

# 控制与决策

*Control and Decision*

## 一种反向递推正弦干扰观测器的设计方法

文新宇, 王子豪, 王宝光, 王丹

引用本文:

文新宇, 王子豪, 王宝光, 等. 一种反向递推正弦干扰观测器的设计方法[J]. *控制与决策*, 2021, 36(2): 403–410.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0769>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 四旋翼无人机抗干扰轨迹跟踪控制

Anti-interference trajectory tracking control of quadrotor UAV

*控制与决策*. 2021, 36(2): 379–386 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0875>

### 纵向速度和艏向角受限的水面艇有限时间协同路径跟踪

Finite-time cooperative path following of surface vessels with surge velocity and yaw angle constraints

*控制与决策*. 2021, 36(2): 363–370 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0977>

### 基于免疫优化的平面Acrobot线性自抗扰鲁棒镇定

Robust stabilization of planar Acrobot using linear active disturbance rejection control with immune optimization

*控制与决策*. 2020, 35(12): 3053–3058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0289>

### 参数未知的离散系统Q-学习优化状态估计与控制

Q-learning optimal state estimation and control for discrete systems with unknown parameters

*控制与决策*. 2020, 35(12): 2889–2897 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0180>

### 基于稀疏度阶数优化的杂波密度估计算法

A clutter density estimation algorithm by optimized sparsity order

*控制与决策*. 2020, 35(12): 2923–2930 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0429>

# 一种反向递推正弦干扰观测器的设计方法

文新宇, 王子豪<sup>†</sup>, 王宝光, 王丹

(太原科技大学 电子信息工程学院, 太原 030024)

**摘要:** 在多源干扰环境下, 考虑一种基于输出信号的正弦干扰估计方法. 引入低通滤波器激励干扰特性, 得到一组级联关系的不可测信号, 并将其分解为标准正弦虚拟干扰、等价有界干扰以及衰减项; 在频率已知条件下, 设计辅助滤波器, 建立干扰频率与虚拟干扰之间关系, 从而将外部正弦扰动表示为关于虚拟干扰的参数形式, 利用虚拟干扰的估计值逐次降阶反推输入干扰. 该干扰观测器设计方法独立于控制器结构, 不需要估计等效干扰状态, 可很大程度上降低计算复杂度. 当不存在等价有界干扰时, 这种反向递推方式可以渐近跟踪正弦干扰. 在多源干扰环境下, 通过调节辅助滤波器参数可以保证干扰误差动态一致最终有界特性. 仿真和实验验证了该干扰观测结构的有效性.

**关键词:** 正弦干扰; 虚拟干扰; 低通滤波器; 辅助滤波器; 干扰观测器; 多源干扰

中图分类号: TP13

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0769

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 文新宇, 王子豪, 王宝光, 等. 一种反向递推正弦干扰观测器的设计方法[J]. 控制与决策, 2021, 36(2): 403-410.

## Design method of reverse recursive sinusoidal disturbance observer

WEN Xin-yu, WANG Zi-hao<sup>†</sup>, WANG Bao-guang, WANG Dan

(Electron Information Engineering College, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

**Abstract:** This paper studies a output-based sinusoidal disturbance estimation method in the presence of multi-disturbances. A low-pass filter is introduced to excite the disturbance characteristics, and series of cascaded unmeasurable signals are then obtained. Particularly, the signals can be decomposed into three parts, including standard sinusoidal virtual signal, equivalent bounded disturbance and decay term. In case that the frequency is known, the auxiliary filter is designed to establish the relationship between frequency and virtual disturbances, with which the external sinusoidal disturbance is reformulated in a parametric form about the virtual disturbance. Resultantly, the input disturbance can be reconstructed through successive order-reduction approach using the estimates of the virtual disturbances. The disturbance observer design method is independent of the controller structure, and removes the necessity to estimate the equivalent disturbance state, which reduces the computational complexity to a large extent. If the equivalent bounded disturbance is absent, the sinusoidal disturbance can be tracked asymptotically with reverse recursive fashion. Otherwise, the uniformly ultimately bounded of estimation error can be guaranteed by adjusting the parameters of the auxiliary filter in presence of multi-disturbances. The effectiveness of the disturbance observer structure is verified by simulation and experiment.

**Keywords:** sinusoidal disturbance; virtual disturbance; low-pass filter; auxiliary filter; disturbance observer; multi-disturbances

## 0 引言

正弦是控制系统中最常见的干扰之一, 明显影响到控制精度甚至导致系统失稳. 这种噪声往往产生于弹性模态、驱动装置以及机械转子旋转带来的周期性振动<sup>[1-3]</sup>, 经典输出调节理论<sup>[4]</sup>对周期性干扰的

抵消进行了深入研究, 是非线性控制领域的重要课题. 近年来, 干扰观测器控制(DOBC)受到广泛的关注, 利用观测器对正弦干扰特性进行估计实现干扰的抵消, 同时保证控制精度和鲁棒性. 文献[5]深入比较讨论了DOBC与输出调节理论之间的联系, 在实现

收稿日期: 2019-06-01; 修回日期: 2019-10-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61203049); 山西省自然科学基金项目(201801D121132); 山西省互联网+3D打印协同创新中心项目(CiCi3DP).

责任编辑: 虞文武.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: wzh1203150873@163.com.

上二者具有等效性, DOBC利用观测器代替内模原理的作用估计和抵消可建模周期干扰, 具有更加灵活的结构, 可以避免偏微分方程的求解, 提供容易在线整定的控制算法. 基于分离原理, 可分别设计干扰观测器和输出反馈控制器对干扰/不确定性的估计和抑制<sup>[6-7]</sup>. 文献[8]将DOBC引入到不确定非线性系统, 通过协调控制器和观测器参数, 能够得到复合闭环系统渐近稳定的结论; 在此基础上, 文献[6, 9-11]考虑了多源干扰的复合分层控制问题, 扰动估计误差和系统状态可以建立在一个扩张状态内, 同时实现对多源干扰的抵消和抑制. 目前, 很多时域系统的DOBC策略往往需要获取系统状态, 或者在满足一定的可观测条件下, 通过估计系统状态间接构造干扰观测器估计可建模周期干扰, 增加了设计复杂度. 文献[12]利用输出信号直接构造干扰观测器, 配合控制器可以保证复合闭环系统收敛, 适用于随机系统的稳定控制. 然而, 对于跟踪控制, 当系统状态未知时, 分离原理很难直接应用, 需要对系统状态重构分析估计误差收敛性. 在实际应用中, 控制器往往具有特定的结构和参数, 利用输出信息完全独立于控制器形式设计干扰观测器具有很重要的研究意义.

针对以上问题, 在现有文献[6-12]的基础上, 本文提出一种反向递推干扰观测器设计方法. 通过构造低通滤波器激励出正弦干扰特性, 再利用辅助滤波器将正弦扰动表示为一系列关于虚拟扰动的参数形式, 通过选择辅助滤波器形式和参数直接反推输入干扰. 本文估计方法主要特点如下: 1) 通过对辅助滤波器的综合分析和设计, 给出可测误差信号、干扰频率以及输入干扰之间的关系, 不需要构造传统的观测器去估计等效干扰状态, 简化运算复杂度; 2) 该估计方法是干扰观测器理论的推广, 通过分析设计低通滤波器和辅助滤波器参数, 可以保证在多源干扰环境下估计性能的鲁棒性, 能够直接应用于频域系统, 便于工程实现; 3) 该估计方法不依赖于系统状态信息, 可保证观测器和控制器设计的独立性, 便于实现跟踪控制系统的干扰补偿. 该结构可以推广到非线性系统, 避免偏微分方程的求解问题, 这将是下一步的研究工作.

## 1 问题描述

本文考虑一类单输入单输出的最小相位转台伺服系统, 即

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B(d(t) + \Delta d(t)), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (1)$$

其中:  $x \in R^n, u \in R, y \in R, \Delta d \in R, d \in R$  分别为系统状态、控制输入、输出信号、等价有界干扰、单正弦干扰;  $A, B, C$  为给定的具有适当维数的系数矩阵;  $\Delta d(t) = \eta(x, t)$  为欧氏范数小于  $\mu$  的有界函数,  $\Delta d(t)$  满足有界条件

$$\|\eta(x, t)\| \leq \mu, \quad (2)$$

这里  $\mu$  为未知常值.

本文主要讨论已知频率单正弦周期干扰估计,  $d$  可以描述为

$$d(t) = \Phi \sin(\omega_0 t + \phi). \quad (3)$$

其中:  $\Phi, \omega_0, \phi$  分别为扰动的幅值、频率和相位. 根据文献[8-9], 正弦干扰可以用如下外部线性系统来描述:

$$\dot{w}(t) = \Gamma w(t), \quad d(t) = Vw(t). \quad (4)$$

其中:  $\Gamma \in R^{2 \times 2}$  特征值均在虚轴上,  $V \in R^{1 \times 2}$  为加权矩阵. 为便于分析, 本文将  $\Gamma, V$  描述为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = [1 \quad 0]. \quad (5)$$

**注1** 当频率未知时, 可以利用文献[13]方法构造观测器估计频率, 并代入辅助滤波器中反推输入干扰. 对于频率未知条件下观测器的收敛特性和鲁棒性分析, 将在后续的研究工作中完善.

## 2 反向递推干扰观测器设计

图1为干扰观测器整体结构图, 低通滤波器与辅助滤波器共同构成反向递推干扰观测器. 通过设计系统参考模型, 利用低通滤波器激励出干扰特性; 然后构造辅助滤波器, 建立干扰频率与干扰之间关系, 逐次降阶反推输入干扰, 并进行反馈补偿. 结合标称控制器可以使超调量控制在较小范围内.

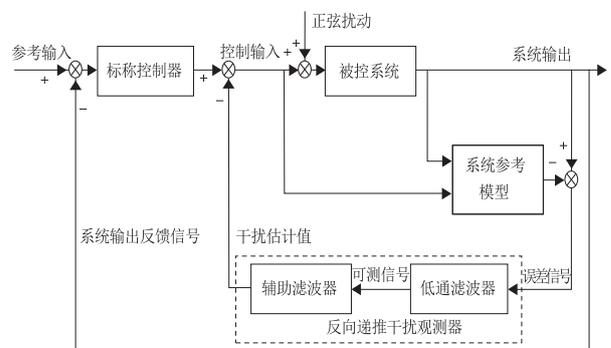


图1 基于系统输出的干扰观测器整体结构

定义控制输入  $u = u_0 - \hat{d}$ , 其中  $u_0$  为标称控制器,  $\hat{d}$  为正弦干扰估计值; 误差信号为  $\tilde{y} = y - \hat{y}$ , 其中  $\hat{y}$  为系统参考模型输出信号,  $y$  为被控对象输出信

号;可测信号、低通滤波器、辅助滤波器分别用  $\zeta_1, F(s), Q(s)$  表示.

### 2.1 低通滤波器设计

低通滤波器等效流程如图2所示,本小节内容旨在通过设计系统参考模型,利用低通滤波器  $F(s)$  激励出干扰特性. 定义从  $\hat{d}$  到  $\tilde{y}$  的传递函数为  $G_{d\tilde{y}}(s)$ , 当  $G_{d\tilde{y}}(s)$  为最小相位系统时,  $F(s)$  可以看作  $G_{d\tilde{y}}(s)$  的逆动态  $G_{d\tilde{y}}^{-1}(s)$  与惯性环节的串联. 这样,干扰信号通过惯性环节得到一组级联关系的不可测信号,并将不可测信号分解为标准正弦虚拟干扰,等价有界干扰以及衰减项.

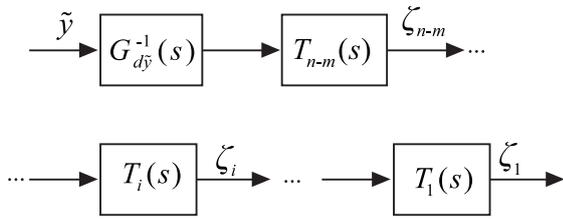


图2 低通滤波器设计等效流程

首先,系统参考模型设计为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $\hat{x} \in R^n, \hat{y} \in R, L \in R^n$  分别为系统参考模型的状态、控制输出、增益矩阵. 结合式(1)和(6)可得误差方程

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= (A - LC)\tilde{x}(t) + B(d(t) + \Delta d(t)), \\ \tilde{y}(t) &= C\tilde{x}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

其中:  $\tilde{x}, \tilde{y}$  分别为误差方程状态和输出,  $A, B, C$  定义与式(1)中相同. 设计  $L$  保证  $(A - LC)$  是 Hurwitz. 由式(7)可以得到闭环系统从  $d$  到  $\tilde{y}$  的传递函数

$$G_{d\tilde{y}}(s) = \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}. \quad (8)$$

其中:  $\text{num}(s), \text{den}(s)$  为式(7)中系数矩阵  $A, B, C$  对应的分子、分母多项式;  $\text{num}(s), \text{den}(s)$  的阶数分别用  $m, n$  表示.

接下来,给出低通滤波器的等效形式,如图2所示. 其中:  $T_i(s) (1 \leq i \leq n - m)$  为参数待定的一阶惯性环节;  $\zeta_i (2 \leq i \leq n - m)$  为不可测信号. 然后,将图2中惯性环节  $T_i(s)$  选型为如下形式:

$$T_i(s) = \frac{1}{s + b_i}, \quad (9)$$

其中  $b_i (1 \leq i \leq n - m)$  为待定参数. 结合式(8)、(9), 当  $G_{d\tilde{y}}(s)$  为最小相位时,可以将低通滤波器  $F(s)$  描述为

$$F(s) = \frac{\text{den}(s)}{\text{num}(s) \prod_{i=1}^{n-m} (s + b_i)}. \quad (10)$$

结合式(10)与图2,可以得到  $\zeta_i(s) (1 \leq i \leq n - m)$  的关系式如下:

$$\zeta_i(s) = \frac{\zeta_{i+1}(s)}{s + b_i}, \quad \zeta_{n-m}(s) = \frac{d(s)}{s + b_{n-m}}. \quad (11)$$

由式(11)得到如下关系:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_i(t) &= -b_i \zeta_i(t) + \zeta_{i+1}(t), \\ \dot{\zeta}_{n-m}(t) &= -b_{n-m} \zeta_{n-m}(t) + d(t). \end{aligned} \quad (12)$$

进一步,将  $\zeta_i(t) (1 \leq i \leq n - m)$  描述为

$$\zeta_i(t) = d_i(t) + \Delta d_i(t) + \sigma_i(t). \quad (13)$$

其中:  $d_i(t) (1 \leq i \leq n - m)$  为正弦虚拟干扰信号,  $\sigma_i(t) (1 \leq i \leq n - m)$  为衰减项. 假设  $\sigma_i(t)$  满足

$$\dot{\sigma}_i(t) = -b_i \sigma_i(t), \quad (14)$$

$\Delta d_i(t) (1 \leq i \leq n - m)$  为欧氏范数小于  $\mu$  的有界函数. 结合式(9)、(13)和图2可得  $\Delta d_i(t)$  之间以及与  $\Delta d(t)$  满足如下关系:

$$\begin{aligned} \Delta d_i(s) &= \frac{\Delta d_{i+1}(s)}{s + b_i}, \\ \Delta d_{n-m}(s) &= \frac{\Delta d(s)}{s + b_{n-m}}. \end{aligned} \quad (15)$$

由以上分析可知,由于误差信号  $\tilde{y}$  通过  $G_{d\tilde{y}}^{-1}(s)$  获得的信号包含干扰特性,在多源干扰环境下,可以将  $\zeta_i (2 \leq i \leq n - m)$  分解为标准正弦虚拟干扰,等价有界干扰以及衰减项.

### 2.2 辅助滤波器设计

本小节通过构造辅助滤波器  $Q(s)$  (图3), 直接建立干扰频率与输入干扰之间的联系,将正弦扰动表示为一系列关于虚拟扰动  $d_i$  的参数形式,逐次降阶反推输入干扰. 如图3所示: 辅助滤波器利用低通滤波器输出信号  $\zeta_1(t)$ , 反向递推  $(n - m)$  次,可以获得正弦干扰估计值. 合理选取  $Q(s)$  参数,能够保证反向递推过程中的衰减项  $\sigma_i(t) (1 \leq i \leq n - m)$  收敛于零;当不存在等价有界干扰时,正弦干扰估计值收敛于实际正弦干扰.

为方便分析,定义图3中  $\hat{d}_i (2 \leq i \leq n - m)$  为正弦虚拟干扰估计值,  $\hat{d}$  为输入干扰估计值,  $c_i (1 \leq i \leq n - m), k_i (1 \leq i \leq n - m)$  为待定参数,  $\hat{\xi}_{i1}(s), \hat{\xi}_{i2}(s) (1 \leq i \leq n - m)$  为辅助滤波器内部信号. 进一步,结合图3,将  $\hat{\xi}_{i1}(s), \hat{\xi}_{i2}(s)$  描述为

$$\hat{\xi}_{i1}(s) = \frac{1}{s + c_i} \zeta_i(s), \quad \hat{\xi}_{i2}(s) = \frac{s}{s + c_i} \zeta_i(s). \quad (16)$$

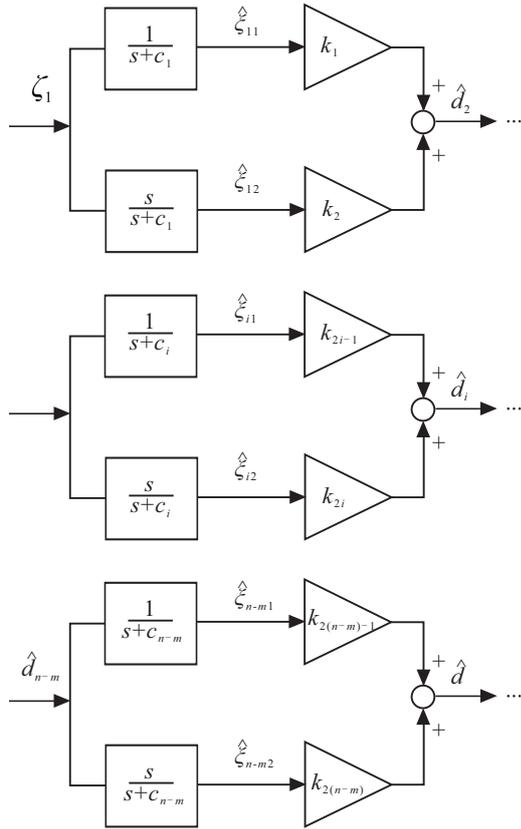


图3 辅助滤波器结构原理

然后,结合式(12)、(16)可得

$$\dot{\hat{\xi}}_{i1}(t) = \hat{\xi}_{i2}(t),$$

$$\dot{\hat{\xi}}_{i2}(t) = -b_i c_i \hat{\xi}_{i1}(t) - (b_i + c_i) \hat{\xi}_{i2}(t) + \zeta_{i+1}(t), \quad (17)$$

其中  $\hat{\xi}_{i1}(t)$ 、 $\hat{\xi}_{i2}(t)$  为  $\hat{\xi}_{i1}(s)$ 、 $\hat{\xi}_{i2}(s)$  的拉普拉斯逆变换形式。

**定理1** 若存在向量函数  $\hat{\xi}_{i1}(t)$ 、 $\hat{\xi}_{i2}(t)$  ( $1 \leq i \leq n-m$ ) 满足式(17)关系,则正弦虚拟干扰  $d_{i+1}(t)$  ( $1 \leq i \leq n-m-1$ ) 可以描述为

$$d_{i+1}(t) = \theta_i^T \hat{\xi}_i(t) + \theta_i^T \hat{\delta}_i(t). \quad (18)$$

其中:  $\hat{\delta}_i(t)$  ( $1 \leq i \leq n-m$ ) 满足

$$\dot{\hat{\delta}}_i(t) = G_i \hat{\delta}_i(t) - L(\sigma_{i+1} + \Delta d_{i+1}), \quad (19)$$

$$\theta_i = \begin{bmatrix} k_{2i-1} \\ k_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i c_i - \omega_0^2 \\ b_i + c_i \end{bmatrix}, \hat{\xi}_i(t) = \begin{bmatrix} \hat{\xi}_{i1}(t) \\ \hat{\xi}_{i2}(t) \end{bmatrix},$$

$$G_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_i c_i & -b_i - c_i \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

**证明** 利用文献[13]中引理1结论可知,存在矢量  $\xi_i \in R^{2 \times 1}$  ( $1 \leq i \leq n-m$ ) 满足

$$\dot{\xi}_i(t) = G_i \xi_i(t) + L d_{i+1}. \quad (21)$$

其中:  $d_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-m-1$ ) 为正弦虚拟干扰,可以描述为

$$d_{i+1}(t) = \theta_i^T \xi_i(t) + \theta_i^T \delta_i(t). \quad (22)$$

其中:  $\xi_i(t) = [\xi_{i1}(t), \xi_{i2}(t)]^T$ ,  $1 \leq i \leq n-m$ ;  $\delta_i(t)$  ( $1 \leq i \leq n-m$ ) 为衰减项,且满足

$$\dot{\delta}_i(t) = G_i \delta_i(t). \quad (23)$$

进一步,将  $d_{i+1}(t)$  ( $1 \leq i \leq n-m-1$ ) 作如下表示:

$$d_{i+1}(t) = \xi_i^T \theta_i + \theta_i^T \delta_i = (\xi_i - \hat{\xi}_i + \hat{\xi}_i)^T \theta_i + \theta_i^T \delta_i = \hat{\xi}_i^T \theta_i + \theta_i^T \delta_i + \theta_i^T (\xi_i - \hat{\xi}_i). \quad (24)$$

然后,结合式(13)、(17)、(21)可以得到

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i - \dot{\hat{\xi}}_i = G_i(\xi_i - \hat{\xi}_i) - L(\sigma_{i+1} + \Delta d_{i+1}), \\ \dot{\xi}_i - \dot{\hat{\xi}}_i + \dot{\delta}_i = G_i(\xi_i - \hat{\xi}_i + \delta_i) - L(\sigma_{i+1} + \Delta d_{i+1}). \end{cases} \quad (25)$$

根据式(25),令  $\tilde{\delta}_i(t) = \xi_i - \hat{\xi}_i + \delta_i$  并代入(24),可将式(24)化简为(18)形式。□

**定理2** 若存在  $P_1 \in R^{2 \times 2} > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\rho > 0$  使得式(26)成立,则  $\tilde{\xi}_i$  ( $1 \leq i \leq n-m$ ) 一致最终有界。

$$\begin{bmatrix} \rho(G_i P_1 + P_1 G_i) + \gamma & -\rho P_1 L \\ -\rho L^T P_1 & -2b_i + \gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

$$\gamma \geq \rho \mu \frac{\|P_1 L\|}{\|\sigma_{i+1}\|}.$$

**证明** 利用式(25)可得

$$\dot{\tilde{\xi}}_i = \dot{\xi}_i - \dot{\hat{\xi}}_i = G_i \tilde{\xi}_i - L(\sigma_{i+1} + \Delta d_{i+1}). \quad (27)$$

建立Lyapunov函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \rho \tilde{\xi}_i^T P_1 \tilde{\xi}_i + \frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T \sigma_{i+1}. \quad (28)$$

结合式(14)、(26)、(27)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} \rho \tilde{\xi}_i^T (G_i^T P_1 + P_1 G_i) \tilde{\xi}_i - \frac{1}{2} \rho \sigma_{i+1}^T L^T P_1 \tilde{\xi}_i - \\ &\quad \frac{1}{2} \rho \Delta d_{i+1}^T L^T P_1 \tilde{\xi}_i - \frac{1}{2} \rho \tilde{\xi}_i^T P_1 L \sigma_{i+1} - \\ &\quad \frac{1}{2} \rho \tilde{\xi}_i^T P_1 L \Delta d_{i+1} - b_{i+1} \sigma_{i+1}^T \sigma_{i+1} = \\ &\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_i \\ \sigma_{i+1} \end{bmatrix}^T A_1 \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_i \\ \sigma_{i+1} \end{bmatrix} - \\ &\quad \frac{1}{2} \rho \Delta d_{i+1}^T L^T P_1 \tilde{\xi}_i - \frac{1}{2} \rho \tilde{\xi}_i^T P_1 L \Delta d_{i+1} \leq \\ &\quad -\gamma \|[\tilde{\xi}_i^T, \sigma_{i+1}^T]^T\|_2^2 + \rho \mu \|P_1 L \tilde{\xi}_i\|. \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} \rho(G_i P_1 + P_1 G_i) & -\rho P_1 L \\ -\rho L^T P_1 & -2b_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

综上分析,结合式(29)不难看出,在满足式(26)条件下,  $\tilde{\xi}_i$  一致最终有界。当有界干扰不存在时,  $\tilde{\xi}_i$  满足渐近稳定。□

由以上分析可将反向递推步骤总结如下:

step 1: 由式(13)可知,  $\zeta_{n-m}$  可以描述为

$$\zeta_{n-m}(t) = d_{n-m}(t) + \Delta d_{n-m}(t) + \sigma_{n-m}(t). \quad (31)$$

其中:  $d_{n-m}(t)$  为 正弦 虚 拟 干 扰;  $\sigma_{n-m}(t)$  为 衰 减 项, 并 存 在 一 个 初 值  $\sigma_{n-m}(0)$  满 足

$$\dot{\sigma}_{n-m}(0) = -b_{n-m}\sigma_{n-m}(0). \quad (32)$$

$\Delta d_{n-m}$  满 足

$$\Delta d_{n-m}(t) = -b_{n-m}\Delta d_{n-m}(t) + \Delta d(t). \quad (33)$$

类 似 地, 存 在  $\sigma_i(t)$  使 得  $\zeta_i(t)$  ( $1 \leq i \leq n-m$ ) 描 述 为

$$\zeta_i(t) = d_i(t) + \Delta d_i(t) + \sigma_i(t). \quad (34)$$

其 中:  $d_i(t)$  为 正 弦 虚 拟 干 扰;  $\sigma_i(t)$  为 衰 减 项, 并 存 在 一 个 初 值  $\sigma_i(0)$  满 足

$$\dot{\sigma}_i(0) = -b_i\sigma_i(0). \quad (35)$$

$\Delta d_i$  满 足

$$\Delta d_i(t) = -b_i\Delta d_i(t) + \Delta d_{i+1}(t). \quad (36)$$

当  $i$  取 1 时, 即 存 在  $\sigma_1(t)$  使 得  $\zeta_1(t)$  描 述 为

$$\zeta_1(t) = d_1(t) + \Delta d_1(t) + \sigma_1(t). \quad (37)$$

其 中:  $d_1(t)$  为 正 弦 虚 拟 干 扰;  $\sigma_1(t)$  为 衰 减 项, 并 存 在 一 个 初 值  $\sigma_1(0)$  满 足

$$\dot{\sigma}_1(0) = -b_1\sigma_1(0). \quad (38)$$

$\Delta d_1$  满 足

$$\Delta d_1(t) = -b_1\Delta d_1(t) + \Delta d_2(t). \quad (39)$$

step 2: 结 合 式 (18) 和 图 3, 将 正 弦 虚 拟 干 扰 估 计 值  $\hat{d}_2(t)$  描 述 为

$$\hat{d}_2(t) = (b_1c_1 - \omega_0^2)\hat{\xi}_{11}(t) + (b_1 + c_1)\hat{\xi}_{12}(t). \quad (40)$$

结 合 式 (16) 可 知,  $\hat{\xi}_{11}(t)$ 、 $\hat{\xi}_{12}(t)$  满 足

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_{11}(t) &= -c_1\hat{\xi}_{11}(t) + \zeta_1(t), \\ \dot{\hat{\xi}}_{12}(t) &= -c_1\hat{\xi}_{12}(t) + \zeta_1(t). \end{aligned} \quad (41)$$

step 3: 正 弦 虚 拟 干 扰 估 计 值  $\hat{d}_3(t)$  可 以 描 述 为

$$\hat{d}_3(t) = (b_2c_2 - \omega_0^2)\hat{\xi}_{21}(t) + (b_2 + c_2)\hat{\xi}_{22}(t). \quad (42)$$

其 中  $\hat{\xi}_{21}(t)$ 、 $\hat{\xi}_{22}(t)$  满 足

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_{21}(t) &= -c_2\hat{\xi}_{21}(t) + \hat{d}_2(t), \\ \dot{\hat{\xi}}_{22}(t) &= -c_2\hat{\xi}_{22}(t) + \hat{d}_2(t). \end{aligned} \quad (43)$$

类 似 地, 存 在  $\hat{\xi}_{i1}(t)$ 、 $\hat{\xi}_{i2}(t)$  ( $1 \leq i \leq n-m-1$ ) 使 得  $\hat{d}_{i+1}(t)$  ( $1 \leq i \leq n-m-1$ ) 可 以 描 述 为

$$\hat{d}_{i+1}(t) = (b_i c_i - \omega_0^2)\hat{\xi}_{i1}(t) + (b_i + c_i)\hat{\xi}_{i2}(t). \quad (44)$$

其 中  $\hat{\xi}_{i1}(t)$ 、 $\hat{\xi}_{i2}(t)$  满 足

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_{i1}(t) &= -c_i\hat{\xi}_{i1}(t) + \hat{d}_i(t), \\ \dot{\hat{\xi}}_{i2}(t) &= -c_i\hat{\xi}_{i2}(t) + \hat{d}_i(t). \end{aligned} \quad (45)$$

当  $i$  取  $n-m$  时, 结 合 式 (44) 和 (45) 可 知, 存 在  $\hat{\xi}_{(n-m)1}(t)$ 、 $\hat{\xi}_{(n-m)2}(t)$  使 得  $\hat{d}(t)$  描 述 为

$$\begin{aligned} \hat{d}(t) &= (b_{n-m}c_{n-m} - \omega_0^2)\hat{\xi}_{(n-m)1}(t) + \\ & (b_{n-m} + c_{n-m})\hat{\xi}_{(n-m)2}(t). \end{aligned} \quad (46)$$

其 中  $\hat{\xi}_{(n-m)1}(t)$ 、 $\hat{\xi}_{(n-m)2}(t)$  满 足

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_{(n-m)1}(t) &= -c_{n-m}\hat{\xi}_{(n-m)1}(t) + \hat{d}_{n-m}(t), \\ \dot{\hat{\xi}}_{(n-m)2}(t) &= -c_{n-m}\hat{\xi}_{(n-m)2}(t) + \hat{d}_{n-m}(t). \end{aligned} \quad (47)$$

**定 理 3** 考 虑 仅 含 有 单 正 弦 扰 动  $d(t)$ , 当  $t \rightarrow 0$  时, 若 正 弦 虚 拟 干 扰 满 足 式 (18) 关 系, 则 正 弦 干 扰 估 计 误 差  $\tilde{d} = d - \hat{d}$  渐 近 收 敛.

**证 明** 当  $i$  取  $n-m-1$  时, 正 弦 虚 拟 干 扰 估 计 误 差 为  $\tilde{d}_{n-m} = d_{n-m} - \hat{d}_{n-m}$ . 其 中:  $d_{n-m}$  为 正 弦 虚 拟 干 扰,  $\hat{d}_{n-m}$  为 正 弦 虚 拟 干 扰 估 计 值. 结 合 式 (18)、(44) 可 以 得 到

$$\tilde{d}_{n-m}(t) = \theta_{n-m-1}^T \hat{\delta}_{n-m-1}(t). \quad (48)$$

其 中:  $\theta_{n-m-1}$  满 足 式 (20) 的 关 系, 由 式 (19) 可 以 得 到  $\hat{\delta}_{n-m-1}(t) = G_{n-m-1}\delta_{n-m-1}(t) - L\sigma_{n-m}(t)$ .

建 立 Lyapunov 函 数

$$V(t) = \delta_{n-m-1}^T P_2 \hat{\delta}_{n-m-1} + \frac{1}{2} \sigma_{n-m}^T \sigma_{n-m}, \quad (49)$$

其 中  $P_2 \in R^{2 \times 2} > 0$ . 结 合 式 (14)、(19) 可 得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \delta_{n-m-1}^T (G_{n-m-1}^T P_2 + P_2 G_{n-m-1}) \hat{\delta}_{n-m-1} - \\ & \sigma_{n-m}^T L^T P_2 \hat{\delta}_{n-m-1} - b_{n-m} \sigma_{n-m}^T \sigma_{n-m} = \\ & \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{n-m-1} \\ \sigma_{n-m} \end{bmatrix}^T A_2 \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{n-m-1} \\ \sigma_{n-m} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (50)$$

其 中

$$A_2 = \begin{bmatrix} G_{n-m-1}^T P_2 + P_2 G_{n-m-1} & -P_2 L \\ -L^T P_2 & -b_{n-m} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

由 于  $G_{n-m-1}$  是 Hurwitz,  $P_2 > 0$ , 可 以 得 到  $G_{n-m-1}^T P_2 + P_2 G_{n-m-1} < 0$ , 不 难 得 出  $\dot{V}(t) < 0$ . 因 此 满 足  $\hat{\delta}_{n-m-1}(t)$  渐 近 收 敛. 又 根 据 式 (20) 可 知  $\theta_{n-m-1}$  有 界, 因 此,  $\tilde{d}_{n-m}(t)$  渐 近 收 敛; 同 理, 当  $i$  取  $n-m$  时, 结 合 式 (18)、(46) 可 以 得 到  $\tilde{d}$  渐 近 收 敛.  $\square$

**定 理 4** 对 于 多 源 扰 动, 若 存 在  $P_3 \in R^{2 \times 2} > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $r > 0$  使 得 下 式 成 立, 则 正 弦 虚 拟 干 扰 估 计 误 差  $\tilde{d}_i$  ( $2 \leq i \leq n-m$ ) 满 足 一 致 最 终 有 界 特 性

$$\begin{bmatrix} \alpha(G_i P_3 + P_3 G_i) + r & -\alpha P_3 L \\ -\alpha L^T P_3 & -2b_i + r \end{bmatrix} < 0,$$

$$\alpha \leq \frac{r}{\mu} \cdot \frac{\|\sigma_{i+1}\|}{\|P_3\| \cdot \|L\|}. \quad (52)$$

**证 明**  $\tilde{d}_{i+1} = d_{i+1} - \hat{d}_{i+1}$  为 正 弦 虚 拟 干 扰 估 计 误 差, 其 中  $d_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-m-1$ ),  $\hat{d}_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq$

$n - m - 1$ ) 分别满足式(18)、(44)关系. 可以得到

$$\tilde{d}_{i+1}(t) = \theta_i^T \hat{\delta}_i(t), \quad (53)$$

其中  $\hat{\delta}_i(t)$ 、 $\theta_i$  分别满足式(19)、(20). 建立 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T \sigma_{i+1} + \frac{1}{2} \alpha \hat{\delta}_i^T P_3 \hat{\delta}_i. \quad (54)$$

结合式(14)、(19)、(52)可得

$$\begin{aligned} V(t) = & \frac{1}{2} \alpha \hat{\delta}_i^T (G_i^T P_3 + P_3 G_i) \hat{\delta}_i - \frac{1}{2} \alpha \sigma_{i+1}^T L^T P_3 \hat{\delta}_i - \\ & \frac{1}{2} \alpha \Delta d_{i+1}^T L^T P_3 \hat{\delta}_i - \frac{1}{2} \alpha \hat{\delta}_i^T P_3 L \sigma_{i+1} - \\ & \frac{1}{2} \alpha \hat{\delta}_i^T P_3 L \Delta d_{i+1} - b_{i+1} \sigma_{i+1}^T \sigma_{i+1} = \\ & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_i \\ \sigma_{i+1} \end{bmatrix}^T A_3 \begin{bmatrix} \hat{\delta}_i \\ \sigma_{i+1} \end{bmatrix} - \\ & \frac{1}{2} \alpha \Delta d_{i+1}^T L^T P_3 \hat{\delta}_i - \frac{1}{2} \alpha \hat{\delta}_i^T P_3 L \Delta d_{i+1} \leq \\ & -r \|\begin{bmatrix} \hat{\delta}_i \\ \sigma_{i+1} \end{bmatrix}\|^2 + \alpha \mu \|P_3 L \hat{\delta}_i\|. \end{aligned} \quad (55)$$

其中

$$A_3 = \begin{bmatrix} \alpha(G_i P_3 + P_3 G_i) & -\alpha P_3 L \\ -\alpha L^T P_3 & -2b_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

综上分析, 结合式(55), 不难得出, 在满足式(52)条件下, 可以使得正弦虚拟干扰估计误差  $\tilde{d}_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n - m - 1$ ) 一致最终有界.  $\square$

**注2** 构造辅助滤波器  $Q(S)$  将正弦信号  $d$  表示为关于虚拟干扰  $d_i$  的参数形式(式(44)), 利用文献[13]定理1中结论可以推导出辅助滤波器与干扰之间关系, 通过反向递推方式逐次降阶估计输入干扰.

### 3 仿真算例

考虑一类下式形式的实际仿真转台伺服控制系统<sup>[14]</sup>:

$$J\ddot{\Theta} + B\dot{\Theta} = u + d. \quad (57)$$

其中:  $J$  为转台系统的等效转动惯量,  $B$  为等效阻尼参数,  $d$  为外部等效正弦干扰,  $u$  为控制输入,  $\Theta$  为旋转角度. 文献[14]以转台滚转轴为例, 利用伪随机噪声辨识方法获得频率特性, 再对频率特性进行拟合, 可以辨识得到系统参数为  $J = 0.001\ 053$ ,  $B = 0.106\ 316$ . 进一步, 将系统(57)转化为系统(1)形式, 对应的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -101 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [949.7, 0]. \quad (58)$$

设计  $L = [0, 0.2]^T$ , 保证式(7)中  $A - LC$  是 Hurwitz. 结合式(7)、(58)可以得到  $d$  到  $\tilde{y}$  的传递函数

$$G_{d\tilde{y}}(s) = \frac{9.496\ 676 \times 10^2}{s^2 + 2.91 \times 10^2 s + 1.9177 \times 10^4}. \quad (59)$$

因此, 可将式(10)中低通滤波器  $F(s)$  设计为

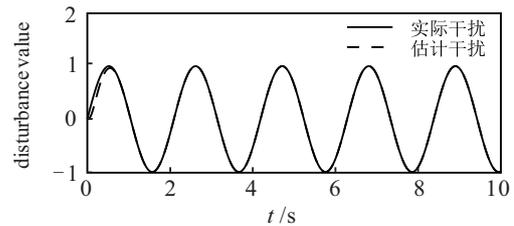
$$F(s) = \frac{s^2 + 2.91 \times 10^2 s + 1.9177 \times 10^4}{9.496\ 676 \times 10^2 \times (s + b_1)(s + b_2)}. \quad (60)$$

干扰观测器待定参数选取为  $b_1 = b_2 = 5$ ,  $c_1 = c_2 = 15$ , 则根据式(18)、(20)可得图3中辅助滤波器系数  $k_1, k_2, k_3, k_4$  分别为 66、20、66、20. 标称控制器  $u_0$  采用 PID 形式, 即

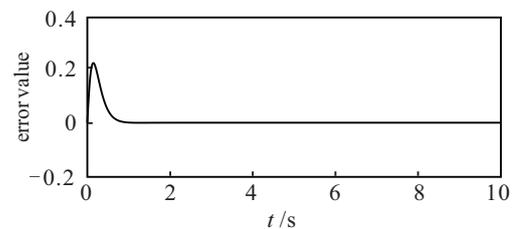
$$u_0(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (61)$$

其中: 比例系数  $K_p = 4$ , 积分系数  $K_i = 7$ , 微分系数  $K_d = 0$ ;  $e(t) = r(t) - y(t)$  为系统误差信号.

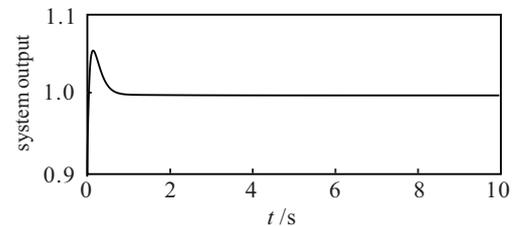
以单位阶跃信号作为参考输入, 考虑系统仅含单一干扰情况. 在系统输入通道中加入正弦干扰  $d = \sin(3t)$ . 图4为采用本文方法得到的干扰补偿效果和系统输出曲线. 干扰估计误差渐近收敛, 可以保持良好的跟踪性能和干扰抑制性能.



(a) 干扰补偿效果



(b) 干扰估计误差



(c) 系统输出

图4 反向递推单正弦干扰估计和系统输出

文献[12]构造基于输出反馈干扰观测器, 配合反馈控制可以实现系统稳定控制. 但是, 控制器与观测器之间不具有独立性, 很难直接应用于跟踪控制, 并且干扰误差动态中存在状态相关项, 估计收敛速度会受到影响(图5).

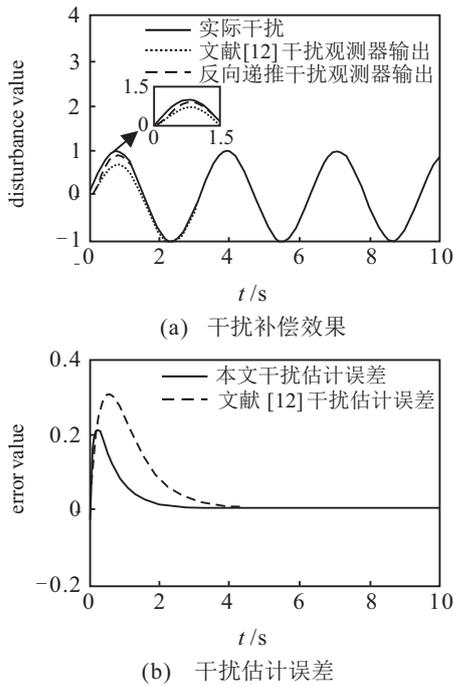


图5 采用本文方法与文献[12]方法对比结果

文献[13]构造双层观测器估计未知频率干扰,但控制器和观测器结构均依赖于系统状态信息,仿真中加入方差为0.01的随机干扰,干扰估计效果会受到影响(图6).

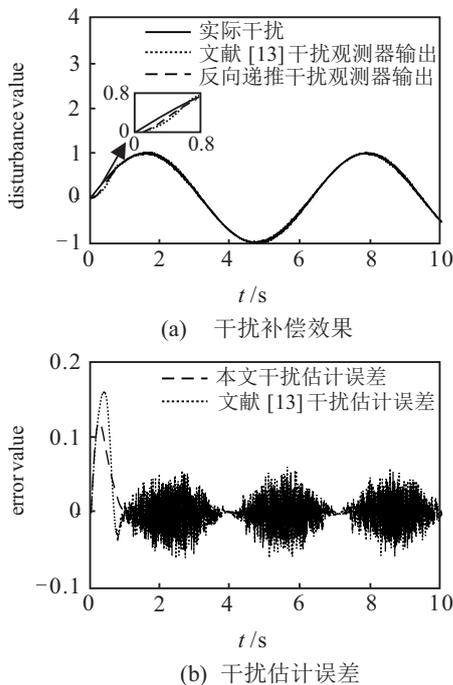


图6 采用本文方法与文献[13]方法对比结果

### 4 实验

通过TKKL-4型控制理论/计算机控制技术实验台构造二阶物理模型,利用研祥PCI-16MFP多功能数据采集卡将物理模型与Matlab连接实时仿真,对已知频率的稳定平台周期干扰补偿方法进行设

计. 实验对象设计为如下二阶惯性稳定系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \check{A}x(t) + \check{B}(u(t) + d(t) + \Delta d(t)), \\ y(t) &= \check{C}x(t). \end{aligned} \quad (62)$$

其中:  $\check{A}, \check{B}, \check{C}$  对应的系数矩阵分别为

$$\check{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -40 & -14 \end{bmatrix}, \check{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \check{C} = [40, 0]. \quad (63)$$

因为  $\check{A}$  是 Hurwitz, 所以不需要设计  $L$  保证  $\check{A} - L\check{C}$  是 Hurwitz, 低通滤波器可以直接由系统逆动态与两个一阶惯性环节串联组成. 进一步, 结合式(62)、(63)可以将低通滤波器  $F(s)$  设计为

$$F(s) = \frac{0.025s^2 + 0.35s + 1}{s^2 + (b_1 + b_2)s + b_1b_2}. \quad (64)$$

干扰观测器待定参数选取为  $b_1 = b_2 = 5, c_1 = c_2 = 15$ , 则根据式(18)、(20)可得图3中辅助滤波器系数  $k_1, k_2, k_3, k_4$  分别为66、20、66、20. 标称控制器  $u_0$  采用式(61)形式的PID控制器, 其中  $K_p = 5, K_i = 9, K_d = 0$ . 以单位阶跃信号为参考输入, 在输入通道加入正弦干扰  $d = \sin(3t)$ , 该系统中存在检测噪声, 为观察本文方法效果, 在输入通道加入方差为0.01的随机干扰. 如图7所示, 多源干扰环境下, 干扰观测器具有较强的鲁棒性.

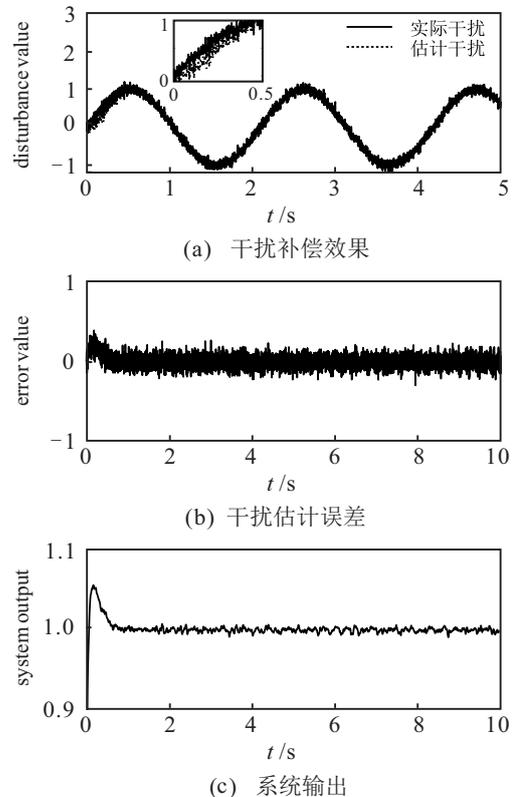


图7 采用本文方法实验结果

### 5 结论

本文提出了一种反向递推干扰观测器设计方法. 通过辅助滤波器建立输出信息、干扰频率以及输入

干扰之间关系,构造虚拟干扰以逐步降阶的方式得到干扰补偿信号.该方法完全独立于控制器的形式,不需要设计积分器形式的观测器,可实现对输入干扰的渐近跟踪.在多源干扰环境下,可以满足系统一致最终有界特性,具有比较强的针对性和较小的保守性.本文能够应用于频域最小相位系统的干扰补偿问题,如何推广到非线性非最小相位系统将是下一步的研究工作.

#### 参考文献(References)

- [1] Kuo S M, Morgan D. Active noise control systems: Algorithms and DSP implementations[M]. New York: John Wiley & Sons, 1996: 2-10.
- [2] Elliott S J, Stothers I, Nelson P A. A multiple error LMS algorithm and its application to the active control of sound and vibration[J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing, 1987, 35(10): 1423-1434.
- [3] Song X, Fang J, Han B, et al. Adaptive compensation method for high-speed surface PMSM sensorless drives of EMF-based position estimation error[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2016, 31(2): 1438-1449.
- [4] Isidori A, Byrnes C I. Output regulation of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(2): 131-140.
- [5] Guo L, Feng C B, Chen W H. A survey of disturbance-observer-based control for dynamic nonlinear system[J]. Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive System-series B: Applications & Algorithms, 2006, 13: 79-84.
- [6] Chen W H, Yang J, Guo L, et al. Disturbance-observer-based control and related methods—An overview[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2016, 63(2): 1083-1095.
- [7] Yang J, Ding Z T. Global output regulation for a class of lower triangular nonlinear systems: A feedback domination approach[J]. Automatica, 2017, 76: 65-69.
- [8] Guo L, Chen W H. Disturbance attenuation and rejection for systems with nonlinearity via DOBC approach[J]. International Journal of Robust Nonlinear Control, 2005, 15(3): 109-125.
- [9] Wen X Y, Guo L, Yan P. Composite hierarchical anti-disturbance control for robotic systems with multiple disturbances[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2014, 12(3): 541-551.
- [10] Guo L, Cao S Y. Anti-disturbance control theory for systems with multiple disturbances: A survey[J]. ISA Transactions, 2014, 53(4): 846-849.
- [11] Wei X J, Zhang H F, Sun S Y, et al. Composite hierarchical antidisturbance control for a class of discrete-time stochastic systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(9): 3292-3302.
- [12] Yao X M, Guo L, Wu L, et al. Static anti-windup design for nonlinear Markovian jump systems with multiple disturbances[J]. Information Sciences, 2017, 418/419: 169-183.
- [13] Wen X Y, Yan P. Two-layer observer based control for a class of uncertain systems with multi-frequency disturbances[J]. ISA Transactions, 2016, 63(7): 84-92.
- [14] 吴云洁, 田大鹏, 刘佑民. 飞行仿真转台的完全跟踪控制[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(3): 414-420.  
(Wu Y J, Tian D P, Liu Y M. Full tracking control of flight simulator[J]. Control Theory & Applications, 2011, 28(3): 414-420.)

#### 作者简介

文新宇(1977—), 男, 副教授, 博士, 从事干扰估计和补偿、干扰观测等研究, E-mail: wxysunrain@163.com;

王子豪(1993—), 男, 硕士生, 从事干扰估计和补偿的研究, E-mail: wzh1203150873@163.com;

王宝光(1994—), 男, 硕士, 从事鲁棒控制的研究, E-mail: WBG527422793@163.com;

王丹(1995—), 女, 学士, 从事抗干扰控制的研究, E-mail: WangDan2014632@163.com.

(责任编辑: 闫妍)