基于隐式积分的广义离散趋近律

王聪, 夏红伟†, 任顺清

(哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要: 针对传统基于前向欧拉近似的离散趋近律存在数值抖振的问题, 提出一种衍生于后向欧拉积分的广义离散趋近律. 首先, 广义离散趋近律具有全局无抖振收敛特性, 并且释放更多的参数设计自由度; 其次, 揭示趋近律参数对滑模变量收敛速率的影响关系, 为参数整定提供理论依据; 最后, 在考虑系统不确定性时, 给出滑模面最终的边界层, 证明所设计的趋近律可以同时确保系统的快速瞬态响应和高精度控制. 数值仿真验证所提出算法的有效性.

关键词: 滑模控制; 趋近律; 隐式积分算法; 扰动补偿; 离散时间系统

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.2003

引用格式: 王聪, 夏红伟, 任顺清. 基于隐式积分的广义离散趋近律 [J]. 控制与决策.

Generalized discrete reaching law based on implicit integration

WANG Cong, XIA Hong-wei†, REN Shun-qing

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: A novel backward Euler integration-based generalized discrete reaching law is proposed for the numerical chattering in the traditional forward Euler approximation of reaching law. First, the proposed reaching law exhibits globally chattering-free convergence, and releases more freedom degrees for parameter design. Moreover, the influence relationship of parameters on the convergence rate of sliding variable is established, which provides a theoretical foundation for parameter tuning. Finally, when taking into account the uncertainty of systems, the final boundary layer of sliding surface is deduced, and it is proved that the designed reaching law can guarantee the fast transient response and high-precision control of the closed-loop system at the same time. Numerical simulations validate the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: sliding mode control; reaching law; implicit integration algorithm; disturbance compensation; discrete-time system

0 引 言

滑模变结构控制因其强鲁棒性而得到广泛应用[1-2]. 当系统处于滑动模态时, 对满足匹配条件的参数变化和外部干扰具有高度鲁棒性. 一般来说, 滑模变结构控制是由趋近运动和滑模运动两部分组成. 为了定制趋近运动过程的动态品质, 文献 [3] 提出了两种经典的趋近律方法, 即指数趋近律和幂次趋近律. 指数趋近律在远离滑模面时具有较快的收敛速度, 但是在接近滑模面时会产生高频抖振; 幂次趋近律能够保证滑模面的有限时间到达性, 但是在远离滑模面时收敛速度较慢. 文献 [4] 设计了一种同时包含指数项和幂次项的快速幂次趋近律, 该方法在远离和接近滑模面时都具有较快的收敛速率, 并有效削弱了抖振影响. 文献 [5] 提出了一类具有全局快速固定时间收敛特性的双幂次趋近律, 并估计了算法的收敛时间.

随着各类可编程微处理器的出现和发展, 在实际应用中越来越多的滑模控制器采用直接数字化方式实现[6], 因此有必要发展各种连续滑模控制算法的离散递推形式. 应用前向 (显式) 欧拉积分方法, 文献 [7] 给出了指数趋近律的离散表达式, 并指出系统不可能精确收敛到滑模面上, 取而代之的是在滑模面附近的一个边界层内做准滑模运动, 且该边界层被称为准滑模域. 文献 [8] 提出了一种带有扰动动态补偿的离散趋近律, 并分析了准滑模域内外系统动态. 文献 [9] 利用双曲正切函数和二阶扰动补偿技术,

收稿日期: 2021-11-17; **录用日期:** 2022-05-31.

基金项目: 国家重点研发计划资助 (2020YFC2200600).

†通讯作者. E-mail: hxia@hit.edu.cn.

进一步减轻抖振的影响. 文献 [10] 为离散快速幂次趋近律设计了自适应控制增益, 该自适应函数在滑模运动不同阶段智能修正控制增益大小, 从而在保持较高控制精度的同时, 减少滑模面到达时间. 文献 [11] 提出了一种基于幂次趋近律的离散多周期重复控制方法, 以解决多周期干扰的抑制问题. 文献 [12] 提出了一种新的离散滑模趋近条件, 它比传统趋近条件具有更快的收敛速度.

值得注意的是, 以上文献大多基于显式欧拉积分策略设计离散趋近律. 许多学者已经证明: 即使系统没有受到任何干扰和不确定性, 显式欧拉近似仍然可能表现出数值抖振 (或称为离散化抖振) 现象, 特别是对于非线性系统[13-14]. 后向 (隐式) 欧拉离散化能够在不改变原算法结构的基础上, 提供全局渐近收敛来彻底消除离散化抖振. 隐式离散超螺旋算法可以转化为解二次方程的问题, 从而得到其前向迭代方程, 因此引起了控制界的广泛关注[15]. 为了处理离散终端滑模控制中的数值抖振问题, 文献 [16] 提出了齐次终端滑模的隐式离散化算法, 然而, 其局限性在于需要求解滑模面的非线性方程.

借鉴上述工作, 可以将隐式欧拉积分技术引入到离散趋近律的设计中, 但是隐式离散趋近律不具有前向递归形式, 因此面临着计算复杂度高、实际实施困难等问题. 本文提出一种新型广义离散趋近律, 并给出其参数整定策略. 与显式离散趋近律相比, 所提出的趋近律算法可以完全消除控制中的数值抖振; 与隐式离散趋近律相比, 所提出的趋近律算法具有显式递归方程, 极具实用性. 另外, 通过调节控制参数, 所提出的趋近律滑模控制方法能够在提高趋近速率的同时, 进一步改善系统的控制精度.

1 系统和问题描述

考虑如下不确定离散时间系统:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + d(k), \tag{1}$$

其中: $x(k) \in R^n$ 为系统状态, $u(k) \in R$ 为控制输入, $d(k) \in R^n$ 为不确定性及干扰, A, B 为已知常数矩阵. 如果离散时间系统 (1) 是通过零阶保持器得到的, 则有以下假设.

假设 1 [17] 经过零阶保持器离散化后, 离散时间系统 (1) 中的扰动项满足: $\delta(k) \triangleq d(k) - d(k-1) = O(h^2)$, 其中: h 为离散步长, $O(h^2)$ 表示 $\delta(k)$ 的幅值在 $O(h^2)$ 量级上.

选取常用的线性滑模面如下:

$$s(k) = Cx(k), \tag{2}$$

其中 $C \in R^{1\times n}$ 且 $CB \neq 0$. 对于快速幂次趋近律: $\dot{s} = -\alpha s - \beta|s|^\gamma \mathrm{sgn}(s), \alpha > 0, \beta > 0, 0 < \gamma < 1$, 采用显式欧拉方法, 可以得到离散趋近律如下:

$$s(k+1) = (1-\alpha h)s(k) - \beta h|s(k)|^\gamma \mathrm{sgn}(s(k)). \tag{3}$$

通过代数运算, 式 (3) 可以重写为

$$s(k+1) = (1-\alpha h - \beta h|s(k)|^{\gamma-1})s(k). \tag{4}$$

为了满足离散滑模到达条件[6]

$$s^2(k+1) - s^2(k) < 0, \tag{5}$$

则必须有

$$\left|1-\alpha h - \beta h|s(k)|^{\gamma-1}\right| < 1. \tag{6}$$

由式 (6) 可以得到 $s(k)$ 的准滑模域为

$$\Omega_e \triangleq \left\{ s(k) \big| |s(k)| \leq \left(\frac{\beta h}{2-\alpha h}\right)^{1/(1-\gamma)} \right\}. \tag{7}$$

式 (7) 表明快速幂次趋近律的显式欧拉近似无法精确收敛到滑模面 $s(k) = 0$ 上, 而只能在 Ω_e 内产生离散化抖振. 观察式 (3), 可以发现数值抖振现象的原因是: 当 $s(k) \in \Omega_e$ 时, 有 $|s(k)| < \alpha h|s(k)| + \beta h|s(k)|^\gamma$, 从而导致在离散步长 h 内的过控制作用. 显式离散趋近律不能继承其连续对应版本的良好特性, 因此有必要设计一个全局收敛的离散趋近律.

2 广义离散趋近律设计与分析

利用隐式欧拉离散化技术, 可以得到快速幂次趋近律的离散等效形式

$$\begin{aligned} s(k+1) =& s(k) - \alpha h s(k+1) \\ & - \beta h|s(k+1)|^\gamma \mathrm{sgn}(s(k+1)). \end{aligned} \tag{8}$$

观察式 (8) 不难发现, $s(k)$ 和 $s(k+1)$ 的符号相同, 且在整个实数域满足 $|s(k+1)| < |s(k)|$. 虽然离散趋近律 (8) 可以完全消除数值抖振, 但是无法获得 $s(k+1)$ 的解析表达式. 为了同时实现式 (8) 的全局收敛和显式实施, 一个折中的策略是选择 $\gamma = 1/2$, 然后有

$$(s(k) - (1+\alpha h)s(k+1))^2 = \beta^2 h^2 |s(k+1)|. \tag{9}$$

求解关于 $s(k+1)$ 的二次方程 (9) 可得

$$\begin{aligned} s(k+1) =& -\frac{\sqrt{\beta^4 h^4 + 4\beta^2 h^2 (1+\alpha h)|s(k)|}}{2(1+\alpha h)^2} \\ & \times \mathrm{sgn}(s(k)) + \frac{s(k)}{1+\alpha h} + \frac{\beta^2 h^2 \mathrm{sgn}(s(k))}{2(1+\alpha h)^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

一方面, 如果 $\gamma \neq 1/2$, 则很难从式 (8) 中获得滑模变量的显式迭代方程; 另一方面, γ 值应可调以获得更多的参数选择自由度来实现更好的控制性能. 因此, 基于隐式离散趋近律 (8), 提出一个推广的参数可调

离散趋近律, 如下所示:

$$
\begin{aligned}
s(k+1) = f_q(k) = & \frac{\gamma_1 \mathrm{sgn}(s(k))}{(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}}} \\
& \times \left[\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}} + (\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right. \\
& - \left(\left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}} + (\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right. \\
& \left.\left. - \left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right)^{\gamma_3}\right], \qquad (11)
\end{aligned}
$$

其中 $1/2 \le \gamma_1 < 1, 1/2 \le \gamma_2 < 1, 0 < \gamma_3 \le 1/2$. 当 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1/2$ 时, 式 (11) 成为隐式离散趋近律 (8); 当 $\gamma_3 \to 0$ 时, 有 $s(k+1) \to 0$, 此时式 (11) 成为等效控制方法. 首先, 定理 1 研究 (11) 趋近运动特性.

引理 1 [18] 对任意的 $a > 0, b \ge 0$ 和 $p > 1$, 有

$$
(a+b)^p \ge a^p + b^p \qquad (12)
$$

定理 1 离散趋近律 (11) 能够将从任意初始状态 $s(0)$ 出发的滑模变量驱使到滑模面 $s(k) = 0$ 上, 且趋近运动过程完全无抖振.

证明 因为

$$
\left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}} \ge 0, \qquad (13)
$$

所以有

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}} + (\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}} \\
\ge & \left[\left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}} + (\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right. \\
& \left. - \left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right]^{\gamma_3}. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

再根据式 (11) 和 (14), 可知 $s(k)$ 和 $s(k+1)$ 的符号相同. 考虑 $1/\gamma_3 > 1$ 以及引理 1, 则有

$$
\begin{aligned}
& \left((\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}} + \frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}} \\
\ge & (\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2\gamma_3}} + \left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

从式 (15) 进一步可推导得

$$
\begin{aligned}
& \left[\left((\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}} + \frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right. \\
& \left. - \left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right]^{\gamma_3} - (\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}} \ge 0. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

此外, 以下不等式显然成立:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}} - \frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}} \\
= & \frac{-\alpha h}{\gamma_1(1+\alpha h)}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}} < 0. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

基于式 (11), 有

$$
\begin{aligned}
s(k+1) - s(k) = & \frac{\gamma_1 \mathrm{sgn}(s(k))}{(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}}} \\
& \times \left[\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}} - \frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right. \\
& + (\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}} - \left(\left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}} + (\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right. \\
& \left.\left. - \left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right)^{\gamma_3}\right] \qquad (18)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
s(k+1) + s(k) = & \frac{\gamma_1 \mathrm{sgn}(s(k))}{(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}}} \\
& \times \left[\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}} + \frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right. \\
& + (\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}} - \left(\left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}} + (\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right. \\
& \left.\left. - \left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right)^{\gamma_3}\right]. \qquad (19)
\end{aligned}
$$

如果 $s(k) = 0$, 那么根据式 (11) 可得 $s(k+1) = 0$; 如果 $s(k) > 0$, 结合式 (14)、(16) 和 (17) 可知 $s(k+1) - s(k) < 0$ 和 $s(k+1) + s(k) > 0$ 成立; 同理可知, 如果 $s(k) < 0$, 那么有 $s(k+1) - s(k) > 0$ 和 $s(k+1) + s(k) < 0$. 综上所述, 离散趋近律 (11) 总是满足 $s^2(k+1) \le s^2(k)$, 且等号仅在 $s(k) = 0$ 时成立, 故离散滑模变量具有全局收敛性. 由于 $s(k)s(k+1) \ge 0$, 因此滑模变量不会穿过滑模面, 从而完全消除抖振影响. □

注 1 显式离散趋近律 (3) 会产生数值抖振, 隐式离散趋近律 (8) 实施困难, 所提出的离散趋近律 (11) 结合两者优势, 既能给出前向递归方程, 又能提供全局无抖振收敛.

接下来, 为了揭示参数 γ_1、γ_2 和 γ_3 对趋近运动的影响规律, 给出下面的定理 2.

定理 2 离散趋近律 (11) 的趋近速度可以通过改变其参数调节. 具体来讲, γ_1 和 γ_2 的值越大, 或者 γ_3 的值越小, 滑模变量的收敛速率就越快.

证明 定义 $\Delta s(k) = s(k+1) - s(k)$, 则根据式 (11) 可得

$$
\begin{aligned}
& \Delta s(k) = \\
& - \left[\left(\left(|s(k)| + \frac{\gamma_1(\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}}{(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}}}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}} - |s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}\right)^{\gamma_3}\right. \\
& \left. - \frac{\gamma_1(\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}}{(1+\alpha h)^{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}}}\right] \frac{\mathrm{sgn}(s(k))}{1+\alpha h} - \frac{\alpha h s(k)}{1+\alpha h}. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

由定理 1 可知 $|s(k+1)| \le |s(k)|$ 且 $s(k+1)s(k) \ge 0$,

继而可得 $s(k)\Delta s(k)\le 0$. 因此, $\Delta s(k)$ 能够反映滑模变量的收敛速率, 而且它的值越大, 滑模面的趋近速度越快. 定义变量

$$y=\gamma_1(\beta h)^{1/\gamma_2}/((1+\alpha h)^{1/\gamma_1-1}), \tag{21}$$

$$z=\left((|s(k)|+y)^{\frac{1}{\gamma_3}}-|s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}\right)^{\gamma_3}-y, \tag{22}$$

则 z 对 y 的偏导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}=&\frac{(|s(k)|+y)^{1/\gamma_3-1}}{((|s(k)|+y)^{1/\gamma_3}-|s(k)|^{1/\gamma_3})^{1-\gamma_3}}-1\\=&\left(\frac{(|s(k)|+y)^{1/\gamma_3}}{(|s(k)|+y)^{1/\gamma_3}-|s(k)|^{1/\gamma_3}}\right)^{1-\gamma_3}-1\\\ge&0.\end{aligned} \tag{23}$$

由式 (21) 和 (23) 容易得到: $\frac{\partial y}{\partial\gamma_1}>0$, $\frac{\partial y}{\partial\gamma_2}>0$, $\frac{\partial z}{\partial\gamma_1}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\gamma_1}\ge 0$, $\frac{\partial z}{\partial\gamma_2}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\gamma_2}\ge 0$. 求取 z 关于 γ_3 的一阶偏导数如下:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{z\partial\gamma_3}=&\ln\left((|s(k)|+y)^{\frac{1}{\gamma_3}}-|s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}\right)\\&-\frac{(|s(k)|+y)^{\frac{1}{\gamma_3}}\ln(|s(k)|+y)-|s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}\ln(|s(k)|)}{\gamma_3\left((|s(k)|+y)^{\frac{1}{\gamma_3}}-|s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}\right)}.\end{aligned} \tag{24}$$

考虑 $y>0$ 以及引理 1, 可得

$$\begin{aligned}z=&\left((|s(k)|+y)^{\frac{1}{\gamma_3}}-|s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}\right)^{\gamma_3}-y\\\ge&\left((y)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right)^{\gamma_3}-y\ge 0.\end{aligned} \tag{25}$$

对于式 (24) 中的第二项, 如下不等式成立:

$$\begin{aligned}&\frac{(|s(k)|+y)^{\frac{1}{\gamma_3}}\ln(|s(k)|+y)-|s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}\ln(|s(k)|)}{(|s(k)|+y)^{\frac{1}{\gamma_3}}-|s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}}\\\ge&\frac{(|s(k)|+y)^{\frac{1}{\gamma_3}}\ln(|s(k)|+y)}{(|s(k)|+y)^{\frac{1}{\gamma_3}}-|s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}}\\&-\frac{|s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}\ln(|s(k)|+y)}{(|s(k)|+y)^{\frac{1}{\gamma_3}}-|s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}}\\=&\ln(|s(k)|+y).\end{aligned} \tag{26}$$

由式 (24) 和 (26) 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{z\partial\gamma_3}\le&\ln\left((|s(k)|+y)^{\frac{1}{\gamma_3}}-|s(k)|^{\frac{1}{\gamma_3}}\right)\\&-\frac{1}{\gamma_3}\ln(|s(k)|+y)\\=&\ln\left(1-\left(\frac{|s(k)|}{|s(k)|+y}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right)\\\le&\ln(1)=0.\end{aligned} \tag{27}$$

于是, $\frac{\partial z}{\partial\gamma_3}\le 0$, 定理 2 得证. □

在离散趋近律设计中, 为了提高滑模控制的鲁棒性, 常引入一个扰动补偿项, 即

$$s(k+1)=f_q(k)+C\delta(k), \tag{28}$$

定理 3 给出滑模变量的最终收敛精度.

定理 3 通过增加 γ_1 和 γ_2 的值, 并减少 γ_3 的值, 带有扰动补偿的趋近律 (28) 将收敛到滑模面的如下边界层: $\Omega_d\triangleq\{s(k)||s(k)|\le(1+\alpha h)\xi\}$, 其中 $\xi=\sup_{k\ge 0}(C\delta(k))=O(h^2)$.

证明 类似于式 (18) 和 (19) 的推导可知, 当 $|s(k)|>\xi$ 和

$$\begin{aligned}\frac{(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}}\xi}{\gamma_1}\le&\left[\left((\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}+\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}-1}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right.\\&\left.-\left(\frac{1}{\gamma_1}|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}-1}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right]^{\gamma_3}-(\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}\end{aligned} \tag{29}$$

成立时, 趋近律 (28) 满足离散滑模到达条件. 方程两边同除以 $(\beta h)^{1/\gamma_2}$, 式 (29) 化为

$$\begin{aligned}\frac{(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}}\xi}{\gamma_1(\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}}+1\le&\left[\left(1+\frac{|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}}}{\gamma_1(\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}(1+\alpha h)}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right.\\&\left.-\left(\frac{|s(k)|(1+\alpha h)^{\frac{1}{\gamma_1}}}{\gamma_1(\beta h)^{\frac{1}{\gamma_2}}(1+\alpha h)}\right)^{\frac{1}{\gamma_3}}\right]^{\gamma_3}.\end{aligned} \tag{30}$$

令 $\mu=(1+\alpha h)^{1/\gamma_1}/\left(\gamma_1(\beta h)^{1/\gamma_2}(1+\alpha h)\right)$, 式 (30) 可简化为

$$(1+\mu|s(k)|)^{\frac{1}{\gamma_3}}-(\mu|s(k)|)^{\frac{1}{\gamma_3}}\ge(1+(1+\alpha h)\mu\xi)^{\frac{1}{\gamma_3}}. \tag{31}$$

定义 $\omega=(1+\mu|s(k)|)^{1/\gamma_3}-(\mu|s(k)|)^{1/\gamma_3}$. 容易证明 ω 关于 $\mu|s(k)|$ 单调递增, 故式 (31) 确定的离散滑模稳定区域可表示为 $\Omega_s\triangleq\{s(k)||s(k)|\ge\rho_s\}$. 由于 $(1+\mu|s(k)|)^{1/\gamma_3}\ge 1$, 因此从式 (31) 可以推断, 如果 $(\mu|s(k)|)^{1/\gamma_3}\ll 1$, 那么 $\rho_s\to(1+\alpha h)\xi$. 换句话说, $(\mu\rho_s)^{1/\gamma_3}$ 被设计的越小, 离散趋近律 (28) 越倾向于收敛到区域 Ω_d 中. 根据 μ 的表达式可知, γ_1 和 γ_2 越大, μ 的值越小. 再考虑 $\xi=O(h^2)$ 和 $\mu(1+\alpha h)\xi<1$, 因此随着 γ_3 的下降, $(\mu\rho_s)^{1/\gamma_3}$ 的值也变小. 综上所述, 若不断增加 γ_1 和 γ_2 的值, 并减少 γ_3 的值, 那么离散趋近律 (28) 将收敛于 Ω_d. 定理 3 得证. □

注 2 由定理 2 和定理 3 可知, 通过调节参数 γ_1、γ_2 和 γ_3, 提出的离散趋近律可以同时获得快的趋近速率和高的滑模精度. 两个控制性能指标, 即稳态精度与趋近速率, 对参数调节的方向要求一致, 这给参数整定带来极大便利.

最后, 将式 (2) 代入 (1), 再结合式 (28) 得到离散滑模控制器如下:

$$u(k)=-(CB)^{-1}\left(CAx(k)-f_q(k)+Cd(k-1)\right). \tag{32}$$

3 仿真算例及分析

为了验证本文提出的离散趋近律的有效性, 选取如下二阶离散时间系统[10]:

$$\begin{aligned} x(k+1) =& Ax(k)+Bu(k)+d(k), \\ A=&\begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{33}$$

为了比较的目的, 仿真中还采用了基于显式离散趋近律 (3) 的滑模控制器如下:

$$\begin{aligned} u_e(k) =& -(CB)^{-1}\left[CAx(k)-(1-\alpha h)s(k)\right. \\ &\left.+\beta h|s(k)|^{\gamma}\mathrm{sgn}(s(k))+Cd(k-1)\right]. \end{aligned} \tag{34}$$

初始状态设定为 $x(0)=[1,-3]^{\mathrm{T}}$. 离散步长选取为 $h=0.005$s. 控制参数设计为 $C=[4,1], \alpha=2, \beta=5$.

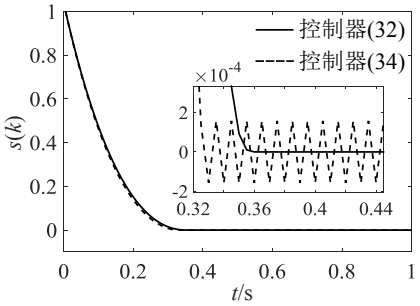

图 1 滑模变量 $s(k)$ 响应曲线

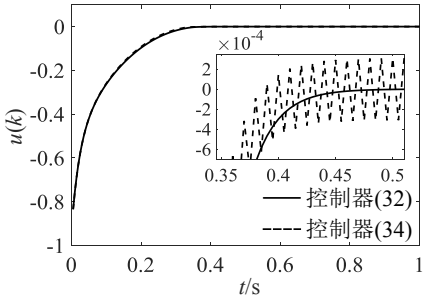

图 2 控制输入 $u(k)$ 响应曲线

首先, 针对式 (33) 描述的无扰动名义系统, 即 $d(k)=[0,0]^{\mathrm{T}}$, 采用控制器 (32) 和 (34). 为了保证对比的公平性, 为趋近律 (3) 和 (11) 选取相同的参数如下: $\gamma=1/2, \gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=1/2$. 此时, 趋近律 (3) 和 (11) 分别是快速幂次趋近律的显式欧拉近似和隐式欧拉近似. 控制器 (32) 和 (34) 下滑模变量和控制输入响应曲线如图 1 和图 2 所示. 由仿真结果可知, 所提出的趋近律具有全局收敛性, 其控制信号平滑无抖振, 这与定理 1 的结论一致; 趋近律 (3) 产生离散化抖振, 其滑模变量和控制信号轨迹呈现出之字型. 此外, 两种趋近律方法的到达时间十分接近, 式 (3) 的趋近速度稍快一点. 图 3 和图 4 分别给出了控制器 (32) 和 (34) 下系统状态收敛曲线. 显然, 由于滑模变量的全局收敛性, 控制器 (32) 下系统状态能够收敛到原点; 受数值抖振影响, 控制器 (34) 下系统轨迹只能在原点附近产生自激振荡.

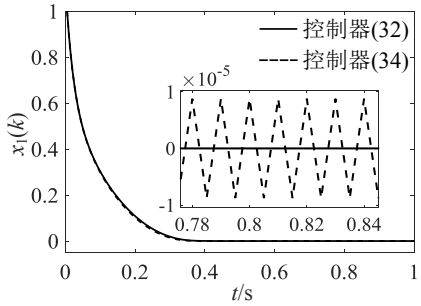

图 3 系统状态 $x_1(k)$ 响应曲线

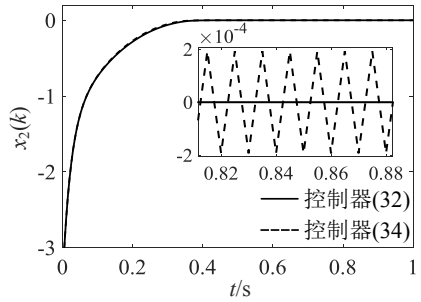

图 4 系统状态 $x_2(k)$ 响应曲线

其次, 针对式 (33) 描述的受扰不确定系统, 采用控制器 (32) 和 (34), 其中干扰设置为 $d(k)=[0, 0.1\cos(k\pi)\sin(0.5k\pi)-0.02]^{\mathrm{T}}$. 因为趋近律 (3) 和 (11) 的参数个数不同, 且参数对系统性能的影响规律也不同, 所以在仿真中选择完全相同的趋近律参数是没有意义的. 为了表明趋近律参数对控制器 (32) 和 (34) 下系统性能的影响, 在控制参数取值范围内, 为两个控制器均匀选取五组不同的趋近律参数, 从而在全局范围内比较两种趋近律方法的控制性能. 由表 1 可见, 随着 γ_1 和 γ_2 的增大, 或 γ_3 的减小, 式 (11) 的趋近速率明显增加且滑模精度显著提高, 而且在改变 γ_3 时, 滑模动态的优化效果最为明显, 仿真结果证实了定理 2 和定理 3 的结论. 由表 2 可见, 式 (3) 的滑模精度倾向于在 $\gamma=1/2$ 附近有最优解, 并且随着 γ 的减小, 趋近速率变得越来越快. 因此, 趋近律 (3) 需要在两个性能指标之间进行权衡, 进而选择最优的趋近律参数; 趋近律 (11) 的两个性能指标对参数调节的方向要求一致, 更容易实现系统的快速响应和高精度控制.

表 1 不同参数下控制器 (32) 的控制结果

参数	滑模精度	到达时间 (s)
$\gamma_1=\frac{1}{2},\gamma_2=\frac{1}{2},\gamma_3=\frac{1}{2}$	4.26×10^{-3}	0.32
$\gamma_1=\frac{7}{8},\gamma_2=\frac{1}{2},\gamma_3=\frac{1}{2}$	3.05×10^{-3}	0.26
$\gamma_1=\frac{1}{2},\gamma_2=\frac{7}{8},\gamma_3=\frac{1}{2}$	1.51×10^{-3}	0.093
$\gamma_1=\frac{1}{2},\gamma_2=\frac{1}{2},\gamma_3=\frac{1}{8}$	1.43×10^{-3}	0.039
$\gamma_1=\frac{7}{8},\gamma_2=\frac{7}{8},\gamma_3=\frac{1}{8}$	1.38×10^{-3}	0.020

表 2 不同参数下控制器 (34) 的控制结果

参数	滑模精度	到达时间 (s)
$\gamma=\frac{1}{8}$	0.0109	0.19
$\gamma=\frac{1}{4}$	4.66×10^{-3}	0.22
$\gamma=\frac{1}{2}$	2.90×10^{-3}	0.31
$\gamma=\frac{3}{4}$	0.0165	0.39
$\gamma=\frac{7}{8}$	0.0254	0.42

4 结论

本文提出了一种基于隐式欧拉积分的广义离散趋近律, 该趋近律具有显式结构, 易于实现. 对于确定系统, 可以实现滑模变量的全局无抖振收敛; 对于不确定系统, 通过适当调整参数, 可以在改善滑模运动精度的同时, 提高滑模面趋近速率. 仿真结果表明, 所提出的趋近律方法比传统显式离散趋近律具有更好的动态和静态性能, 有力地拓展了离散趋近律的设计范围.

参考文献 (References)

[1] 刘金琨. 滑模变结构控制 Matlab 仿真 [M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2012: 1-6.
(Liu J K. Sliding mode control and Matlab simulation[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2012: 1-6.)

[2] 陈强, 杨晨冰, 南余荣. 基于变速趋近律的 Buck 型变换器抗扰动控制 [J]. 控制与决策, 2021, 36(4): 893-900.
(Chen Q, Yang C B, Nan Y R. Disturbance rejection control of Buck converters based on variable rate reaching law[J]. Control and Decision, 2021, 36(4): 893-900.)

[3] Gao W, Hung J C. Variable structure control of nonlinear systems: A new approach[J]. IEEE transactions on Industrial Electronics, 1993, 40(1): 45-55.

[4] Yu S, Yu X, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. Automatica, 2005, 41(11): 1957-1964.

[5] 李慧洁, 蔡远利. 基于双幂次趋近律的滑模控制方法 [J]. 控制与决策, 2016, 31(3): 498-502.
(Li H J, Cai Y L. Sliding mode control with double power reaching law[J]. Control and Decision, 2016, 31(3): 498-502.)

[6] Yu X, Wang B, Li X. Computer-controlled variable structure systems: The state-of-the-art[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2012, 8(6): 197-205.

[7] Gao W, Wang Y, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122.

[8] Qu S, Xia X, Zhang J. Dynamics of discrete-time sliding-mode-control uncertain systems with a disturbance compensator[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2014, 61(7): 3502-3510.

[9] Zhang J, Zhang N, Shen G, et al. Analysis and design of chattering-free discrete-time sliding mode control[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(18): 6572-6581.

[10] Ma H, Li Y, Xiong Z. Discrete-time sliding-mode control with enhanced power reaching law[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2018, 66(6): 4629-4638.

[11] 邬玲伟, 雷必成, 陈光, 等. 以幂次吸引的离散多周期重复控制 [J]. 控制与决策, 2020, 35(9): 2299-2304.
(Wu L W, Lei B C, Chen G, et al. Discrete multi-periodic repetitive control with power-rate attracting[J]. Control and Decision, 2020, 35(9): 2299-2304.)

[12] Ren Q, Kao Y, Zhu Y, et al. A new discrete reaching condition and generalized discrete reaching law with different convergence rates[J]. Automatica, 2021, 132: 109805.

[13] 都海波, 李世华, 钱春江, 等. 基于采样控制的一类本质非线性系统的全局镇定 [J]. 自动化学报, 2014, 40(2): 379-384.
(Du H B, Li S H, Qian C J, et al. Global stabilization of a class of inherently nonlinear systems under sampled-data control[J]. Acta Automatic Sinica, 2014, 40(2): 379-384.)

[14] Efimov D, Polyakov A, Levant A, et al. Realization and discretization of asymptotically stable homogeneous systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(11): 5962-5969.

[15] Brogliato B, Polyakov A, Efimov D. The implicit discretization of the supertwisting sliding-mode control algorithm[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(8): 3707-3713.

[16] Xiong X, Chu Y, Udai A D, et al. Implicit discrete-time terminal sliding mode control for second-order systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2021, 68(7): 2508-2512.

[17] Abidi K, Xu J, Yu X. On the discrete-time integral sliding-mode control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(4): 709-715.

[18] Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

作者简介

王聪 (1993−), 男, 博士生, 从事非线性控制、变结构控制系统等研究, E-mail: zhuozhi689@126.com;

夏红伟 (1979−), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、飞行器控制等研究, E-mail: hxia@hit.edu.cn;

任顺清 (1967−), 男, 教授, 博士生导师, 从事惯性技术、系统辨识等研究, E-mail: renshunqing@hit.edu.cn.