

# 基于混合型相关系数的概率犹豫模糊集识别方法

刘 赢, 关 欣

(海军航空大学, 山东 烟台 264000)

**摘 要:** 针对现有概率犹豫模糊集相关系数研究中存在的缺陷, 如未考虑隶属度个数以及存在反直觉现象等, 提出了新的混合型相关系数. 混合型相关系数能够综合反映概率犹豫模糊集之间的个体和整体相关性, 相比已有的相关系数更为全面、合理. 首先, 综合考虑了概率犹豫模糊数中元素的整体性、分布和长度三个因素, 分别定义了均值、方差和长度率三个基本相关系数, 在此基础上集成得到混合型相关系数, 并证明了其满足相关系数公理化定义的基本准则, 实例分析结果表明, 混合性相关系数克服了现有概率犹豫模糊相关系数存在的缺陷. 基于混合型相关系数, 进一步设计了概率犹豫模糊环境下的多属性决策方法, 最后, 通过具体的案例分析, 验证了本文所提相关系数的有效性和合理性, 具有广泛的应用前景.

**关键词:** 犹豫模糊集; 概率犹豫模糊集; 相关分析; 长度率; 混合相关系数; 多属性决策

中图分类号: C934 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1985

## Probability hesitation fuzzy set recognition method based on hybrid correlation coefficient

LIU Ying, GUAN Xin

(Naval Aeronautical University, Yantai 264000, China)

**Abstract:** Aiming at the defects of the existing researches on the correlation coefficients of probabilistic hesitation fuzzy sets (PHFSs), such as not considering the number of membership degrees and having counterintuitive phenomena, a new hybrid correlation coefficient is proposed. The hybrid correlation coefficient can comprehensively reflect the individual and global correlation among the PHFSs, which is more comprehensive and reasonable than the existings. Firstly, three factors of integrity, distribution and length of elements in PHFEs are considered comprehensively, and three basic correlation coefficients of mean, variance and length rate are defined respectively. On this basis, the hybrid correlation coefficient is obtained, which is proved to meet the axiomatic definition criterion of correlation coefficient. The results of case analysis show that the hybrid correlation coefficient overcomes the defects of the existing PHFS correlation coefficient. Based on the hybrid correlation coefficient, the multi-attribute decision making method in PHFS environment is further designed. Finally, the validity and rationality of the correlation coefficient proposed in this paper is verified by a specific case analysis, which has a wide application prospect.

**Keywords:** Hesitation fuzzy set; Probabilistic hesitation fuzzy set; Correlation analysis; Length rate; Mixed correlation coefficient; Multi-attribute decision making

## 0 引 言

相关分析作为数据分析中度和比较的一种常用数学手段广泛应用于模式识别、市场行为预测以及故障诊断等多属性决策领域. 不同于距离测度<sup>[1]</sup>、相似性测度以及熵测度<sup>[2]</sup>等分析手段, 相关系数衡量的是变量之间的线性接近程度, 从不同的角度进行度量, 因此有其分析的必要性和独特性. 随着技术的进步, 决策过程中的未知因素和不确定性不断增

加, 模糊理论<sup>[3]</sup>因在处理不确定信息方面的优越性, 得到了广泛应用, 相关分析也因此拓展到了模糊领域.

随后, Torra<sup>[4]</sup>在2010年提出了犹豫模糊集, 将可能的评估值都作为隶属度, 用于表达决策者的犹豫不决; 但犹豫模糊集默认每个隶属度的概率是相同的, 无法传达专家的偏好信息, 为了解决这一问题, 朱斌<sup>[5]</sup>又提出概率犹豫模糊集的概念, 因其更完善

收稿日期: 2021-11-15; 录用日期: 2022-03-28.

基金项目: 国防科技卓越青年人才基金(2017-JCJQ-ZQ-003); 泰山学者工程专项经费(ts201712072).

†通讯作者. E-mail: prettywarm@126.com.

的数学表现形式,得到了学者的广泛关注,在集成算子<sup>[6-9]</sup>、偏好关系理论<sup>[10,11]</sup>以及决策方法<sup>[12-14]</sup>等方面取得了一系列成果.其中,偏好关系由于符合群体决策的过程,有着很大的应用前景.此外,相关学者在区间概率犹豫模糊集<sup>[15]</sup>、概率对偶犹豫模糊集<sup>[16]</sup>等领域也做了相关研究,为概率犹豫模糊决策理论提供了重要补充.

犹豫模糊相关系数的研究目前已有丰富的研究成果,Xu<sup>[17]</sup>等首次定义了5种犹豫模糊数的相关系数,将其应用到医疗诊断领域;在此基础上,Chen<sup>[18]</sup>等提出了犹豫模糊集的相关系数,用于解决聚类问题;关欣<sup>[19]</sup>等分析了现有犹豫模糊集相关系数的局限性,提出了既满足统计学直觉,又不需要各犹豫模糊数中隶属度个数相同的相关系数;徐俊艳<sup>[20]</sup>等针对相关系数违背统计学和随机过程直觉的问题,基于更严谨的数学定义提出新的犹豫模糊集相关系数.

相比犹豫模糊集,概率犹豫模糊信息的测度理论研究要复杂得多,因此目前对概率犹豫模糊集相关系数的研究仍然非常少,Farhadinia<sup>[21]</sup>给出了5种概率犹豫模糊集相关系数,并应用到医疗诊断中;Wang<sup>[22]</sup>等通过定义均值和方差,研究了概率犹豫模糊元素的相关系数,并拓展为加权相关系数;朱峰<sup>[23]</sup>等提出了离散型和连续型概率犹豫模糊集的关联系数,并构建了多属性决策模型;Song<sup>[24]</sup>等在犹豫模糊集的基础上提出了一种概率犹豫模糊集相关系数,应用到聚类分析中.

尽管上述几种相关系数已在多个领域得到应用,但都存在相应不足.相关系数的取值应是有正有负的,分别表示正相关和负相关,而Farhadinia<sup>[21]</sup>提出的相关系数取值范围为 $[0,1]$ ,只为正相关而忽略了负相关,不符合数学上相关系数严格定义的直觉性,并且需要进行元素延拓,以满足元素个数相等这一条件;Wang、Song等提出的相关系数<sup>[22,24]</sup>实质上是一类均值相关系数,即无论概率犹豫模糊数中的隶属度如何分布,只要其均值相等,计算结果都是相等的,并没有考虑隶属度的具体分布以及数量等因素,可能出现反直觉的现象,具有一定的局限性.

因此,本文通过分析现有概率犹豫模糊集相关系数的不足,基于严格的统计学分析,分别定义了均值、方差和长度率三种基本相关系数,集成得到混合型相关系数,并拓展为加权混合相关系数,最后通过实例分析验证了所提方法的有效性和合理性.

## 1 理论基础

本节对概率犹豫模糊集 (Probability Hesitant Fuzzy Set, PHFS) 的基本概念进行简要介绍.

**定义 1**<sup>[25]</sup> 给定论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 概率犹豫模糊集  $H$  定义为从  $X$  到区间  $[0,1]$  上的一个概率分布函数的映射,其数学表达式为

$$H = \{ \langle x, h_x(p_x) \rangle \mid x \in X \} \quad (1)$$

其中,  $h(x)$  表示  $x \in X$  属于某集合  $E$  的隶属度,取值为  $[0,1]$  上的子集;  $p_x$  为  $h(x)$  中元素对应的概率解释,同样为  $[0,1]$  上的子集;  $h_x(p_x)$  为概率犹豫模糊数 (Probability Hesitant Fuzzy Element, PHFE), 简称为  $h(p)$ , 其数学表达式为

$$h(p) = \{ \gamma^\lambda | p^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, |h(p)| \} \quad (2)$$

其中,  $|h(p)|$  表示  $h(p)$  中隶属度的数量,  $\gamma^\lambda$  表示元素  $x \in X$  属于概率犹豫模糊集  $H$  的可能性,  $p^\lambda$  表示对应隶属度  $\gamma^\lambda$  出现的概率, 满足  $\sum_{\lambda=1}^{|h(p)|} p^\lambda \leq 1$ .

## 2 概率犹豫模糊相关分析

本节简要概述现有概率犹豫模糊相关系数,并分析其不足,在后续的仿真分析中进行对比.

### 2.1 现有概率犹豫模糊相关分析

文献<sup>[24]</sup>中的概率犹豫模糊集相关系数描述如下.

**定义 2** 记论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的两 PHFSs 分别为  $A = \{ \langle x, h_{A_i}(p_x) \rangle \mid x_i \in X \}$  和  $B = \{ \langle x, h_{B_i}(p_x) \rangle \mid x_i \in X \}$ , 其中  $A$  的 PHFE 为  $h_{A_i}(p_x) = \{ \gamma_{A_i}^\lambda | p_{A_i}^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, l_{A_i} \}$ , 则  $A$  的均值和方差,以及  $A$ 、 $B$  之间的协方差和相关系数分别表示如下.

PHFS  $A$  的均值为

$$\bar{A} = E(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{h}_{A_i}(p_x) \quad (3)$$

其中  $\bar{h}_{A_i}(p_x)$  为 PHFE  $h_{A_i}(p_x)$  的均值

$$\bar{h}_{A_i}(p_x) = \sum_{\lambda=1}^{l_{A_i}} (\gamma_{A_i}^\lambda \cdot p_{A_i}^\lambda) \quad (4)$$

基于均值  $\bar{A}$  的 PHFS  $A$  的方差为

$$Var(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\bar{h}_{A_i}(p_x) - \bar{A}]^2 \quad (5)$$

PHFSs  $A$ 、 $B$  之间的协方差表示为

$$C(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\bar{h}_{A_i}(p_x) - \bar{A}] \cdot [\bar{h}_{B_i}(p_x) - \bar{B}] \quad (6)$$

基于协方差  $C(A, B)$ , PHFSs  $A$ 、 $B$  之间的相关系数表示为

$$\rho(A, B) = \frac{C(A, B)}{[C(A, A) \cdot C(B, B)]^{1/2}} \quad (7)$$

**定义 3** 如果考虑权重因素, 设论域  $X =$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的各元素权重向量为  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ , 满足  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ , 则  $A$  的加权均值和加权方差, 以及  $A$ 、 $B$  之间的加权协方差和加权相关系数分别表示如下.

PHFS  $A$  的加权均值为

$$\bar{A}_\omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{h}_{A_i}(p_x) \quad (8)$$

PHFS  $A$  的加权方差为

$$Var_\omega(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\omega_i \bar{h}_{A_i}(p_x) - \bar{A}_\omega]^2 \quad (9)$$

PHFSs  $A$ 、 $B$  之间的加权协方差表示为

$$C_\omega(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\omega_i \bar{h}_{A_i}(p_x) - \bar{A}_\omega] \cdot [\omega_i \bar{h}_{B_i}(p_x) - \bar{B}_\omega] \quad (10)$$

基于加权协方差  $C_\omega(A, B)$ , PHFSs  $A$ 、 $B$  之间的加权相关系数表示为

$$\rho_\omega(A, B) = \frac{C_\omega(A, B)}{[C_\omega(A, A) \cdot C_\omega(B, B)]^{1/2}} \quad (11)$$

## 2.2 现有相关系数局限性分析

**例 1** 讨论  $PHFEh(p) = \{0.8|0.7, 0.2|0.3\}$ , 表示元素  $x$  属于 PHFS  $H$  的隶属度为 0.8 或 0.2, 其中隶属度为 0.8 的概率为 0.7, 隶属度为 0.2 的概率为 0.3. 而当隶属度的概率均为  $1/|h(p)|$  时, 即  $h(p)$  变为  $\{0.8|0.5, 0.2|0.5\}$ , 此时通过概率信息可以得到元素  $x$  的各隶属度具有相同的概率, 即决策者不偏好任何一个隶属度.

类似的, 犹豫模糊数  $\{0.8, 0.2\}$  由于不包含概率信息, 同样不能判断决策者偏好哪一个隶属度. 因此在隶属度概率相等的情况下, 概率犹豫模糊集与犹豫模糊集传递的信息是等价的, 即犹豫模糊集实际上可以理解为概率犹豫模糊集的一种特殊情况. 因此, 概率犹豫模糊集的相关定义必然适用于犹豫模糊集, 则考虑下面的例子.

**例 2** 考虑最简单的情况, 给出论域  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  上的三个 PHFSs  $A$ 、 $B$  和  $C$  分别为:

$$A = \{ \langle x_1, \{0.3|\frac{1}{2}, 0.5|\frac{1}{2}\} \rangle, \langle x_2, \{0.3|\frac{1}{3}, 0.6|\frac{1}{3}, 0.9|\frac{1}{3}\} \rangle, \langle x_3, \{0.1|\frac{1}{4}, 0.2|\frac{1}{4}, 0.8|\frac{1}{4}, 0.9|\frac{1}{4}\} \rangle \}$$

$$B = \{ \langle x_1, \{0.1|\frac{1}{2}, 0.7|\frac{1}{2}\} \rangle, \langle x_2, \{0.2|\frac{1}{3}, 0.7|\frac{1}{3}, 0.9|\frac{1}{3}\} \rangle, \langle x_3, \{0.3|\frac{1}{3}, 0.5|\frac{1}{3}, 0.7|\frac{1}{3}\} \rangle \}$$

$$C = \{ \langle x_1, \{0.2|\frac{1}{3}, 0.3|\frac{1}{3}, 0.7|\frac{1}{3}\} \rangle, \langle x_2, \{0.5|\frac{1}{2}, 0.7|\frac{1}{2}\} \rangle, \langle x_3, \{0.4|\frac{1}{3}, 0.5|\frac{1}{3}, 0.6|\frac{1}{3}\} \rangle \}$$

根据定义 2 的方法计算  $A$ 、 $B$  和  $C$  之间的相关系数, 具体过程如下:

$A$ 、 $B$  和  $C$  中各 PHFE 的均值为

$$\bar{h}_{A_i}(p_x) = \bar{h}_{B_i}(p_x) = \bar{h}_{C_i}(p_x) = \{0.4, 0.6, 0.5\},$$

PHFSs  $A$ 、 $B$  和  $C$  的均值为

$$\bar{A} = \bar{B} = \bar{C} = 0.5,$$

PHFSs  $A$ 、 $B$  和  $C$  的方差为

$$Var(A) = Var(B) = Var(C) = \frac{0.02}{3},$$

PHFSs  $A$ 、 $B$  和  $C$  之间的协方差为

$$C(A, B) = C(A, C) = C(B, C) = \frac{0.02}{3},$$

则  $A$  和  $B$ 、 $A$  和  $C$ 、 $B$  和  $C$  之间的相关系数为  $\rho(A, B) = \rho(A, C) = \rho(B, C) = 1$ .

显然, 上述结论是反直觉的, 因为  $A$ 、 $B$  和  $C$  是完全不相同的, 并且不存在线性关系, 它们之间的相关系数不应该为 1, 表明现有方法在本例中失效, 其原因可归纳为以下两点:

(1) 此相关系数实质上为一种均值相关, 即其忽略了 PHFE 中隶属度的具体分布特点, 仅仅计算得到了各 PHFE 的均值, 重新构造了一个新的犹豫模糊数, 可以看出, 无论 PHFE 中的隶属度如何分布, 只要其对应的均值相等, 计算结果都是相同的. 虽然在计算过程中涉及到方差的概念, 但计算结果与 PHFE 的方差没有联系, 其本质上还是一种均值相关系数.

(2) 此相关系数并没有考虑隶属度个数不等带来的影响. 虽然在计算时, 不用强制要求隶属度个数对应相等, 但也因此使得隶属度个数在计算相关系数时没有发挥作用, 隶属度个数不一致, 其对应的相关系数也不应相等, 因此, 应该将 PHFS 中隶属度个数作为相关系数定义的重要特征.

## 3 概率犹豫模糊集混合相关系数

数学上, 相关系数定义为“归一化的随机变量协方差”, 本节从统计学和随机过程的角度定义新的相关系数, 使其更符合数学逻辑. 首先根据统计学定义给出概率犹豫模糊集的方差和协方差的概念, 然后基于严格的数学定义将新的相关系数定义为“归一化的随机变量协方差”.

根据上一节的分析, 新的相关系数应该同时将概率犹豫模糊数中隶属度的整体性、具体分布以及个数考虑在内. 因此, 在文献 [24] 的基础上, 本文分别用概率犹豫模糊数的均值表示其整体性, 用方差表示隶属度的具体分布, 用长度率反映隶属度个数的影响, 并给出相应的数学描述, 构造均值、方差和长度率三种基本相关系数, 最后集成得到混合相关系数, 其基本定义描述如下.

### 3.1 概率犹豫模糊相关系数基本定义

**定义 4** 记论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  上的 PHFS 为  $A = \{ \langle x, h_{A_i}(p_x) \rangle \mid x_i \in X \}$ , 其中  $PHFEh_{A_i}(p_x)$  为  $\{\gamma_{A_i}^\lambda \mid p_{A_i}^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots, l_{A_i}\}$ , 则  $h_{A_i}(p_x)$  的均值、方差以及长度率分别表示如下.

PHFE $h_{A_i}(p_x)$  的均值为

$$\bar{h}_{A_i}(p_x) = \sum_{\lambda=1}^{l_{A_i}} (\gamma_{A_i}^\lambda \cdot p_{A_i}^\lambda) \quad (12)$$

PHFE $h_{A_i}(p_x)$  的方差为

$$\text{Var}(h_{A_i}(p_x)) = \sum_{\lambda=1}^{l_{A_i}} [\gamma_{A_i}^\lambda - \bar{h}_{A_i}(p_x)]^2 p_{A_i}^\lambda \quad (13)$$

PHFE $h_{A_i}(p_x)$  的长度率为

$$u(h_{A_i}(p_x)) = 1 - \frac{1}{l_{A_i}} \quad (14)$$

其中, 长度率  $u(h_{A_i}(p_x))$  满足  $0 \leq u(h_{A_i}(p_x)) \leq 1$ , 当隶属度个数为 1 时,  $u(h_{A_i}(p_x)) = 0$ , 当隶属度个数趋近于无穷大时,  $u(h_{A_i}(p_x)) = 1$ .

### 3.2 概率犹豫模糊集的三种基本相关系数

根据 3.1 节的分析, 分别给出均值、方差和长度率三种基本相关系数的数学描述.

#### 3.2.1 均值相关系数

均值相关系数实际上与文献 [24] 的相关系数定义相同, 为了统一数学表达, 简要对其描述如下.

定义 5 PHFSs  $A, B$  之间的均值协方差为

$$C_M(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\bar{h}_{A_i}(p_x) - \bar{A}] [\bar{h}_{B_i}(p_x) - \bar{B}] \quad (15)$$

基于均值协方差  $C_M(A, B)$ , 定义 PHFSs  $A, B$  之间的均值相关系数为

$$\rho_M(A, B) = \frac{C_M(A, B)}{[C_M(A, A) \cdot C_M(B, B)]^{1/2}} \quad (16)$$

#### 3.2.2 方差相关系数

定义 6 PHFE $h_{A_i}(p_x)$  方差的均值定义为

$$\bar{A}_V = E(\text{Var}(h_{A_i}(p_x))) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Var}(h_{A_i}(p_x)) \quad (17)$$

PHFE $h_{A_i}(p_x)$  方差的方差定义为

$$\text{Var}(\text{Var}(h_{A_i}(p_x))) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\text{Var}(h_{A_i}(p_x)) - \bar{A}_V]^2 \quad (18)$$

在此基础上, PHFSs  $A, B$  间方差的协方差为

$$\begin{aligned} C_V(A, B) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\text{Var}(h_{A_i}(p_x)) - \bar{A}_V] [\text{Var}(h_{B_i}(p_x)) - \bar{B}_V] \\ & \quad (19) \end{aligned}$$

基于协方差  $C_V(A, B)$ , PHFSs  $A, B$  之间的方差相关系数表示为

$$\rho_V(A, B) = \frac{C_V(A, B)}{[C_V(A, A) \cdot C_V(B, B)]^{1/2}} \quad (20)$$

#### 3.2.3 长度率相关系数

定义 7 PHFE $h_{A_i}(p_x)$  长度率的均值定义为

$$\bar{A}_L = E(u(h_{A_i}(p_x))) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(h_{A_i}(p_x)) \quad (21)$$

PHFE $h_{A_i}(p_x)$  长度率的方差定义为

$$\text{Var}(u(h_{A_i}(p_x))) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [u(h_{A_i}(p_x)) - \bar{A}_L]^2 \quad (22)$$

则 PHFSs  $A, B$  之间的长度率协方差表示为

$$\begin{aligned} C_L(A, B) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [u(h_{A_i}(p_x)) - \bar{A}_L] [u(h_{B_i}(p_x)) - \bar{B}_L] \\ & \quad (23) \end{aligned}$$

基于长度率协方差  $C_L(A, B)$ , PHFSs  $A, B$  之间的长度率相关系数表示为

$$\rho_L(A, B) = \frac{C_L(A, B)}{[C_L(A, A) \cdot C_L(B, B)]^{1/2}} \quad (24)$$

事实上, 概率犹豫模糊集之间的相关系数应当满足相关系数定义三原则:

- (1)  $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ ;
- (2) 如果  $A = B$ , 则  $\rho(A, B) = 1$ ;
- (3)  $-1 \leq \rho(A, B) \leq 1$ .

因此, 需要证明新的基本相关系数满足以上三原则, 由于三种基本相关系数的原理一致, 因此这里仅对方差相关系数进行证明, 其他两种类推.

原则 (1) 和 (2) 显然成立, 以下仅证明原则 (3).

证明

$$\text{令 } \rho_i = \text{Var}(h_{A_i}(p_x)) - \bar{A}_V, \theta_i = \text{Var}(h_{B_i}(p_x)) - \bar{B}_V.$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \\ &\quad (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \end{aligned}$$

可以得到

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \rho_i \theta_i \right| &\leq \left( \sum_{i=1}^n \rho_i^2 \sum_{i=1}^n \theta_i^2 \right)^{1/2} \\ \text{即 } |\rho_V(A, B)| &= \frac{|C_V(A, B)|}{[C_V(A, A) C_V(B, B)]^{1/2}} \leq 1, \\ \text{因此, } -1 &\leq \rho_V(A, B) \leq 1. \end{aligned}$$

证明成立.  $\square$

### 3.3 混合型相关系数定义

在概率犹豫模糊集的均值、方差和长度率相关系数的基础上, 定义集成的混合相关系数为

$$\rho_{MVL}(A, B) = \alpha \rho_M(A, B) + \beta \rho_V(A, B) + \gamma \rho_L(A, B) \quad (25)$$

其中,  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  分别为均值、方差以及长度率相关系数的权重, 满足  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

### 3.4 加权混合相关系数定义

在实际问题中, 论域  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  中的各元素权重往往是不同的, 记论域  $X$  中各元素的权

重为  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ , 满足  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ , 拓展三种基本相关系数为加权样式.

加权均值相关系数:

$$\rho_{\omega M}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \left[ \bar{h}_{A_i}(p_x) - \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{h}_{A_i}(p_x) \right] \left[ \bar{h}_{B_i}(p_x) - \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{h}_{B_i}(p_x) \right]}{\left[ \sum_{i=1}^n \omega_i \left[ \bar{h}_{A_i}(p_x) - \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{h}_{A_i}(p_x) \right]^2 \sum_{i=1}^n \omega_i \left[ \bar{h}_{B_i}(p_x) - \sum_{i=1}^n \omega_i \bar{h}_{B_i}(p_x) \right]^2 \right]^{1/2}} \quad (26)$$

加权方差相关系数:

$$\rho_{\omega V}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \left[ \text{Var}(h_{A_i}(p_x)) - \sum_{i=1}^n \omega_i \text{Var}(h_{A_i}(p_x)) \right] \left[ \text{Var}(h_{B_i}(p_x)) - \sum_{i=1}^n \omega_i \text{Var}(h_{B_i}(p_x)) \right]}{\left[ \sum_{i=1}^n \omega_i \left[ \text{Var}(h_{A_i}(p_x)) - \sum_{i=1}^n \omega_i \text{Var}(h_{A_i}(p_x)) \right]^2 \sum_{i=1}^n \omega_i \left[ \text{Var}(h_{B_i}(p_x)) - \sum_{i=1}^n \omega_i \text{Var}(h_{B_i}(p_x)) \right]^2 \right]^{1/2}} \quad (27)$$

加权长度率相关系数:

$$\rho_{\omega L}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \left[ u(h_{A_i}(p_x)) - \sum_{i=1}^n \omega_i \left( 1 - \frac{1}{l_{A_i}} \right) \right] \left[ u(h_{B_i}(p_x)) - \sum_{i=1}^n \omega_i \left( 1 - \frac{1}{l_{B_i}} \right) \right]}{\left[ \sum_{i=1}^n \omega_i \left[ u(h_{A_i}(p_x)) - \sum_{i=1}^n \omega_i \left( 1 - \frac{1}{l_{A_i}} \right) \right]^2 \sum_{i=1}^n \omega_i \left[ u(h_{B_i}(p_x)) - \sum_{i=1}^n \omega_i \left( 1 - \frac{1}{l_{B_i}} \right) \right]^2 \right]^{1/2}} \quad (28)$$

则集成得到的加权混合相关系数为

$$\rho_{\omega MVL}(A, B) = \alpha_{\omega} \rho_{\omega M}(A, B) + \beta_{\omega} \rho_{\omega V}(A, B) + \gamma_{\omega} \rho_{\omega L}(A, B) \quad (29)$$

其中,  $\alpha_{\omega}$ 、 $\beta_{\omega}$  和  $\gamma_{\omega}$  分别为加权均值、方差以及长度率相关系数的权重, 满足  $\alpha_{\omega} + \beta_{\omega} + \gamma_{\omega} = 1$ .

## 4 基于混合相关系数的多属性决策算法

本节基于概率犹豫模糊集来解决多属性决策问题, 并利用新的混合相关系数进行决策判定.

### 4.1 问题描述

假设在多属性决策问题中, 共有  $n$  个候选判决  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , 每类判决都有  $m$  种属性  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ , 各属性权重是完全未知的, 假设各属性间是非独立的, 共有  $t$  位决策专家  $D = \{D_1, D_2, \dots, D_t\}$ , 假设各专家的权重相同, 专家  $k$  关于判决  $A_i$  在属性  $G_j$  上的属性判决用概率犹豫模糊数表示为

$$D_{ij}^k = \{\gamma_{ij}^{\lambda} | p_{ij}^{\lambda}, \lambda = 1, 2, \dots, |D_{ij}^k|\} \quad (30)$$

通过文献 [22] 的专家信息集成方法可以得到全部专家关于判决  $A_i$  在属性  $G_j$  上的判决为

$$D_{ij} = \{\gamma_{ij}^{\lambda} | p_{ij}^{\lambda}, \lambda = 1, 2, \dots, |D_{ij}|\} \quad (31)$$

进而得到全部专家关于  $A_i$  的概率犹豫模糊集为

$$D_i = \{D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{im}\}, i = 1, 2, \dots, n \quad (32)$$

则多属性决策判决  $D$  表示为

$$D = \{D_{ij} | i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\} \quad (33)$$

### 4.2 概率犹豫模糊集多属性决策判定

本文的重点在于新的相关系数的研究讨论, 并非对多属性决策方法进行创新, 因此仅在现有决策理论的基础上针对本文的理论框架, 提供一种简单的理想方案接近程度排序方法进行多属性决策.

首先, 在得到多属性判决  $D$  的基础上, 基于属性遍历 (不失一般性, 本文假设属性均为效益型属性), 求得最优理想方案为

$$A^* = \max\{A_i | \sum \gamma_{ij}^{\lambda} p_{ij}^{\lambda}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\} \quad (34)$$

分别计算各备选方案与最优理想方案之间的相关系数  $\rho(A_i, A^*), i = 1, 2, \dots, n$ .

相关系数越高, 表示任意方案  $A_i$  与最优理想方案的相似度越高, 则方案  $A_i$  越好. 基于此, 可以根据最大相关系数作为决策的判定准则:

$$\text{dec}(i) = \text{output}(\max\{\rho(A_i, A^*)\}), i = 1, 2, \dots, n \quad (35)$$

判定相关系数最大的为决策方案.

### 4.3 算法步骤

基于混合相关系数的概率犹豫模糊集多属性决策的具体步骤描述如下:

step 1: 将各专家的属性判决用概率犹豫模糊集的形式表示, 得到属性判决  $D_i$ ;

step 2: 集成专家判决, 得到综合评估信息  $D$ ;

step 3: 计算得到最优理想方案  $A^*$ ;

step 4: 根据公式 (25) 分别计算各备选方案与最优理想方案的混合相关系数  $\rho_{MVL}(A_i, A^*)$ , 并以相关系数作为决策判定指标对决策方案进行排序, 判定相关系数最大的方案为最终的决策结果.

## 5 算例分析

### 5.1 应用计算

为了便于对比, 采用文献 [25] 中的实例对本文方法进行验证.

4 名候选人  $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$  申请博士唯一招生名额博士生导师 1 名. 为了提供一个公平的评价和选择最好的学生, 引入概率犹豫模糊集. 四位专家  $d_i (i = 1, 2, 3, 4)$  按要求对四名候选人面试, 其中每位专家的权重相等, 面试过程通过计算能力  $A_1$ 、学术水平  $A_2$  和英语能力  $A_3$  三种属性进行评估.

为了便于比较, 与文献 [2] 保持一致, 设置属性权重向量为  $(0.39, 0.26, 0.35)$ , 三种属性均为效益型. 四位专家在三种属性下的评估结果参考文献 [25] 或附录. 假设均值、方差和长度率基本相关系数的权重分别为  $(0.5, 0.25, 0.25)$ . 则多属性决策的具体步骤描述如下.

步骤 1: 获取分别为四位专家在三种属性下的概率犹豫模糊评估信息.

表 1 全部专家集成评估信息

	$A_1$	$A_2$	$A_3$
$x_1$	{0.55 0.15, 0.65 0.25, 0.76 0.1, 0.8 0.5}	{0.2 0.05, 0.3 0.325, 0.4 0.125, 0.65 0.25, 0.75 0.25}	{0.55 0.5, 0.75 0.25, 0.8 0.15, 0.94 0.1}
$x_2$	{0.4 0.25, 0.58 0.25, 0.69 0.25, 0.95 0.25}	{0.35 0.25, 0.6 0.075, 0.65 0.25, 0.7 0.35, 0.8 0.075}	{0.25 0.25, 0.45 0.375, 0.65 0.375}
$x_3$	{0.3 0.1, 0.5 0.35, 0.6 0.3, 0.68 0.25}	{0.45 0.25, 0.55 0.125, 0.56 0.25, 0.66 0.125, 0.85 0.25}	{0.45 0.25, 0.55 0.25, 0.68 0.25, 0.75 0.25}
$x_4$	{0.15 0.1, 0.37 0.15, 0.4 0.25, 0.6 0.25, 0.73 0.25}	{0.48 0.4, 0.55 0.25, 0.62 0.1, 0.66 0.25}	{0.38 0.25, 0.5 0.125, 0.7 0.125, 0.75 0.25, 0.85 0.25}

步骤 2: 集成得到综合概率犹豫模糊评估信息, 如表 1 所示.

步骤 3: 计算最优理想方案.

根据式 (34) 得到最优理想方案如表 2 所示.

表 2 最优理想方案

属性	PHFE
$A_1$	{0.55 0.15, 0.65 0.25, 0.76 0.1, 0.8 0.5}
$A_2$	{0.45 0.25, 0.55 0.125, 0.56 0.25, 0.66 0.125, 0.85 0.25}
$A_3$	{0.55 0.5, 0.75 0.25, 0.8 0.15, 0.94 0.1}

步骤 4: 分别计算各方案与最优理想方案的三种基本相关系数如表 3 所示.

表 3 各方案判决相关系数

相关系数	候选人			
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
均值相关系数	0.967	0.306	-0.890	-0.373
方差相关系数	0.884	-0.986	0.771	-0.654
长度率相关系数	1	0.739	1	-1
混合相关系数	0.955	0.091	-0.002	-0.599

步骤 5: 根据混合相关系数计算结果对各方案判决排序为

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4$$

因此判定第 1 名候选人为最佳的博士生人选. 判定结果与文献 [2] 中采用熵测度得到的结果保持一致, 证明了本文算法的有效性.

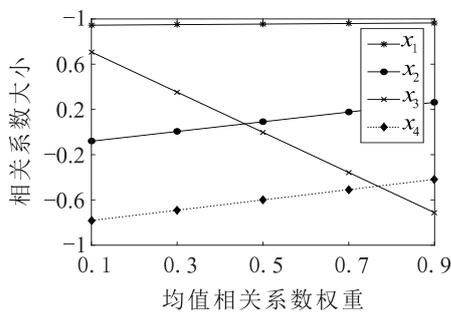
### 5.2 参数敏感性分析

#### 5.2.1 基本相关系数权重敏感性分析

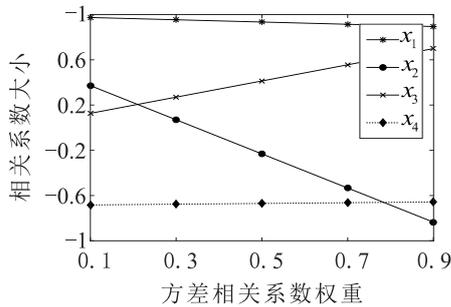
为验证本文混合相关系数的有效性与全面性, 根据表 3 的计算结果, 分别仅采用一种基本相关系数, 与混合相关系数的计算结果进行比较.

由表3可知, 三种基本相关系数的排序结果都不相同, 尤其是当仅采用长度率相关系数时, 判定  $x_1$  与  $x_3$  为最佳人选, 与混合相关系数的结论差距最大, 原因在于长度率相关系数仅考虑了隶属度个数这一因素, 没有考虑具体的隶属度分布情况. 因此, 采用任意一种基本相关系数进行评价都是片面的, 在实际应用时, 必须综合考虑三种基本相关系数, 才能得到合理的判别结果.

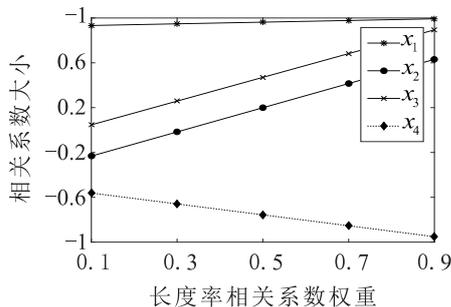
进一步分析不同基本相关系数权重变化带来的影响, 分别假设任一基本相关系数的权重从 0.1 按步长 0.2 增加到 0.9, 其余相关系数的权重均分, 得到的计算结果如图 1 所示.



(a) 随均值相关系数权重的变化图



(b) 随方差相关系数权重的变化图



(c) 随长度率相关系数权重的变化图

图 1 判决结果随基本相关系数权重的变化图

分析图 1 可知, 相关系数大小随基本相关系数权重的变化而变化, 导致决策排序也随之变化. 以图 1 为例, 随着均值相关系数的权重增加,  $x_1$  的相关系数缓慢增加,  $x_2$  和  $x_4$  的相关系数逐渐增大,  $x_3$  的相关系数逐渐减小, 排序结果逐渐向仅采用均值相关系数时的排序结果  $x_1 > x_2 > x_4 > x_3$  逼近, 并且当权

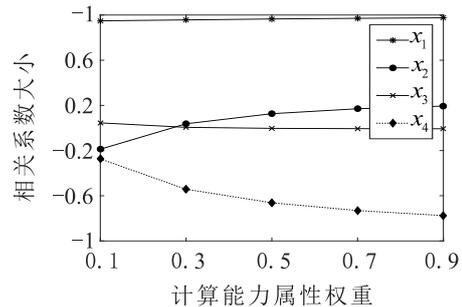
重在 0.45 和 0.75 附近时, 决策排序发生相应变化, 即  $x_2$  的相关系数超过  $x_3$ ,  $x_4$  的相关系数超过  $x_3$ .

同样的, 随着方差相关系数权重的变化, 排序结果同样发生了两次变化, 而长度率相关系数权重变化过程中, 始终保持  $x_1 > x_3 > x_2 > x_4$  的排序结果.

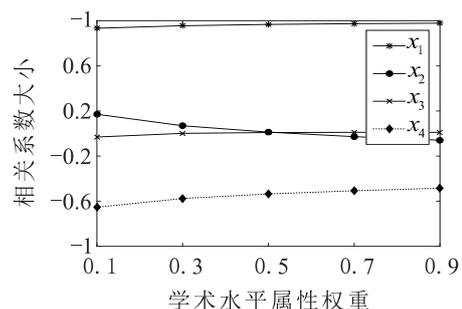
综合上述分析, 表明本文的混合相关系数对基本相关系数权重参数具有一定的敏感性, 在实际应用中, 需要结合具体情况, 对权重值进行设置, 由于长度率计算过程中仅涉及隶属度个数这一变量, 因此在实际应用时, 考虑将均值相关系数设为主要判决依据, 方差和长度率相关系数作为辅助决策.

### 5.2.2 属性权重敏感性分析

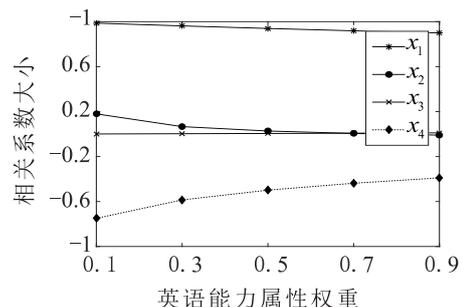
在上述的讨论中, 属性权重值始终设置为 (0.39, 0.26, 0.35), 而在实际决策过程中, 属性权重对决策的作用不容忽视, 因此研究加权相关系数对属性权重变化的敏感性具有一定的必要性, 假设各属性的权重从 0.1 按步长 0.2 变化到 0.9, 其余属性权重平均, 三种基本相关系数的权重设为 (0.5, 0.25, 0.25), 则得到的计算结果如图 2 所示.



(a) 加权相关系数随  $A_1$  权重的变化图



(b) 加权相关系数随  $A_2$  权重的变化图



(c) 加权相关系数随  $A_3$  权重的变化图

图 2 加权相关系数随各属性权重的变化图

分析图 2 可知,随着属性权重的变化,排序结果的整体情况变化不大, $x_1$  始终为最佳人选, $x_4$  始终为最差人选, $x_2$  与  $x_3$  的相对大小有所波动,随着计算能力  $A_1$  权重的增大, $x_2$  的相关系数逐渐增大, $x_3$  的相关系数逐渐减小,并且在 0.3 附近时, $x_2$  的相关系数值超过  $x_3$ ;随着学术水平  $A_2$  权重的增大,在权重值为 0.5 时, $x_2$  与  $x_3$  的排序发生了交换;随着英语水平  $A_3$  权重的增大, $x_2$  与  $x_3$  的相关系数差值呈现出越来越小的趋势。

综合上述分析,表明本文的混合相关系数对属性权重参数的敏感性较低,但属性权重的确定始终是多属性决策中的重要部分,因此在实际应用中应该采取科学的权重计算方法对其进行求解。

### 5.3 对比分析

为了说明本文相关系数的有效性,分别与文献 [21]、[22] 和 [24] 的方法进行比较分析.文献 [21] 选择多种相关系数中的  $\rho_{WHFS1}$ ,设所有计算方法的属性权重均为 (0.39,0.26,0.35),且本文算法的基本相关系数权重为 (0.5,0.25,0.25),计算结果如表 4 所示。

表 4 不同算法相关系数对比

方法	候选人			
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
文献 [21]	0.139	0.106	0.113	0.076
文献 [22]	2.675	2.240	1.372	1.794
文献 [24]	0.967	0.306	-0.890	-0.373
本文算法	0.955	0.091	-0.002	-0.599

由表 4 的结果可以得到,本文的混合相关系数与其他文献得到的最佳候选人都是  $x_1$ .其中,文献 [21] 中的相关系数计算方法由于无法计算负相关,不能反映数据间的真实线性接近程度,在表达上存在一定的局限性;文献 [22] 采用先计算概率犹豫模糊数的相关系数,再对其求和的方法,因此会出现大于 1 的情况,其与文献 [24] 本质上均为一类均值相关系数,因此得到的排序结果均为  $x_1 > x_2 > x_4 > x_3$ ;而本文在均值相关系数的基础上,将概率犹豫模糊集中隶属度的整体分布情况以及隶属度的个数考虑进来,判定  $x_4$  为最差的候选人决策,与文献 [2] 等采用其他测度理论得到的结论一致,因此判决结果更为全面合理。

## 6 结论

本文的概率犹豫模糊集混合相关系数能够综合反映概率犹豫模糊集之间的个体和整体相关性,克

服了现有概率犹豫模糊集相关系数未考虑隶属度个数以及存在反直觉现象等缺陷,新的混合相关系数综合考虑了概率犹豫模糊数的整体性、分布和长度三个因素,分别定义了均值、方差和长度率三种基本相关系数,对概率犹豫模糊集的相关系数做了补充,基于混合相关系数的多属性决策方法,能够对关联分析、价值排序等问题进行有效求解,实例分析结果验证了本文所提方法的有效性。

### 参考文献 (References)

- [1] 方冰,韩冰,闻传花.基于新型距离测度的概率犹豫模糊多属性群决策方法[J/OL].控制与决策:1-8[2021-11-10].<https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1118>. (Fang B,Han B,Wen C H. Probabilistic hesitant fuzzy group decision-making based on new distance measure [J/OL]. Control and Decision:1-8[2021-11-10].<https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1118>.)
- [2] 刘玉敏,朱峰,靳琳琳.基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法[J].控制与决策,2019,34(04):861-870. (Liu Y M,Zhu F,Jin L L. Multi-attribute decision method based on probabilistic hesitant fuzzy entropy [J]. Control and Decision,2019,34(04):861-870.)
- [3] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965,8(3): 338-356.
- [4] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.
- [5] 朱斌.基于偏好关系的决策方法及应用研究[D].南京:东南大学管理科学与工程学院,2014. (Zhu B. Decision Making Methods and Applications based on Preference Relations [D]. Nanjing: School of Economics and Management, Southeast University, 2014.)
- [6] Zhang S, Xu Z S, He Y. Operations and integrations of probabilistic hesitant fuzzy information in decision making[J]. Information Fusion, 2017, 38: 1-11
- [7] Park J, Park Y, Son M. Hesitant probabilistic fuzzy information aggregation using Einstein operations[J]. Information, 2018, 9(9): 226.
- [8] Shao S T, Zhang X H, Zhao Q. Multi-attribute decision making based on probabilistic neutrosophic hesitant fuzzy Choquet aggregation operators[J]. Symmetry, 2019, 11(5): 623.
- [9] Li J, Wang Z X. Multi-attribute decision making based on prioritized operators under probabilistic hesitant fuzzy environments[J]. Soft Computing, 2019, 23(11): 3853-3868.
- [10] Zhou W, Xu Z S. Group consistency and group decision making under uncertain probabilistic hesitant fuzzy preference environment[J]. Information Sciences, 2017, 414: 276-288.
- [11] Li J, Wang Z X. Consensus building for probabilistic hesitant fuzzy preference relations with expected additive

- consistency[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2018, 20(5): 1495-1510.
- [12] He Y, Xu Z S. Multi-attribute decision making methods based on reference ideal theory with probabilistic hesitant information[J]. Expert Systems with Applications, 2019, 118: 459-469.
- [13] Wu J, Liu X D, Wang Z W, et al. Dynamic emergency decision-making method with probabilistic hesitant fuzzy information based on GM(1,1) and TOPSIS[J]. IEEE Access, 2019, 7: 7054-7066.
- [14] Gao J, Xu Z S, Liao H C. A dynamic reference point method for emergency response under hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(5): 1261-1278.
- [15] Wu W Y, Li Y, Ni Z W, et al. Probabilistic interval-valued hesitant fuzzy information aggregation operators and their application to multi-attribute decision making[J]. Algorithms, 2018, 11(8):120.
- [16] Hao Z N, Xu Z S, Zhao H, et al. Probabilistic dual hesitant fuzzy set and its application in risk evaluation[J]. Knowledge-Based Systems, 2017, 127: 16-28.
- [17] Xu Z S, Xia M. On distance and correlation measures of hesitant fuzzy information[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2011, 26(5):410-425.
- [18] Na C, Z x A, Mx A. Correlation coefficients of hesitant fuzzy sets and their applications to clustering analysis[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(4):2197-2211.
- [19] 关欣, 孙贵东, 衣晓, 等. 基于犹豫模糊集统计相关系数的多源异类数据融合识别 [J]. 系统工程与电子技术, 2018, 40(03):509-517.  
(Guan X, Sun G D, Yi X, et al. Multi-source heterogeneous data fusion recognition based on statistical correlation coefficients between hesitant fuzzy sets[J]. Systems Engineering and Electronics, 2018, 40(03):509-517.)
- [20] 徐俊艳, 孙贵东, 赵静. 新的犹豫模糊集相关系数及多属性决策应用 [J]. 电子学报, 2018, 46(06):1327-1335.  
(Xu J Y, Sun G D, Zhao J. Novel Correlation Coefficients Between Hesitant Fuzzy Sets and Their Applications in Multi-attribute Decision Making [J]. ACTA ELECTRONICA SINICA, 2018, 46(06):1327-1335.)
- [21] Farhadinia B. Utility of correlation measures for weighted hesitant fuzzy sets in medical diagnosis problems[J]. Mathematical Modelling and Applications, 2016, 1(2):36-45.
- [22] Wang Z X, Jian L. Correlation Coefficients of Probabilistic Hesitant Fuzzy Elements and Their Applications to Evaluation of the Alternatives[J]. Symmetry, 2018, 9(11):259.
- [23] 朱峰, 刘玉敏, 靳琳琳. 基于关联系数的概率犹豫模糊多属性决策方法 [J]. 统计与决策, 2019, 35(18):41-45.  
(Zhu F, Liu Y M, Jin L L. Probabilistic Hesitant Fuzzy Multi-attribute Decision-making Method Based on Correlation Coefficient [J]. Statistics & Decision, 2019, 35(18):41-45.)
- [24] Song C, Xu Z, Zhao H. New Correlation Coefficients Between Probabilistic Hesitant Fuzzy Sets and Their Applications in Cluster Analysis[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2019, 21(2): 355-368.
- [25] Xu Z S, Zhou W. Consensus building with a group of decision makers under the hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2017, 16(4): 481-503.

### 作者简介

刘赢(1995—), 男, 博士研究生, 从事模糊决策、不确定数据分析等研究, E-mail: prettywarm@126.com;

关欣(1978—), 女, 教授, 博士研究生导师, 从事智能信息处理、多源信息融合等研究, E-mail: gxtongwin@163.com.