束 (14) 和三角不等式得

$$\begin{aligned} |x_{i,1}^*(t|k-1)| \leq |x_{i,1}^*(t|k-1) \\ - \hat{x}_{i,1}(t|k-1)| + |\hat{x}_{i,1}(t|k-1)| \\ \leq \varepsilon_{i,k-1} |\hat{x}_{i-1,1}(t|k-1)|_{\infty,1} + |\hat{x}_{i,1}(t|k-1)| \end{aligned} \quad (18)$$

由 (13)、(14) 和三角不等式可知

$$\begin{aligned} |\hat{x}_{i-1,1}(t|k-1)| \leq \varepsilon_{i-1,k-1} \\ |x_{i-1,1}^*(t|k-1)|_{\infty,1} + |x_{i-1,1}^*(t|k-1)| \end{aligned} \quad (19)$$

为方便起见, 令 $\varepsilon = (1 + \varepsilon_{i-1,k-1})$. 由 (19) 得 $|\hat{x}_{i-1,1}(t|k-1)|_{\infty,1} \leq \varepsilon |x_{i-1,1}^*(t|k-1)|_{\infty,1}$, 且由引理 [21] 得 $|\hat{x}_{i,1}(t|k-1)| \leq \alpha_i |\hat{x}_{i-1,1}(t|k-1)|$. 将 (19) 与上述两式联立得

$$\begin{aligned} |x_{i,1}^*(t|k-1)| \leq (\varepsilon_{i,k-1}\varepsilon + \alpha_i\varepsilon_{i-1,k-1}) \\ |x_{i-1,1}^*(t|k-1)|_{\infty,1} + \alpha_i |x_{i-1,1}^*(t|k-1)| \end{aligned} \quad (20)$$

故 $|x_{i,1}^*(t|k-1)|$ 有界, 且满足

$$\begin{aligned} |x_{i,1}^*(t|k-1)|_{\infty,1} \leq (\varepsilon_{i,k-1}\varepsilon + \\ \alpha_i\varepsilon_{i-1,k-1} + \alpha_i) \times |x_{i-1,1}^*(t|k-1)|_{\infty,1} \end{aligned} \quad (21)$$

因此 (21) 系数满足弦稳定系数, 故满足弦稳定条件. 结合 (20) 有

$$\begin{aligned} |\hat{x}_{i,1}(t|k)| \leq (\varepsilon_{i,k-1}\varepsilon + \alpha_i\varepsilon_{i-1,k-1}) \\ |x_{i-1,1}^*(t|k)|_{\infty,1} + \alpha_i |\hat{x}_{i-1,1}(t|k)| \end{aligned} \quad (22)$$

由 (22) 得

$$\begin{aligned} |\hat{x}_{i,1}(t|k)| \leq (\varepsilon_{i,k-1}\varepsilon + \alpha_i\varepsilon_{i-1,k-1}) \\ |x_{i-1,1}^*(t|k-1)|_{\infty,1} + \alpha_i\varepsilon_{i-1,k} \\ |x_{i-1,1}^*(t|k)|_{\infty,1} + \alpha_i |x_{i-1,1}^*(t|k)| \end{aligned} \quad (23)$$

故有

$$|\hat{x}_{i,1}(t|k-1)|_{\infty,1} \leq \max_{l=k-1,k} |x_{i-1}^*(t|l)|_{\infty,1} \times (\alpha_i + \alpha_i(\varepsilon_{i-1,k-1} + \varepsilon_{i-1,k}) + \varepsilon_{i,k-1}\varepsilon) \quad (24)$$

(24) 不等式右边系数满足参数条件, 故 (15) 满足约束 (8e). 将 (15) 代入约束 (8f) 不等式左边, 并与 (8f) 不等式右边做差, 得 $J_{i,a}(\hat{u}_i(k)) - \eta_i(x_i(k), \lambda_i) = -\lambda_i[J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k-1)) - J_{i,a}(\hat{u}_i(k))]$, 其中

$$\begin{aligned} J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k-1)) - J_{i,a}(\hat{u}_i(k)) = & L_{i,a}(x_i^*(0|k-1), u_i^*(0|k-1)) - \\ & L_{i,a}(x_i^*(N|k-1), u_i^*(N|k-1)) + \\ & E_{i,a}(x_i^*(N|k-1)) - \\ & E_{i,a}(f(x_i^*(N|k-1), \pi_i(x_i^*(N|k-1))) \end{aligned} \quad (25)$$

由假设 1 得

$$\begin{aligned} J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k-1)) - J_{i,a}(\hat{u}_i(k)) \geq & L_{i,a}(x_i^*(0|k-1), u_i^*(0|k-1)) \geq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

又由于系数 $0 \leq \lambda_i < 1$, 得 $J_{i,a}(\hat{u}_i(k)) \leq \eta_i(x_i(k), \lambda_i)$, 即序列 (15) 满足约束 (8f).

综上, 序列 (15) 满足约束 (8b)-(8f), 为 k 时刻优化问题 (8) 的一个可行解, 即此时优化问题 (8) 存在最优解 $\mathbf{u}_i^*(k)$, 故控制器 (10) 满足递推可行性. 因此对任意 $x_i(k-1) \in X_{i,N}$ 可知 $x_i(k) \in X_{i,N}$, 故 $X_{i,N}$ 是闭环系统 (11) 的一个不变集, 证明成立. $\square$

定理 2 若假设 1 和 2 成立, 优化问题 (8) 在初始时刻存在可行解, 则 $x_{i,s}$ 是闭环系统 (11) 在 $X_{i,N}$ 内的渐近稳定平衡点, 且 $X_{i,N}$ 是闭环系统的一个吸引域, 同时车辆队列系统在行驶过程中满足弦稳定.

证明 任意给定 $0 \leq \lambda_i < 1$, 由于优化问题 (8) 在初始时刻是可行的, 根据定理 1 可知, 优化问题 (8) 和 (9) 在任意 k 时刻可行. 令 $\mathbf{u}_i^*(k-1)$ 是优化问题 (9) 在 $k-1$ 时刻的最优解, $\mathbf{u}_i^*(k)$ 为优化问题 (9) 在 k 时刻的最优解. 考虑约束 (9f) 和式 (16), 有

$$\begin{aligned} J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k)) \leq & J_{i,a}(\hat{u}_i(k)) + \\ & \lambda_i[J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k-1)) - J_{i,a}(\hat{u}_i(k))] \end{aligned} \quad (27)$$

(27) 等价于

$$\begin{aligned} J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k)) \leq & \lambda_i J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k-1)) + \\ & (1 - \lambda_i) J_{i,a}(\hat{u}_i(k)) \end{aligned} \quad (28)$$

(28) 两边同减去 $J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k-1))$ 有

$$\begin{aligned} J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k)) - J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k-1)) \leq & (1 - \lambda_i) \\ & [J_{i,a}(\hat{u}_i(k)) - J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k-1))] \end{aligned} \quad (29)$$

给定 $0 \leq \lambda_i < 1$, 结合 (26) 有

$$\begin{aligned} J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k)) - J_{i,a}(\mathbf{u}_i^*(k-1)) \leq & -(1 - \lambda_i) \\ & L_{i,a}(x_i^*(0|k-1), u_i^*(0|k-1)) \leq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

故值函数 $J_{i,a}(\mathbf{u}_i(k))$ 沿着闭环系统 (11) 最优轨迹

单调递减, 由文献 [16] 可知, 存在两个 K_∞ 类函数 $\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot)$ 满足 $\gamma_1(\cdot) \leq J_{i,a}(\cdot) \leq \gamma_2(\cdot)$. 又因为 $J_{i,a}(\cdot)$ 是关于车辆平衡点 $(x_{i,s}, u_{i,s})$ 的正定函数, 故 $J_{i,a}(\cdot)$ 为系统 (11) 的一个 Lyapunov 函数, 又因为 $X_{i,N}$ 是闭环系统的不变集, 故 $X_{i,N}$ 是闭环系统的一个吸引域.

算法 1 满足递推可行性, 闭环系统 (11) 关于 $x_{i,s}$ 渐近稳定, 弦稳定约束参考文献 [21], 因此可建立闭环系统的前车-后车弦稳定性, 证明成立. $\square$

注 3 应用稳定性目标函数 (7) 分别设计了优化问题 (8) 和 (9) 中的收缩约束 (8f) 和 (9f), 使目标函数 (7) 的值函数沿着车辆最优闭环轨迹单调递减, 从而保证了车辆的稳定性, 即同步实现了协同性、经济性和稳定性三个目标的控制.

4 仿真验证

考虑由 5 辆同质车组成的队列系统, 其中模型参数^[20]: $m_i = 1035.7\text{kg}$, $C_{A,i} = 0.99\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$, $g = 9.8\text{m/s}^2$, $\mu_i = 0.0155$, $r_i = 0.3\text{m}$, $\eta_{T,i} = 0.965$. 行驶过程中, 车辆 $i (= 2, 3, 4, 5)$ 接收前一辆车的行驶信息.

取采样间隔 $\Delta t = 0.5\text{s}$, 预测时域 $N = 8$, 车速为 19m/s , 车距保持不变. 在算法对应的初始时刻, 期望速度阶跃变化至 20m/s , 即速度误差变为 -1m/s , 随后采用本文设计的分布式多目标 MPC 算法控制车辆跟踪新的参考速度, 同时满足车辆稳定和车队队形约束, 优化经济性能与协同性能.

根据车辆动力学方程 (1), 离线计算得车辆行驶平衡点为 $(x_{i,s}, u_{i,s}) = (0, 0, 48.9087)$, 对模型 (3) 平衡点线性化后的线性模型求解 LQR 问题, 可得终端加权矩阵、局部控制律增益和终端域分别为

$$P_i = \begin{bmatrix} 8471.259 & 418.5381 \\ 418.5381 & 41.6043 \end{bmatrix}$$

$$K_i = \begin{bmatrix} 130165.3485 & 12938.9435 \end{bmatrix}$$

$$X_{i,T} = \{x_i \in R^2 | E_i(x_i(N|k)) \leq 2.114\}$$

其余参数: $\lambda_i = 0.1$, $\sigma_i(k) = 0.01$, $d_i = 5\text{m}$, $C_i = \text{diag}(4, 4)$, $Q_i = \text{diag}(0.5, 0.5)$, $R_i = 5 \times 10^{-6}$, $b_0 = 0.156$, $b_1 = 2.45 \times 10^{-2}$, $b_2 = -7.145 \times 10^{-4}$, $b_3 = 5.975 \times 10^{-5}$, $c_0 = 0.0724$, $c_1 = 9.681 \times 10^{-2}$, $c_2 = 1.075 \times 10^{-3}$, 弦稳定约束参数参考文献 [21]. 优化问题均采用 MATLAB 2013b 中 fmincon 函数进行求解, 最终仿真结果如图 1-图 4 所示.

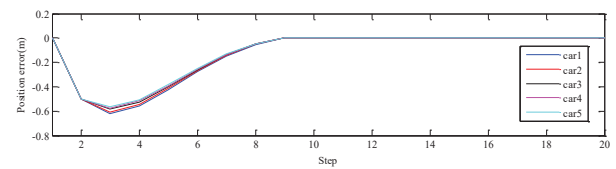


图 1 各车位置误差

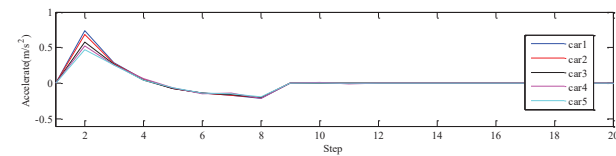


图 2 各车加速度

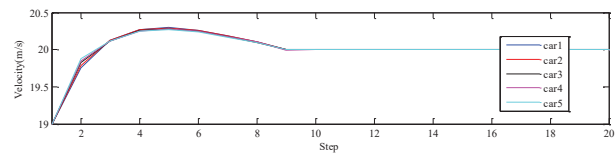


图 3 各车速度

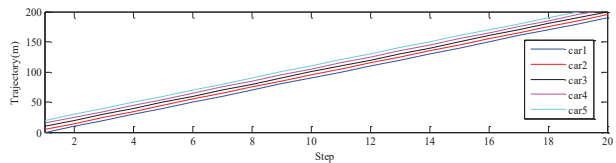


图 4 各车行驶轨迹

由图 1 可见,参考信号变化后,在控制器作用下,各车之间位置误差发生变化,最终满足位置误差为零,其中在图 1 各车位置误差变化过程中,车辆位置误差随车流衰减,满足前文定义 2 中弦稳定的充分条件,因此在该控制器作用下,车队满足弦稳定性;图 2 和图 3 分别表示各车加速度与速度变化量,由图 3 可见车队最终能够稳定跟踪参考速度;图 4 则表示了各车的行驶轨迹,仿真结果验证了本文算法的正确性.

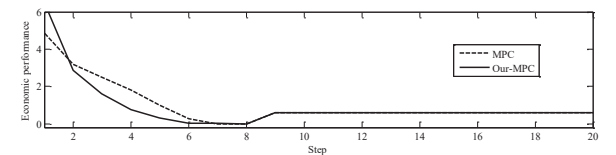


图 5 每采样时刻车队油耗

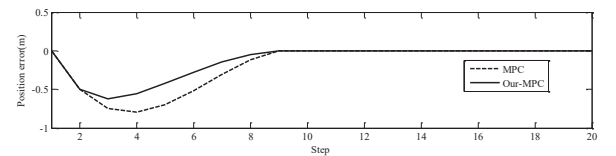


图 6 车辆 p_1 位置误差对比

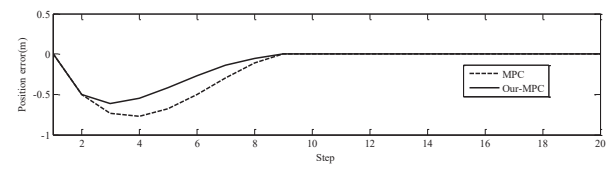


图 7 车辆 p_2 位置误差对比

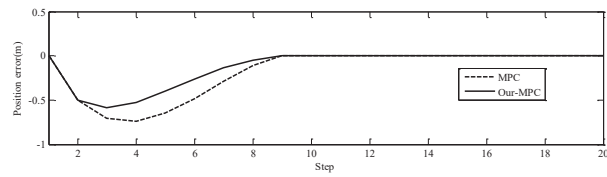


图 8 车辆 p_3 位置误差对比

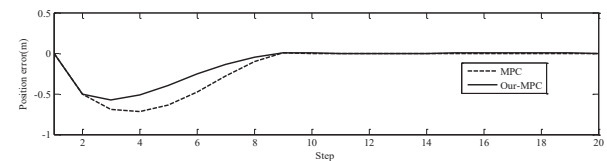


图 9 车辆 p_4 位置误差对比

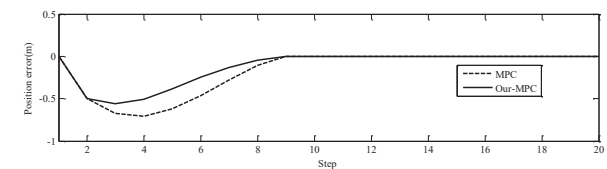


图 10 车辆 p_5 位置误差对比

此外,为了验证本文策略的优越性,在同一工况下,将常规分布式 MPC 控制策略用于该车辆队列,并与本文策略进行对比.将两种控制策略下车队每采样时刻经济目标函数值 $L_{i,e}(k)$ 关于时间的函数作图,结果如图 5 所示.并将整个仿真时域内每辆车每采样时刻油耗求和后如表 1 所示,结果显示,本文算法能节约车队油耗,提高车队经济性能;两种控制策略下每车每采样时刻位置误差对比如图 6-图 10 所示.结果显示,本文算法能够减小车辆动态过程位置误差,在一定程度上可节约车队行车空间,提高车队的协同性能.因此本文策略具有优越性.

表 1 每车不同算法下总油耗 (ml)

	Our-MPC	MPC
1 车	3.8384	4.1528
2 车	3.8292	4.1437
3 车	3.8172	4.1145
4 车	3.8179	4.1036
5 车	3.7994	4.0900
总计	19.1021	20.6046

5 结 论

本文研究了约束非线性车辆队列系统行驶过程中的多目标控制问题.采用字典序原理处理多目标

问题, 设计分布式多目标 MPC 控制策略, 并建立了保证车辆渐近稳定性、车队弦稳定性的充分条件, 同时优化了车队的经济性能与协同性能. 通过对含五辆车队列系统的速度阶跃变化工况进行对比仿真, 验证了本文控制策略的有效性.

参考文献 (References)

- [1] Shen P Y, Zhang X B, Fang Y C. Complete and time-optimal path-constrained trajectory planning with torque and velocity constraint: Theory and applications[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2018, 23(2): 735-746.
- [2] Hu Y J, Zhan J Y, Yuan Q, Li X. A multi-agent flocking system with communication delays via distributed model predictive control[C]. Proceedings of the 36th Chinese Control Conference. Dalian, 2017: 8449-8454.
- [3] Rodney T, Dusan M. S, Claire J. T. Decentralized spacing control of a string of multiple vehicles over lossy datalinks[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2010, 18(2): 469-473.
- [4] Constantin F. C, Cosmin C, Corneliu L, Robin D K. Decentralized predictive formation control for mobile robots without communication[C]. IEEE 15th International Conference on Control and Automation (ICCA). Edinburgh, UK, 2019: 555-560.
- [5] Philip N. K, Matthias A. M, Frank A. A distributed economic MPC framework for cooperative control under conflicting objectives[J]. Automatica, 2018, 96: 368-379.
- [6] Liu Y, Zong C F, Zhang D. Lateral control system for vehicle platoon considering vehicle dynamic characteristics[J]. IET Intelligent Transport Systems, 2019, 13(9): 1356-1364.
- [7] Richard H. Middleton, Julio H. B. String instability in classes of linear time invariant formation control with limited communication range[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(7): 1519-1530.
- [8] Giancarlo F T, Luca G, Marco P E M, Riccardo S. Model predictive control schemes for consensus in multi-agent systems with single-and-double-integrator dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(11): 2560-2572.
- [9] Yoshiaki K, Arthur R, Tom S, Jonathan P. H. Distributed robust receding horizon control for multivehicle guidance[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2007, 15(4): 627-641.
- [10] Elisa F, Lalo M, Thomas P, Marios M. P, Davide M. R. Cooperative constrained control of distributed agents with nonlinear dynamics and delayed information exchange: A stabilizing receding-horizon approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(1): 324-338.
- [11] Li H P, Shi Y. Distributed receding horizon control of large-scale nonlinear systems: Handling communication delays and disturbances[J]. Automatica, 2014, 50(4): 1264-1271.
- [12] Li H P, Shi Y. Robust distributed model predictive control of constrained continuous-time nonlinear systems: A robustness constraint approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(6): 1673-1678.
- [13] Li S K, Yang L X, Gao Z Y. Distributed optimal control for multiple high-speed train movement: An alternating direction method of multipliers[J]. Automatica, 2020, 112: 108646.
- [14] Chao S, Shi Y, Brad B. Path-following control of an AUV: A multiobjective model predictive control approach[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2019, 27(3): 1334-1342.
- [15] Victor M. Z, Antonio F. T. Stability of multiobjective predictive control: A utopia-tracking approach[J]. Automatica, 2012, 48(10): 2627-2632.
- [16] He D F, Yu S M, Ou L L. Lexicographic MPC with multiple economic criteria for constrained nonlinear systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 335(2): 753-773.
- [17] Altannar C, Panos M. P. A survey of recent developments in multiobjective optimization[J]. Annals of Operations Research, 2007, 154(1): 29-50.
- [18] Marler R. T, Arora J. S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2004, 26(6): 369-395.
- [19] Mayne D Q. Model predictive control: Recent developments and future promise[J]. Automatica, 2014, 50(12): 2967-2986.
- [20] Zheng Y, Li S B, Li K Q, Francesco B, J. Karl Hedrick. Distributed model predictive control for heterogeneous vehicle platoons under unidirectional topologies[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2017, 25(3): 899-910.
- [21] William B. D, Derek S. C. Distributed receding horizon control of vehicle platoons: Stability and string stability[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(3): 620-633.

作者简介

陈龙(1996—), 男, 研究生, 从事分布式、多目标模型预测控制研究, E-mail: 2111903119@zjut.edu.cn;

何德峰(1979—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能系统预测控制理论与应用等研究, E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn;

李壮(1994—), 男, 研究生, 从事分布式模型预测控制研究, E-mail: 2111803064@zjut.edu.cn.