

控制与决策

Control and Decision

基于马尔可夫过程的多部件系统劣化状态空间划分模型

张晓红, 张欣, 石冠男, 甘婕

引用本文:

张晓红, 张欣, 石冠男, 等. 基于马尔可夫过程的多部件系统劣化状态空间划分模型[J]. 控制与决策, 2021, 36(2): 418–428.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0480>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于双层规划的高超声速飞行器预警资源分配方法

Early warning resource allocation method for hypersonic vehicle based on bi-level programming

控制与决策. 2021, 36(2): 443–449 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0717>

标签Petri网的路径信息在故障诊断中的应用

Application of path information of labeled Petri nets in fault diagnosis

控制与决策. 2021, 36(2): 325–334 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0698>

参数未知的离散系统Q-学习优化状态估计与控制

Q-learning optimal state estimation and control for discrete systems with unknown parameters

控制与决策. 2020, 35(12): 2889–2897 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0180>

自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

双层多态加权 k/n 系统可用性模型与冗余设计优化

Availability modeling and redundancy design optimization of dual hierarchical multi-state weighted k/n system

控制与决策. 2020, 35(11): 2752–2760 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1752>

基于马尔可夫过程的多部件系统劣化状态空间划分模型

张晓红^{1,2†}, 张欣^{1,2}, 石冠男¹, 甘婕^{1,2}

(1. 太原科技大学 工业与系统工程研究所, 太原 030024;

2. 山西人文社科重点研究基地 装备制造业创新发展研究中心, 太原 030024)

摘要: 工业系统的复杂性及智能化程度的不断提高使得系统的可靠性和安全性严重制约着系统正常的工作运转. 长时间的工作运行会加大系统的故障风险, 降低其安全稳定性. 为了减少系统故障给产品质量和生产成本带来的影响, 系统的最优维修决策问题逐渐成为研究的热点. 分析系统的劣化状态有利于对系统做出正确的维修决策, 延长系统的运行时间及减少经济损失. 针对相同且劣化独立的多个部件组成的系统, 建立离散状态建模下的多部件系统的多状态联合劣化空间划分模型. 通过联合劣化状态空间的划分, 给出所有维修需求组合及其概率计算通式, 运用马尔可夫过程理论建立系统状态的平稳概率模型, 并通过数值实验验证了该模型的正确性和有效性.

关键词: 多部件系统; 离散状态建模; 劣化状态空间划分; 马尔可夫过程; 平稳概率

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0480

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 张晓红, 张欣, 石冠男, 等. 基于马尔可夫过程的多部件系统劣化状态空间划分模型[J]. 控制与决策, 2021, 36(2): 418-428.

Multi-component system state space partition model based on Markov process

ZHANG Xiao-hong^{1,2†}, ZHANG Xin^{1,2}, SHI Guan-nan¹, GAN Jie^{1,2}

(1. Division of Industrial and System Engineering, Taiyuan University of Science & Technology, Taiyuan 030024, China; 2. Research Centre for Innovation and Development of Equipment Manufacturing Industry, Key Research Bases for Humanities and Social Sciences in Shanxi, Taiyuan 030024, China)

Abstract: With the complexity of industrial systems and the increasing degree of intelligence, the normal operation of the system is seriously restricted by the reliability and safety of the system. Long-term work operation will increase the risk of system failure and reduce its safety and stability. In order to reduce the impact of system failure on product quality and production cost, the optimal maintenance decision problem of the system has gradually become a research hot topic. Analyzing the degraded state of the system facilitates can help make correct maintenance decisions for the system, extending system uptime and reducing the economic losses. For system consisting of multiple components that are identical and degraded independently, a multi-state joint degradation space partition model for multi-component systems under discrete state modeling is established. According to the division of the joint degradation state space, the combination of all maintenance requirements and their probability calculation formula are given, a stationary probability model of the system state is established using Markov process theory. The correctness and effectiveness of the model are verified by numerical experiments.

Keywords: multi-units systems; discrete state modeling; deterioration state space partitioning method; Markov process; stationary probability

0 引言

近年来,生产系统智能化程度的不断提高导致对系统中部件的可靠性和安全性的要求越来越高.维修

的目的在于减少部件长时间运行后导致的劣化故障及造成的经济损失.为了保证最佳的维修效果及最小的维修费用,如何选择最优的维修策略便逐渐成为

收稿日期: 2019-04-17; 修回日期: 2019-09-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71701140, 72071183, 61703297); 山西省高等学校科技创新项目(201802091); 山西省高等学校科学研究优秀成果培育项目(2019SK028); 山西省自然科学基金项目(201801D121166); 山西省重点研发计划项目(201703D111011).

责任编辑: 刘民.

†通讯作者. E-mail: zhangxiaohong1111@126.com.

业界研究的热点^[1-2].

生产系统的复杂性使得系统中的部件之间存在着结构依赖、随机依赖和经济依赖^[3]等相互关系. 越来越多的学者在多部件系统的维修决策建模研究中均考虑了部件间的3种相互依赖关系^[4-6], 这些依赖关系直接影响到维修决策建模的复杂度和模型的正确性和有效性, 是不可忽略的关键因素. 多部件系统的维修策略通常有成批维修、成组维修和机会维修. 机会维修是在系统计划性停机或其他部件维修时, 对未发生故障的部件同时进行动态成组维修, 可以节约大量维修时间和费用^[7].

在系统的维修决策建模研究中, 对于系统状态的建模方式可分为连续状态建模和离散状态建模两大类. 连续状态建模是将系统的劣化过程视为一个连续的随机过程, 如Gamma过程、Winner过程等, 用系统状态的概率密度函数描述其劣化的随机特性. 文献[8]以气体绝缘组合电器设备为研究对象, 将劣化过程视为Gamma过程, 提出了基于定期检测GIS (gas insulated switchgear) 设备的维护策略; 文献[9]将劣化过程建模为连续的Gamma过程, 制定了考虑系统中部件存在随机依赖和经济依赖下的视情维修策略.

离散状态建模是将系统劣化过程离散化, 从状态全新到发生故障的劣化过程中, 将系统状态分为多个离散的状态, 各状态的劣化程度依次递增. 文献[10]引入离散状态的随机模型描述系统劣化过程, 对序贯检测时的多部件系统视情维修决策问题进行了分析; 文献[11]用马尔科夫链表示变压器劣化过程中的状态, 建立了费用率的优化模型; 文献[12]利用非齐次马尔科夫链建立了系统可靠性模型; 文献[13]用转移概率的变化表示系统劣化过程, 并提出了系统的最优维修策略.

对于实际的生产系统, 其运行状态的劣化必然是一个连续的过程, 对其进行连续劣化建模可以有效地表征该过程的随机特性. 然而, 在实际应用中, 连续监测到的系统状态数据过于冗余, 状态概率计算的复杂度过高, 且复杂的计算过程也会导致计算误差大. 同时, 由于状态数量较多, 在计算多部件系统的联合退化特性时极易带来组合爆炸问题. 考虑到在具体的应用对象中, 某些系统或部件的监测状态一般未达到某个特定的阈值时, 不会给系统的运行带来太大影响, 因为存在些许无价值状态, 所以只需对系统的状态进行区域划分即可准确反映其运行性能. 因此, 将系统的劣化过程离散化处理, 简化系统的可靠性分析模型, 有着现实可行的意义.

针对多部件系统的维修决策建模, 通常需要给出

系统所有可能的维修需求组合及其概率, 为维修决策的建模奠定基础. 文献[14-15]针对连续状态下的多部件系统, 提出了多部件系统的联合状态空间划分模型, 并在此基础上分别针对相同和不相同的多部件系统进行了维修决策建模和优化研究. 由于该模型中的联合劣化状态稳态概率密度函数求解时间及空间复杂度较高, 且对于3个以上的不相同多部件系统的稳态概率密度函数虽然定义了计算通式, 但其数值求解问题至今无法给出合适的方案. 因此, 可以采用离散状态方式建模替代连续状态空间划分的建模方法.

本文主要针对相同且劣化独立的多个部件组成的系统, 研究该系统在马尔科夫退化建模下多状态联合劣化状态空间划分建模问题. 通过联合劣化状态空间的划分, 确定各维修需求区域划分及需求组合的概率计算模型, 并推导多部件系统考虑机会维修时的平稳概率模型及其数值解法, 最后通过数值实验验证平稳概率模型及数值解法的正确性和有效性.

1 系统描述

1.1 系统劣化建模

假设系统由 M 个劣化过程相互独立的相同部件组成, 根据部件的性能或者运行情况, 可将部件的运行状态划分为多个不同的状态, 这些状态的集合可表示为 $S = \{1, 2, \dots, f\}$. 任意部件 i ($i = 1, 2, \dots, M$) 的劣化过程均为马尔科夫过程, 该过程表示如下:

- 1) 任意时刻部件 i 的劣化状态为 x_i ($x_i \in S$);
- 2) 部件初始运行时状态全新, 即 $x_i = 1$;
- 3) 部件 i 的劣化状态达到特定的状态 f 时, 部件发生故障.

1.2 维修策略

针对系统中的每个部件根据其劣化状态可分别安排机会维修、预防维修、故障后维修3种相应的维修活动. 用 o 、 p 、 f 分别表示部件的机会维修状态阈值、预防维修状态阈值、故障后维修状态阈值, 在固定的检测周期 T 同时检测系统中的每个部件的劣化状态, 每次检测过后根据任意部件 i 的劣化状态判断其是否有维修需求:

- 1) $x_i = f$, 部件 i 发生故障, 故障后维修;
- 2) $p \leq x_i < f$, 对部件 i 进行预防维修;
- 3) 由于机会维修是利用多个部件同时维修, 比单个部件的独立维修更加经济, 对于部件 i , 在其余任意部件 j ($j \neq i$) 进行预防或故障后维修时, 若该部件的劣化状态满足 $o \leq x_i < p$, 则此部件同时对其进行机会预防维修;
- 4) 部件进行机会、预防维修及故障后维修后, 修

复后的部件状态均恢复为全新状态,部件正常运行;

5) 不符合以上条件不采取相关措施.

2 联合劣化状态空间划分

根据以上维修策略,部件的劣化状态空间被3个维修阈值划分为4个不同的区域:正常运行区、机会维修区、预防维修区和故障后维修区. 每个区域包含若干个可检测到的离散状态集,如图1所示. 在维修决策点,检测到的部件状态处于不同的区域,对应着不同的维修活动.

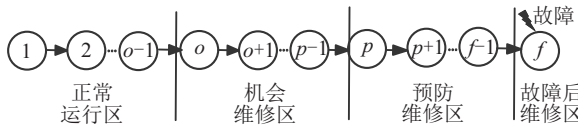


图1 部件劣化过程

若对图1中的区域进行抽象表示,则部件1~部件3系统的劣化状态空间划分可表示为图2~图4. 图2~图4中每个方块对应不同的维修需求. 虽然单部件系统不存在机会维修,但为了建模的一致性,在单部件区域划分时仍表示了机会维修区域. 图2~图4中:*O*表示机会维修,*P*表示预防维修,*C*表示故障后维修. $C_l P_m O_n$ 表示维修需求组合中同时有*l*个部件需要故障后维修,*m*个部件需要预防维修,*n*个部件需要机会维修.

多部件系统的维修需求组合的划分及其概率计算是建立维修策略优化模型的基础,而求解系统状态的平稳概率又是计算维修需求组合概率的关键. 下面根据已给出的系统的劣化状态划分模型,推导出*M*个相同多部件系统的联合状态的平稳概率的计算模型,随后进一步推导维修需求组合区域概率的计算通式.



图2 单部件系统的劣化状态空间划分

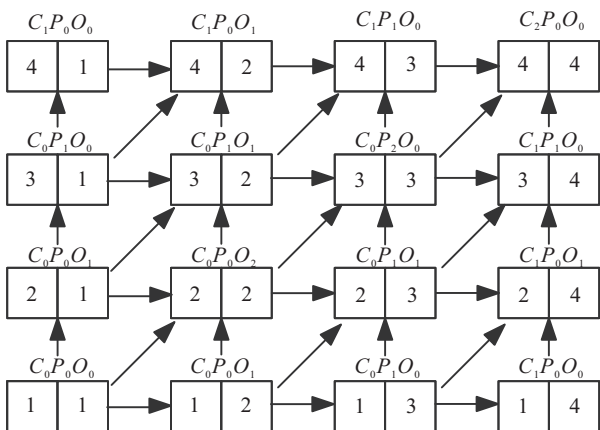
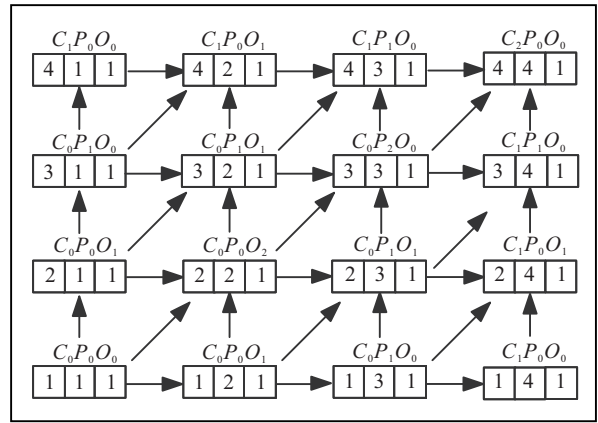
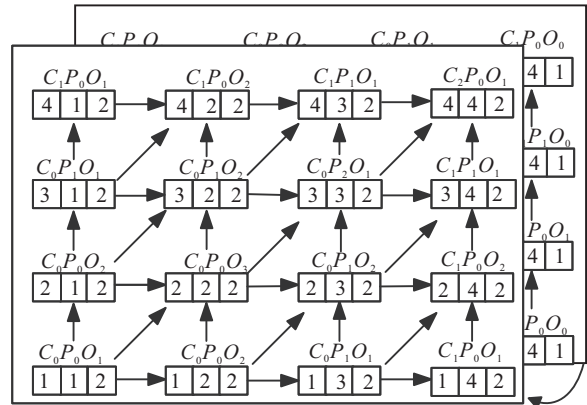


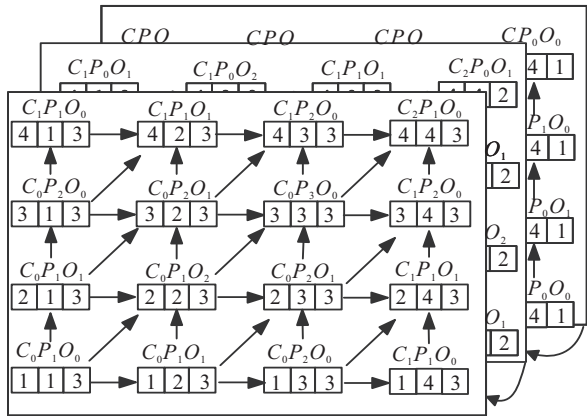
图3 相同两部件系统的劣化状态空间划分



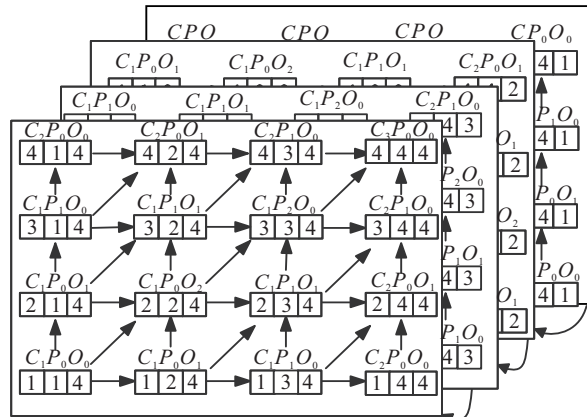
(a) 部件3处于正常运行区域



(b) 部件3处于机会维修区域



(c) 部件3处于预防维修区域



(d) 部件3处于故障后维修区域

图4 相同3部件系统的劣化状态空间划分

3 平稳概率分析与计算

对于多部件系统,经过一段时间的运行后,各部件之间的影响关系达到一个相对稳定的状态.系统在每次维修干预后再运行特定的时间 t 后,所处的状态概率趋于一个定值.系统状态的平稳概率正是指系统在某时刻处于某个状态的平稳概率.因此,本文在推导部件受到机会维修影响下各状态的平稳状态概率的基础上推导了系统状态的平稳概率.

3.1 部件转移过程描述

在没有人为干预的情况下,系统中部件状态总是从较好的状态向较差的状态转移.假设 t_1, t_2, \dots 为马尔可夫随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的状态转移时刻,且满足 $0 = t_0 < t_1 < \dots$,设 $X(t_n) = x_i$ 表示第 n 次状态转移之后部件所处的状态 x_i ,那么时间差 $t_{n+1} - t_n$ 即为部件在状态 x_i 的逗留时间.对于状态集 S 中的任意状态 x_i 和 x_k ,有

$$P\{t_{n+1} - t_n > \Delta t | X(t_n) = x_i, X(t_{n+1}) = x_k\} = \int_{\Delta t}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda \Delta t} = e^{-q_{x_i} \Delta t}. \quad (1)$$

其中: $x_k \geq x_i, \Delta t \geq 0$,即部件从状态 x_i 转移到状态 x_k 之前,在状态 x_i 逗留的时间服从以 q_{x_i} 为参数的指数分布.当时间间隔 Δt 足够小时,在有限状态空间 S 上的齐次马尔可夫过程存在以下性质:

$$\begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{x_i x_k}(\Delta t)}{\Delta t} = q_{x_i x_k}, x_i \neq x_k, x_i, x_k \in S; \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - P_{x_i x_i}(\Delta t)}{\Delta t} = -q_{x_i x_i}, x_i \in S. \end{cases} \quad (2)$$

根据此性质可以依据状态转移速率求解状态转移概率.

3.2 单部件系统的平稳概率计算

假设部件 i 在状态 x_i 的逗留时间服从参数为 λ 的指数分布,其分布函数为 $F = e^{-\lambda t}$.部件 i 的机会、预防、故障后维修时间分别服从参数为 μ_o, μ_p, μ_f 的指数分布,其分布函数形式分别为 $F = e^{-\mu_o t}, F = e^{-\mu_p t}, F = e^{-\mu_f t}$,则单部件系统中的状态转移情况如图5所示.

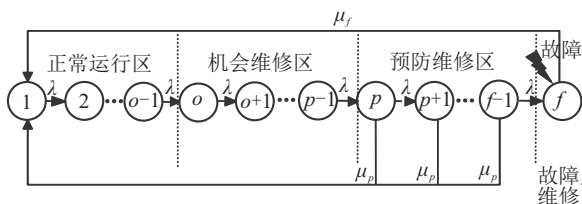


图5 单部件状态转移过程

由图5可以得到单部件系统的转移速率矩阵

Q^* 、状态转移矩阵 P^* ,即

$$Q^* = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ u_p & 0 & \dots & 0 & -u_p - \lambda & \lambda \rightarrow \\ u_p & 0 & \dots & 0 & 0 & -u_p - \lambda \\ \dots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \dots \\ u_p & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ u_f & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \leftarrow 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ddots & \ddots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -u_p - \lambda & \lambda & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & -u_f & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (3)$$

$$P^* = \begin{bmatrix} 1 - \lambda \Delta t & \lambda \Delta t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \Delta t & \lambda \Delta t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 - \lambda \Delta t & \lambda \Delta t \\ \mu_p \Delta t & 0 & \dots & 0 & 1 - \mu_p \Delta t - \lambda \Delta t \rightarrow \\ \mu_p \Delta t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_p \Delta t & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \mu_f \Delta t & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \leftarrow \lambda \Delta t & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 - \mu_p \Delta t - \lambda \Delta t & \lambda \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & 0 & 1 - \mu_p \Delta t - \lambda \Delta t & \lambda \Delta t & \dots \\ \dots & \dots & 0 & -\mu_f \Delta t & \dots \end{bmatrix}. \quad (4)$$

用 $P_{x_k}(t)$ 表示部件在维修干预后再运行 t 个单位时间后处于任意状态 x_k 的平稳概率, $P_{x_k x_i}(\Delta t)$ 表示部件从状态 x_k 转向状态 x_i 的状态转移概率,通过全概率公式可知,系统在 $t + \Delta t$ 时刻处在任意状态 x_i 的瞬时

概率为

$$P_{x_i}(t + \Delta t) = \sum_{x_k=1}^f [P\{X(t) = x_k\}P_{x_k x_i}(\Delta t)] = P_1(t) \cdot P_{1x_i}(\Delta t) + P_2(t) \cdot P_{2x_i}(\Delta t) + \dots, x_i, x_k \in S. \tag{5}$$

为区分不同部件的状态,将部件 $a(a = 1, 2, \dots, M)$ 处于任意状态 x_i 时的平稳概率表示为 $P_{x_i}^a(t)$,对于部件 $a(a = 1)$ 组成的系统,由式(5)可以得到

$$P_{x_i}^1(t + \Delta t) = \begin{cases} (1 - \lambda\Delta t)P_{x_i}^1(t) + \mu_p \sum_{x_k=p}^{f-1} P_{x_k}^1(t)\Delta t + \mu_f \Delta t P_f^1(t), & x_i = 1; \\ \lambda\Delta t P_{x_{i-1}}^1(t) + (1 - \lambda\Delta t)P_{x_i}^1(t), & x_i = 2, 3, \dots, p-1; \\ \lambda\Delta t P_{x_{i-1}}^1(t) + (1 - \mu_p\Delta t - \lambda\Delta t)P_{x_i}^1(t), & x_i = p, p+1, \dots, f-1; \\ (1 - \mu_f\Delta t)P_{x_i}^1(t) + \lambda\Delta t P_{x_{i-1}}^1(t), & x_i = f. \end{cases} \tag{6}$$

两端取极限,令 $\Delta t \rightarrow 0$,有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{x_i}^1(t + \Delta t) - P_{x_i}^1(t)}{\Delta t} = \frac{dP_{x_i}^1(t)}{dt} = \begin{cases} -\lambda P_{x_i}^1(t) + \mu_p \sum_{x_k=p}^{f-1} P_{x_k}^1(t) + \mu_f P_f^1(t), & x_i = 1; \\ \lambda P_{x_{i-1}}^1(t) - \lambda P_{x_i}^1(t), & x_i = 2, 3, \dots, p-1; \\ \lambda P_{x_{i-1}}^1(t) + (-\mu_p - \lambda)P_{x_i}^1(t), & x_i = p, p+1, \dots, f-1; \\ -\mu_f P_{x_i}^1(t) + \lambda P_{x_{i-1}}^1(t), & x_i = f. \end{cases} \tag{7}$$

当时间趋于无穷大时,状态的平稳概率将会趋于一个稳定值,因此其微分会趋于0,可得以下方程组:

$$\begin{cases} -\lambda P_{x_i}^1(t) + \mu_p \sum_{x_k=p}^{f-1} P_{x_k}^1(t) + \mu_f P_f^1(t) = 0, & x_i = 1; \\ \lambda P_{x_i}^1(t) - \lambda P_{x_{i-1}}^1(t) = 0, & x_i = 2, 3, \dots, p-1; \\ (\mu_p + \lambda)P_{x_i}^1(t) - \lambda P_{x_{i-1}}^1(t) = 0, & x_i = p, p+1, \dots, f-1; \\ \mu_f P_{x_i}^1(t) - \lambda P_{x_{i-1}}^1(t) = 0, & x_i = f. \end{cases} \tag{8}$$

由于各状态平稳概率之和为1,有关系式

$$\sum_{i=1}^{f-1} P_{x_i}^1(t) = 1 - P_f^1(t). \tag{9}$$

由式(9)化简可得

$$\begin{cases} \mu_p \sum_{x_k=p}^{f-1} P_{x_k}^1(t) + \mu_f P_f^1(t) + \lambda \sum_{x_k=2}^f P_{x_k}^1(t) = \lambda, & x_i = 1; \\ \lambda P_{x_i}^1(t) - \lambda P_{x_{i-1}}^1(t) = 0, & x_i = 2, 3, \dots, p-1; \\ (\mu_p + \lambda)P_{x_i}^1(t) - \lambda P_{x_{i-1}}^1(t) = 0, & x_i = p, p+1, \dots, f-1; \\ \mu_f P_{x_i}^1(t) - \lambda P_{x_{i-1}}^1(t) = 0, & x_i = f. \end{cases} \tag{10}$$

设解向量 $P = [P_1, P_2, \dots, P_f]^T, b = [\lambda, 0, \dots, 0]^T$,则此方程组的矩阵形式如下:

$$\begin{cases} K = K_{11} + K_{12} + K_{13} + K_{21} - K_{22} + K_{31} - K_{32} + K_{41} - K_{42}, \\ KP = b. \end{cases} \tag{11}$$

各矩阵详细定义见附录A.

3.3 相同两部件系统的平稳概率计算

相同两部件系统中,部件1和部件2处于状态 x_i 的平稳概率分别用 $P_{x_i}^1(t), P_{x_i}^2(t)$ 表示,在部件1进行预防或故障后维修,部件2的劣化状态满足 $0 \leq x_2 < p$ 时,部件2同时需要机会预防维修,反之同理,则两部件系统中的任一部件的状态转移过程见图6.

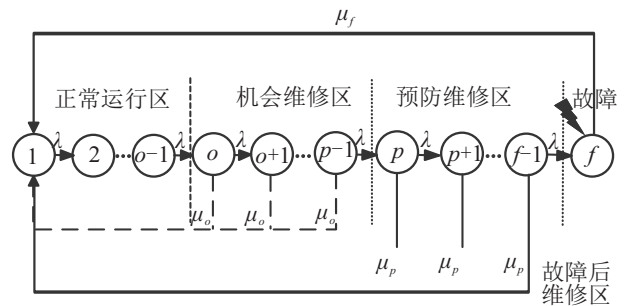


图6 单部件状态转移过程

由于在多部件系统中列出相应的状态转移矩阵及速率矩阵求解较为困难,可根据马尔科夫链的相关性质求解.当时间趋于无穷大时,系统状态的平稳概率将会趋于稳定,依据统计平衡的原则,该状态流入的平均传递率等于流出的平均传递率,此原则同样适用于单部件系统,由式(8)可知,与求解状态转移矩阵及速率矩阵列出的方程组相同.则对于两部件系统

中的任一部件,以部件1为例,可以得到

$$\begin{cases} -\lambda P_{x_i}^1(t) + \mu_o \sum_{x_k=o}^{p-1} P_{x_k}^1(t) \sum_{x_k=p}^f P_{x_k}^2(t) + \\ \mu_p \sum_{x_k=p}^{f-1} P_{x_k}^1(t) + \mu_f P_f(t) = 0, x_i = 1; \\ P_{x_i}^1(t) = P_{x_i-1}^1(t), x_i = 2, 3, \dots, o-1; \\ \lambda P_{x_i-1}^1(t) - \mu_o P_{x_i}^1(t) \sum_{x_k=p}^f P_{x_k}^2(t) - \lambda P_{x_i}^1(t) = 0, \\ x_i = o, o+1, \dots, p-1; \\ \lambda P_{x_i-1}^1(t) - \lambda P_{x_i}^1(t) - \mu_p P_{x_i}^1(t) = 0, \\ x_i = p, p+1, \dots, f-1; \\ \lambda P_{x_i-1}^1(t) - \mu_f P_{x_i}^1(t) = 0, x_i = f. \end{cases} \quad (12)$$

在 M 个相同部件组成的系统中,由于各部件的劣化过程相同,无需区分是哪一个部件需要维修,故部件1和部件2处于状态 x_i 的平稳概率都用 $p_{x_i}(t)$ 表示,即

$$p_{x_i}^1(t) = p_{x_i}^2(t) = p_{x_i}(t), x_i \in S. \quad (13)$$

求出部件1的平稳概率即可得到部件2的平稳概率.由式(9)可知,各状态平稳概率之和为1,则有以下关系式:

$$\begin{cases} \mu_o \sum_{x_k=o}^{p-1} P_{x_k}^1(t) \sum_{x_k=p}^f P_{x_k}^2(t) + \mu_p \sum_{x_k=p}^{f-1} P_{x_k}^1(t) + \\ \mu_f P_f(t) + \lambda \sum_{x_k=2}^f P_{x_k}^1(t) = \lambda, x_i = 1; \\ P_{x_i}(t) - P_{x_i-1}(t) = 0, x_i = 2, 3, \dots, o-1; \\ \lambda P_{x_i}(t) + \mu_o P_{x_i}(t) \sum_{x_k=p}^f p_{x_k}^2(t) - \lambda P_{x_i}(t) = 0, \\ x_i = o, o+1, \dots, p-1; \\ \mu_p P_{x_i}(t) + \lambda P_{x_i}(t) - \lambda P_{x_i-1}(t) = 0, \\ x_i = p, p+1, \dots, f-1; \\ \mu_f P_{x_i}(t) - \lambda P_{x_i-1}(t) = 0, x_i = f. \end{cases} \quad (14)$$

设解向量 $[P_1, P_2, \dots, P_f]^T$ 组成的 f 阶方阵记为 P ,则此方程组的矩阵形式如下:

$$\begin{cases} K_{11}P(K_{12}P) + K_{13}P + K_{14}P = b, x_i = 1; \\ K_{21}P - K_{22}P = 0, x_i = 2, 3, \dots, o-1; \\ K_{31}P + K_{32}P(K_{33}P) - K_{34}P = 0, \\ x_i = o, o+1, \dots, p-1; \\ K_{41}P - K_{42}P = 0, x_i = p, p+1, \dots, f-1; \\ K_{51}P - K_{52}P = 0, x_i = f. \end{cases} \quad (15)$$

各矩阵详细定义见附录B.

3.4 相同3部件系统的平稳概率计算

由于机会维修策略影响下各部件之间的劣化关系具有对称性,各部件状态的平稳概率趋于相同.为简化表示,在3个及以上部件组成的系统中,将各部件处于状态 x_i 的平稳概率均表示为 $P_{x_i}(t)$.3部件系统的平稳概率计算方程组如下:

$$\begin{cases} -\lambda P_{x_i}(t) + \mu_o \sum_{x_k=o}^{p-1} P_{x_k}^a(t) \left\{ 1 - \left[\sum_{x_k=1}^{p-1} P_{x_k}^a(t) \right]^2 - \right. \\ \left. 2 \sum_{x_k=1}^{o-1} P_{x_k}^a(t) \sum_{x_k=o}^{p-1} P_{x_k}^a(t) \right\} + \mu_p \sum_{x_k=p}^{f-1} P_{x_k}^a(t) + \\ \mu_f P_f(t) = 0, x_i = 1; \\ P_{x_i}(t) = P_{x_i-1}(t), x_i = 2, 3, \dots, o-1; \\ \lambda P_{x_i-1}(t) - \mu_o P_{x_i}(t) \left\{ 1 - \left[\sum_{x_k=1}^{p-1} P_{x_k}^a(t) \right]^2 - \right. \\ \left. 2 \sum_{x_k=1}^{o-1} P_{x_k}^a(t) \sum_{x_k=o}^{p-1} P_{x_k}^a(t) \right\} - \lambda P_{x_i}(t) = 0, \\ x_i = o, o+1, \dots, p-1; \\ \lambda P_{x_i-1}(t) - \lambda P_{x_i}(t) - \mu_p P_{x_i}(t) = 0, \\ x_i = p, p+1, \dots, f-1; \\ \lambda P_{x_i-1}(t) - \mu_f P_{x_i}(t) = 0, x_i = f. \end{cases} \quad (16)$$

3.5 相同多部件系统的平稳概率计算

对于多部件系统中的任一部件,均可归纳得到

$$\begin{cases} -\lambda P_{x_i}(t) + \mu_o \sum_{x_k=o}^{p-1} P_{x_k}^a(t) \left\{ 1 - \left[\sum_{x_k=1}^{p-1} P_{x_k}^a(t) \right]^{M-1} - \right. \\ \left. (M-1) \sum_{l=1}^{M-2} \left[l \sum_{x_k=1}^{o-1} P_{x_k}^a(t) \left[(M-1-l) \sum_{x_k=o}^{p-1} P_{x_k}^a(t) \right] \right] \right\} + \\ \mu_p \sum_{x_k=p}^{f-1} P_{x_k}^a(t) + \mu_f P_f(t) = 0, x_i = 1; \\ P_{x_i}(t) = P_{x_i-1}(t), x_i = 2, 3, \dots, o-1; \\ \lambda P_{x_i-1}(t) - \mu_o P_{x_i}(t) \left\{ 1 - \left[\sum_{x_k=1}^{p-1} P_{x_k}^a(t) \right]^{M-1} - \right. \\ \left. (M-1) \sum_{l=1}^{M-2} \left[l \sum_{x_k=1}^{o-1} P_{x_k}^a(t) \left[(M-1-l) \sum_{x_k=o}^{p-1} P_{x_k}^a(t) \right] \right] \right\} - \\ \lambda P_{x_i}(t) = 0, x_i = o, o+1, \dots, p-1; \\ \lambda P_{x_i-1}(t) - \lambda P_{x_i}(t) - \mu_p P_{x_i}(t) = 0, \\ x_i = p, p+1, \dots, f-1; \\ \lambda P_{x_i-1}(t) - \mu_f P_{x_i}(t) = 0, x_i = f. \end{cases} \quad (17)$$

4 维修需求组合概率计算

假设在某次维修干预后,经过 t 个单位时间,系统内有 l 个部件需要故障后更新, m 个部件需要预防维修, n 个部件需要机会维修, $0 \leq m + l + n \leq M$,则记该维修需求组合发生的概率为 $P_{C_l P_m O_n}^M(t)$.

4.1 单部件维修需求组合概率计算

单部件系统中,劣化空间划分如图2所示.

1) 当 $l = 0, m = 0, 0 \leq n \leq 1$ 时,部件正常运行,单部件状态落在区域1和区域2中,此区域发生的概率可表示为

$$P_W^1(t) = P_{C_0 P_0 O_0}^1(t) + P_{C_0 P_0 O_1}^1(t) = \sum_{x_i=1}^{p-1} P_{x_i}(t). \quad (18)$$

2) 当 $l = 0, m = 1, n = 0$ 时,部件 i 处于预防维修区域3,此区域发生的概率可表示为

$$P_{P_1}^1(t) = P_{C_0 P_1 O_0}^1(t) = \sum_{x_i=p}^{f-1} P_{x_i}(t). \quad (19)$$

3) 当 $l = 1, m = 0, n = 0$ 时,部件 i 在区域4处于故障后维修,此区域发生的概率可表示为

$$P_{C_1}^1(t) = P_{C_1 P_0 O_0}^1(t) = P_f(t). \quad (20)$$

4.2 相同两部件维修需求组合概率计算

两部件系统中,劣化空间划分如图3所示.

1) 当 $l = 0, m = 0, 0 \leq n \leq 2$ 时,系统维修组合为没有部件等待机会维修的区域(1,1),一个等待机会维修的区域(1,2)及(2,1),两个等待机会维修的区域(2,2),维修概率可表示为

$$P_W^2(t) = P_{C_0 P_0 O_0}^2(t) + 2P_{C_0 P_0 O_1}^2(t) + P_{C_0 P_0 O_2}^2(t) = \left[\sum_{x_i=1}^{o-1} P_{x_i}(t) \right]^2 + 2 \sum_{x_i=1}^{o-1} P_{x_i}(t) \sum_{x_i=o}^{p-1} P_{x_i}(t) + \left[\sum_{x_i=o}^{p-1} P_{x_i}(t) \right]^2. \quad (21)$$

2) 当 $l = 0, 1 \leq m \leq 2, 0 \leq n \leq 1$ 时,只有一个部件需要预防维修的维修需求组合包括只预防维修部件1的区域(3,1)和只预防维修部件2的区域(1,3),维修概率可表示为

$$P_{P_1}^2(t) = 2P_{C_0 P_1 O_0}^2(t) = 2 \sum_{x_i=1}^{o-1} P_{x_i}(t) \sum_{x_i=p}^{f-1} P_{x_i}(t). \quad (22)$$

有两个部件需要预防维修的维修需求组合包括:部件1的预防维修区域和部件2的机会维修区域(3,2),部件1的机会维修区域和部件2的预防维修区

域(2,3),两部件同时预防维修的区域(3,3)三部分,维修概率可表示为

$$P_{P_2}^2(t) = 2P_{C_0 P_1 O_1}^2(t) + P_{C_0 P_2 O_0}^2(t) = 2 \sum_{x_i=o}^{p-1} P_{x_i}(t) \sum_{x_i=p}^{f-1} P_{x_i}(t) + \left[\sum_{x_i=p}^{f-1} P_{x_i}(t) \right]^2. \quad (23)$$

3) 当 $1 \leq l \leq 2, m = 0, n = 0$ 时,只有一个部件需要故障后维修的区域包括只有故障后维修部件1区域(4,1),只有故障后维修部件2区域(1,4)两部分,维修概率可表示为

$$P_{C_1}^2(t) = 2P_{C_1 P_0 O_0}^2(t) = 2P_f(t) \sum_{x_i=1}^{o-1} P_{x_i}(t). \quad (24)$$

两个部件需要故障后维修的区域只有(4,4),维修概率可表示为

$$P_{C_2}^2(t) = P_{C_2 P_0 O_0}^2(t) = P_f(t)^2. \quad (25)$$

4) 当 $0 < l < 2, 0 \leq m \leq 2 - l, 0 \leq n \leq 1$ 时,一个部件需要故障后维修,另一个部件需要预防维修的区域包括:部件1故障后维修,部件2预防或机会维修,区域为(3,4)及(2,4). 部件2故障后维修,部件1预防或机会维修,区域为(4,3)及(4,2). 维修概率可表示为

$$P_{C_1 P_1}^2(t) = 2P_{C_1 P_1 O_0}^2(t) + 2P_{C_1 P_0 O_1}^2(t) = 2P_f(t) \sum_{x_i=p}^{f-1} P_{x_i}(t) + 2P_f(t) \sum_{x_i=o}^{p-1} P_{x_i}(t). \quad (26)$$

4.3 相同3部件维修需求组合概率计算

由图4所示的3部件系统的劣化状态空间划分结果中可以推导出系统各维修需求组合概率,总结如下:

1) 当 $l = 0, m = 0, 0 \leq n \leq 3$ 时,系统正常运行区域的组合概率为

$$\begin{aligned} P_w^3(t) &= P_{U_0}^3(t) + P_{U_1}^3(t) + P_{U_2}^3(t) + P_{U_3}^3(t), \\ P_{U_0}^3(t) &= P_{C_0 P_0 O_0}^2(t) P_{C_0 P_0 O_0}^1(t), \\ P_{U_1}^3(t) &= P_{C_0 P_0 O_1}^2(t) P_{C_0 P_0 O_0}^1(t) + P_{C_0 P_0 O_0}^2(t) P_{C_0 P_0 O_1}^1(t), \\ P_{U_2}^3(t) &= P_{C_0 P_0 O_2}^2(t) P_{C_0 P_0 O_0}^1(t) + P_{C_0 P_0 O_1}^2(t) P_{C_0 P_0 O_1}^1(t), \\ P_{U_3}^3(t) &= P_{C_0 P_0 O_2}^2(t) P_{C_0 P_0 O_1}^1(t). \end{aligned} \quad (27)$$

2) 当 $l = 0, 1 \leq m \leq 3, 0 \leq n \leq 2$ 时,任意一个部件需要预防维修的组合概率为

$$[0.0493, 0.0387, 0.0304, 0.0239, 0.0775]^T. \tag{42}$$

由计算可知,单部件系统中各状态的平稳概率之和 r_1 为1,各维修需求组合概率之和 r_2 也为1. 满足 r_1, r_2 数值为1的条件.

采用与以上单部件系统相同的参数设置,可计算得到两部件系统中各状态的平稳概率为

$$P_{x_i}(t) = [0.0889, 0.0889, 0.0889, 0.0889, 0.0889, 0.0838, 0.0789, 0.0744, 0.0701, 0.0551, 0.0433, 0.0340, 0.0267, 0.0210, 0.0681]^T. \tag{43}$$

由计算结果可知,各状态部件平稳概率之和为1,各维修需求组合概率之和为1,由于两部件系统涉及机会维修活动,增加了机会维修阈值,所得的各维修概率区域有些许不同,但结果同样满足 r_1, r_2 为1的条件. 由此可见,系统平稳概率的定义及其数值解是正确的.

5.2 有效性分析

在维修决策建模中,需要确定优化目标及决策变量之间的关系. 因此,接下来以两部件系统为例,分析机会、预防维修状态阈值 o, p 对系统状态的平稳概率的影响.

其他参数保持不变,分别改变机会、预防维修状态阈值,可得到不同维修状态阈值点相对应的 r_1, r_2 的变化情况,如表1所示.

表1 不同维修阈值点对应的 r_1, r_2 变化情况

维修阈值点	r_1	r_2
$o = 3$	1.0532	1.1093
$o = 5$	1.0139	1.0297
$o = 7$	0.9897	0.9795
$o = 9$	0.9868	0.9737
$p = 7$	0.9828	0.9660
$p = 9$	0.9908	0.9817
$p = 11$	1.0086	1.0172
$p = 13$	1.0213	1.0431

对机会维修阈值 $o = 3, 5, 7, 9$ 进行调整时均会导致平稳概率微小变化. 当预防维修阈值分别为 $p = 7, 9, 11, 13$ 时,对预防维修阈值的调整同样会导致平稳概率的变化,参数 o 逐渐增大时,因为机会维修区域越大,预防维修的区域越小,维修的概率变小,由于误差, r_1, r_2 会稍小于1. 而 p 变大时,预防维修区

域变大,维修的概率变大,误差的原因会使 r_1, r_2 稍大于1,但 r_1, r_2 整体的概率值保持在1的微小范围内.

其他参数保持不变,分别改变部件 i 的机会、预防维修时间分别服从的指数分布的参数 μ_o, μ_p ,故障后更换时间服从的指数分布的参数 μ_f ,部件 i 在状态 x_i 的逗留时间服从的指数分布的参数 λ ,得到的系统中各状态的平稳概率之和 r_1 及各维修需求组合概率之和 r_2 如表2所示.

表2 不同劣化参数对应的 r_1, r_2 变化情况

参数	r_1	r_2
$\lambda = 0.902$	1.0144	1.0290
$\lambda = 0.882$	1.0088	1.0176
$\lambda = 0.862$	1.0030	1.0059
$\lambda = 0.842$	0.9970	0.9940
$\mu_o = 0.281$	1.0097	1.0196
$\mu_o = 0.261$	1.0071	1.0143
$\mu_o = 0.241$	1.0044	1.0088
$\mu_o = 0.221$	1.0015	1.0030
$\mu_p = 0.302$	0.9951	0.9902
$\mu_p = 0.282$	0.9965	0.9929
$\mu_p = 0.262$	0.9979	0.9957
$\mu_p = 0.242$	0.9993	0.9986
$\mu_f = 0.293$	0.9993	0.9986
$\mu_f = 0.273$	0.9998	0.9995
$\mu_f = 0.253$	1.0003	1.0005
$\mu_f = 0.233$	1.0008	1.0017

实验结果表明,各维修阈值和劣化参数的变化均会导致系统状态的平稳概率的变化,从而影响维修需求组合的概率的计算值和模型的目标值,此理论方法对后续的维修决策优化建模是正确有效的.

6 结论

本文针对相同多部件系统进行了劣化状态空间划分建模,根据模型中劣化区域与维修需求分组的对应关系,推导了相同多部件系统各维修需求组合的通用概率计算公式. 基于马尔科夫链理论求解了系统联合状态的平稳概率,并通过数值实验验证了平稳概率的定义及其解法的正确性和有效性.

后续的研究中,根据联合劣化状态空间划分模型得到的平稳概率的表达式及其数值解法、维修需求分组的概率计算通式等建模方法,可以为维修优化建模的研究提供方法支持和理论依据,也可继续研究部件维修与备件库存联合策略问题.

附录A

1)

$$K_{11} = [K_{ij}^{11}] =$$

$$\begin{cases} \mu_p, i = 1, j = p, p + 1, \dots, f - 1; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{12} = [K_{ij}^{12}] = \begin{cases} \mu_f, i = 1, j = f; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{13} = [K_{ij}^{13}] = \begin{cases} \lambda, i = 1, j = 2, 3, \dots, f; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} \lambda, i = 1, j = i; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

2)

$$K_{21} = [K_{ij}^{21}] = \begin{cases} 1, i = 2, 3, \dots, p - 1, j = i; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{22} = [K_{ij}^{22}] = \begin{cases} 1, i = 2, 3, \dots, p - 1, j = i - 1; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

3)

$$K_{31} = [K_{ij}^{31}] = \begin{cases} \mu_p + \lambda, i = p, p + 1, \dots, f - 1, j = i; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{32} = [K_{ij}^{32}] =$$

$$\begin{cases} \lambda, i = p, p + 1, \dots, f - 1, j = i - 1; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

4)

$$K_{41} = [K_{ij}^{41}] = \begin{cases} \mu_f, i = f, j = i; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{42} = [K_{ij}^{42}] = \begin{cases} \lambda, i = f, j = i - 1; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

附录B

1)

$$K_{11} = [K_{ij}^{11}] =$$

$$\begin{cases} \mu_o, i = 1, j = o, o + 1, \dots, p - 1; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{12} = [K_{ij}^{12}] = \begin{cases} 1, i = 1, j = p, p + 1, \dots, f; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{13} = [K_{ij}^{13}] =$$

$$\begin{cases} \mu_p, i = 1, j = p, p + 1, \dots, f - 1; \\ \mu_f, i = 1, j = f; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{14} = [K_{ij}^{14}] = \begin{cases} \lambda, i = 1, j = 2, 3, \dots, f; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} \lambda, i = 1, j = 1, 2, \dots, f; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

2)

$$K_{21} = [K_{ij}^{21}] = \begin{cases} 1, i = 2, 3, \dots, o - 1, j = i; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{22} = [K_{ij}^{22}] = \begin{cases} 1, i = 2, 3, \dots, o - 1, j = i - 1; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

3)

$$K_{31} = [K_{ij}^{31}] = \begin{cases} \lambda, i = o, o + 1, \dots, p - 1, j = i; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{32} = [K_{ij}^{32}] = \begin{cases} \mu_o, i = o, o + 1, \dots, p - 1, j = i; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{33} = [K_{ij}^{33}] =$$

$$\begin{cases} 1, i = o, o + 1, \dots, p - 1, j = p, p + 1, \dots, f; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{34} = [K_{ij}^{34}] = \begin{cases} \lambda, i = o, o + 1, \dots, p - 1, j = i; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

4)

$$K_{41} = [K_{ij}^{41}] =$$

$$\begin{cases} \mu_p + \lambda, i = p, p + 1, \dots, f - 1, j = i; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{42} = [K_{ij}^{42}] =$$

$$\begin{cases} \lambda, i = p, p + 1, \dots, f - 1, j = i - 1; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

5)

$$K_{51} = [K_{ij}^{51}] = \begin{cases} \mu_f, i = f, j = i; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$$K_{52} = [K_{ij}^{52}] = \begin{cases} \lambda, i = f, j = i - 1; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

参考文献(References)

- [1] Alaswad S, Xiang Y, Safety E S, et al. A review on condition-based maintenance optimization models for stochastically deteriorating system[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2017, 157: 54-63.
- [2] 郝虹斐, 郭伟, 桂林, 等. 非完美维修情境下的预防性维修多目标决策模型[J]. *上海交通大学学报: 自然科学版*, 2018, 52(5): 518-524.
(Hao H F, Guo W, Gui L, et al. A multi-objective preventive maintenance decision-making model for imperfect repair process[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University: Science*, 2018, 52(5): 518-524.)
- [3] Thomas L C. A survey of maintenance and replacement models for maintainability and reliability of multi-item systems[J]. *Reliability Engineering*, 1986, 16(4): 297-309.
- [4] Nowakowski T, Werbińska S. On problems of multicomponent system maintenance modelling[J]. *International Journal of Automation and Computing*, 2009, 6(4): 364-378.
- [5] Keizer M C A O, Teunter R H, Veldman J. Clustering condition-based maintenance for systems with redundancy and economic dependencies[J]. *European Journal of Operational Research*, 2016, 251(2): 531-540.
- [6] Duan C, Chao D, Wang B. Optimal multi-level condition-based maintenance policy for multi-unit systems under economic dependence[J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2017, 91(9/10/11/12): 4299-4312.
- [7] 徐波, 韩学山, 孙宏斌, 等. 一种适用于发电机组的机会维修模型[J]. *中国电机工程学报*, 2018, 38(1): 120-129.
(Xu B, Han X S, Sun H B, et al. A new opportunistic maintenance optimization model for power generating unit[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2018, 38(1): 120-129.)
- [8] Wang Q, He Z, Lin S, et al. Failure modeling and maintenance decision for GIS equipment subject to degradation and shocks[J]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2017, 32(2): 1079-1088.
- [9] Heping Li, Estelle Deloux, Laurence Dieulle. A condition-based maintenance policy for multi-component systems with Lévy copulas dependence[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2016, 149: 44-55.
- [10] 程志君. 多部件系统视情维修决策技术研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学信息系统与管理学院, 2007.
(Cheng Z J. Research on condition-based maintenance decision of multi-unit system[D]. Changsha: College of Information System and Management, National University of Defense Technology, 2007.)
- [11] 翟晶晶, 张小莲, 郝思鹏, 等. 基于马尔可夫链的变压器维护策略优化模型[J]. *南京工程学院学报: 自然科学版*, 2017, 15(2): 17-21.
(Zhai J J, Zhang X L, Hao S P, et al. Optimal modeling of maintenance strategy of transformers based on markov chain[J]. *Journal of Nanjing Institute of Technology: Natural Science Edition*, 2017, 15(2): 17-21.)
- [12] 李志栋, 张涛. 非完美特性下的多状态系统检测与维修优化[J]. *北京航空航天大学学报*, 2017, 43(5): 951-960.
(Li Z D, Zhang T. Optimization of inspection and repair of multi-state system under imperfect characteristics[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2017, 43(5): 951-960.)
- [13] Liu Q M, Dong M, Lv W, et al. Manufacturing system maintenance based on dynamic programming model with prognostics information[J]. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 2019, 30(3): 1155-1173.
- [14] Zhang X, Zeng J. Deterioration state space partitioning method for opportunistic maintenance modelling of identical multi-unit systems[J]. *International Journal of Production Research*, 2015, 53(7): 2100-2118.
- [15] 张晓红. 多部件系统维修决策及维修与备件库存联合决策研究[D]. 太原: 太原科技大学机械工程学院, 2015.
(Zhang X H. Optimal maintenance decision and joint optimal decision of maintenance and spare parts inventory for multi-unit systems[D]. Taiyuan: College of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, 2015.)

作者简介

张晓红(1980—), 女, 副教授, 博士, 从事复杂系统预测与健康管理及其应用等研究, E-mail: zhangxiaohong1111@126.com;

张欣(1991—), 女, 硕士生, 从事复杂系统维修决策与健康管理的研 究, E-mail: zhangxin9963@126.com;

石冠男(1991—), 男, 博士生, 从事复杂系统维修决策与健康管理的研 究, E-mail: sgn190714@163.com;

甘婕(1976—), 女, 副教授, 博士, 从事复杂系统优化调度及健康管理等研 究, E-mail: ganjies_cn@sina.com.

(责任编辑: 闫 妍)