

控制与决策

Control and Decision

测量数据丢失的随机不确定系统滚动时域估计

刘帅, 赵国荣, 曾宾, 高超

引用本文:

刘帅, 赵国荣, 曾宾, 等. 测量数据丢失的随机不确定系统滚动时域估计[J]. 控制与决策, 2021, 36(2): 450–456.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0648>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于鲁棒优化的云医疗资源配置问题

Robust optimization based medical resource allocation problem in cloud healthcare system

控制与决策. 2021, 36(2): 469–474 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0455>

基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm

控制与决策. 2021, 36(1): 173–179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

事件触发机制下分布时滞网络化控制系统 H_∞ 故障检测

Event-triggered H_∞ fault detection for networked control systems with distributed delays

控制与决策. 2020, 35(12): 3059–3065 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0456>

基于强化学习的小型无人直升机有限时间收敛控制设计

Finite time control based on reinforcement learning for a small-size unmanned helicopter

控制与决策. 2020, 35(11): 2646–2652 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0328>

基于无标签、不均衡、初值不确定数据的设备健康评估方法

Equipment health risk assessment based on unlabeled, unbalanced data under uncertain initial condition

控制与决策. 2020, 35(11): 2687–2695 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1493>

测量数据丢失的随机不确定系统滚动时域估计

刘 帅^{1†}, 赵国荣¹, 曾 宾², 高 超¹

(1. 海军航空大学 岸防兵学院, 山东 烟台 264001; 2. 中国人民解放军 92095 部队, 浙江 台州 318000)

摘 要: 研究存在传感器测量数据丢失的随机不确定系统状态估计问题, 用概率已知的 Bernoulli 随机序列描述丢包现象, 并采用丢失测量数据的预测值进行丢包补偿, 将不确定条件下的最优化问题表示为 Min-Max 问题, 并通过引入拉格朗日算子, 将 Min-Max 问题转化为受限条件下的 Min-Min 问题, 进而实现最优状态估计的求解. 对所提算法的稳定性进行研究, 推导出估计误差范数平方期望的上界, 并给出估计误差范数平方期望收敛的充分条件. 最后通过仿真验证所提算法的有效性.

关键词: 滚动时域估计; 丢包; 预测补偿; 不确定系统; Min-Max 问题; 稳定性分析

中图分类号: TP271.7

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0648

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 刘帅, 赵国荣, 曾宾, 等. 测量数据丢失的随机不确定系统滚动时域估计 [J]. 控制与决策, 2021, 36(2): 450-456.

Moving horizon estimation for stochastic uncertain system with missing measurements

LIU Shuai^{1†}, ZHAO Guo-rong¹, ZENG Bin², GAO Chao¹

(1. Coastal Defence Academy, Naval Aviation University, Yantai 264001, China; 2. The Chinese People's Liberation Army 92095 Troop, Taizhou 318000, China)

Abstract: The state estimation problem of stochastic uncertain systems with missing measurements is studied. A group of Bernoulli distributed random variables is employed to describe the phenomenon of packet dropouts, and the predictor of lost observation is used as the observation when a packet is lost. The optimization problem under uncertain conditions is described as a Min-Max problem, by using two groups of Lagrange multipliers, the Min-Max problem is transformed into a constrained Min-Min problem, and then the optimal estimator is obtained. The stability of the proposed algorithm is studied, the upper bound of the expectation of the square norm of estimation error is obtained, and a sufficient condition for the convergence of the square norm of estimation error is given. Finally, an example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: moving horizon estimation; packet dropouts; prediction compensation; uncertain system; Min-Max problem; stability analysis.

0 引言

随着计算机和通信技术的日趋成熟, 网络控制系统(networked control systems, NCSs)的优势日益显现, 已广泛应用到组网导航、智能交通、工业控制等多个领域^[1-4]. 网络控制系统中, 传感器测量信息通过无线网络发送到估计器, 由于网络带宽限制、拓扑结构变化等因素的存在, 不可避免地会出现测量数据丢失现象. 另外, 在复杂的环境中, 传感器会出现增益退化现象, 导致量测不确定性的发生; 当受到不可预测的外部扰动作用时, 系统模型参数也会出现一定的不确定性. 因此, 研究带有测量数据丢失的不确定系统状态

估计问题, 具有很大的理论意义和工程应用价值.

近年来, 带有测量数据丢失和模型不确定系统的状态估计问题得到了学术界的广泛关注, 并取得了一系列研究成果. 文献[5]采用输入保持策略, 用最近一次的观测值补偿丢失的测量数据, 利用新息分析方法, 通过求解 Riccati 方程得到了多丢包系统的最优线性估计器; 文献[6]用丢失测量数据的预测值进行丢包补偿, 给出了最小方差意义下的最优线性估计器; 文献[7]将模型的不确定性描述为系统矩阵受到随机扰动, 设计了一种无偏估计器, 通过调整估计器增益, 达到了期望的估计性能; 文献[8]综合考虑了测

收稿日期: 2019-05-10; 修回日期: 2019-09-15.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61473306, 61701519, 61930074).

[†]通讯作者. E-mail: 15165714808@163.com.

量数据丢失和系统参数不确定的情况,采用输入保持策略补偿丢包,并将不确定系统状态估计问题转化为相应扰动下的规则最小二乘问题,得到了一种鲁棒递推滤波算法.

在实际的网络控制系统中,噪声往往是一些能量有限的信源,其统计特性难以准确得到,这使得很多现有的状态估计方法不再适用.另外,实际的系统普遍存在约束,如运动体的加速度约束、质量约束等,合理地利用约束条件,可以有效提高状态估计的精度.滚动时域估计(moving horizon estimation, MHE)是近年来发展迅速的一种方法,具有显式处理约束、滚动优化以及对噪声统计特性无特殊要求等特点^[9-12].本文将开展测量数据丢失和模型不确定情况下基于MHE的状态估计,将丢包现象建模为Bernoulli随机过程,采用预测补偿策略进行丢包补偿,将参数不确定系统的状态估计问题描述为Min-Max问题^[13-14],通过最小化最坏情况下的代价函数得到最优状态估计值,并对滤波算法的稳定性和代价函数中相关权矩阵的选取进行研究.

为了下文描述的方便,在此给出部分符号说明:给定矩阵 M , M^T 和 M^+ 分别表示矩阵 M 的转置和伪逆, $\|M\| = \sqrt{\lambda_{\max}(M^T M)}$, $\lambda_{\max}(M^T M)$ 表示矩阵 $M^T M$ 的最大特征值. 给定向量 v , $\|v\|$ 表示其欧几里得范数,如果 P 为正定矩阵,则 $\|v\|_P = (v^T P v)^{1/2}$. 给定时变向量 u_t , 定义 $u_{t_1, t_2} = \text{col}(u_{t_1}, u_{t_1+1}, \dots, u_{t_2})$. 另外,文中出现的符号 $\text{diag}(\dots)$ 和 $E\{\cdot\}$ 分别表示对角阵和求均值.

1 问题描述

考虑如下离散时间参数不确定系统:

$$x_{k+1} = A_k x_k + w_k, \tag{1}$$

$$z_k = C_k x_k + v_k. \tag{2}$$

其中: $x_k \in \mathcal{X} \subset R^n$ 表示 k 时刻的状态量, $z_k \in R^p$ 表示 k 时刻的系统输出, $w_k \in \mathcal{W} \subset R^n$ 和 $v_k \in \mathcal{V} \subset R^m$ 分别表示系统的状态噪声和测量噪声. \mathcal{X} 、 \mathcal{W} 、 \mathcal{V} 为满足如下条件的凸多面体集:

$$\mathcal{X} = \{x : \|x\| \leq \eta_x\}, \mathcal{W} = \{w : \|w\| \leq \eta_w\},$$

$$\mathcal{V} = \{v : \|v\| \leq \eta_v\}.$$

假设系数矩阵 $A_k \in \mathcal{A}$, $C_k \in \mathcal{C}$ 满足以下不确定性条件:

$$A_k = A + \delta A_k, C_k = C + \delta C_k. \tag{3}$$

其中: $\delta A_k = D \Delta_k E$, $\delta C_k = G \Delta_k' H$, $\|\Delta_k'\| \leq 1$, $\|\Delta_k\| \leq 1$.

系统输出经由无线网络发送到估计器的过程中,

由于网络约束的存在,不可避免地会出现丢包的现象.当出现丢包时,采用系统输出的一步预测值进行丢包补偿,可以得到如下观测方程:

$$y_{i|k} = \gamma_i z_i + (1 - \gamma_i) \hat{z}_{i|k-1}. \tag{4}$$

其中: $y_{i|k}$ ($i = k - N, k$) 表示基于 k 时刻的补偿策略得到的 i 时刻的补偿观测值; $\hat{z}_{i|k-1}$ 表示 k 时刻对 i 时刻丢包的补偿,可结合最优估计 $\hat{x}_{i|k-1}^*$ 通过下式得出:

$$\hat{z}_{i|k-1} = C \hat{x}_{i|k-1}^*. \tag{5}$$

注1 补偿项 $\hat{z}_{i|k-1}$ 是随着每个时刻的最优估计而变化的,即 $\hat{x}_{i|k_1-1}^* \neq \hat{x}_{i|k_2-1}^* \Rightarrow \hat{z}_{i|k_1-1} \neq \hat{z}_{i|k_2-1}$ ($k_1 \neq k_2$),下标中的 $k-1$ 表示该补偿项是利用 $k-1$ 时刻的最优估计预测得到的.

γ_i 为满足 Bernoulli 分布的随机变量,具有以下性质:

$$\begin{cases} P(\gamma_i = 1) = E\{\gamma_i = 1\} = \gamma, \\ P(\gamma_i = 0) = E\{\gamma_i = 0\} = 1 - \gamma. \end{cases} \tag{6}$$

实际应用中,在每一时刻,估计器都可通过一定的技术手段判断丢包是否发生,即 γ_i 的具体值已知.

采用滚动时域估计方法进行状态估计,其原理如图1所示.

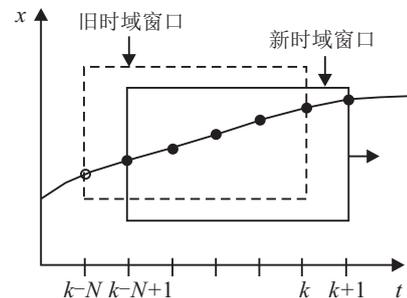


图1 MHE原理图

在时刻 k , 利用状态 x_{k-N} 的预估值 \bar{x}_{k-N} 和信息向量 $I_k = \text{col}(y_{k-N|k}, y_{k-N+1|k}, \dots, y_{k|k})$ 构造代价函数,对 $x_{k-N, k}$ 进行估计. 假设 k 时刻对 $x_{k-N, k}$ 的估计用 $\hat{x}_{k-N, k|k}$ 表示, $A_{k-N, k-1}$ 、 $C_{k-N, k}$ 的估计值分别用 $\hat{A}_{k-N, k-1}$ 、 $\hat{C}_{k-N, k}$ 表示,则可定义如下代价函数:

$$J_k = \|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}\|_M^2 + \sum_{i=k-N}^{k-1} \|\hat{x}_{i+1|k} - \hat{A}_i \hat{x}_{i|k}\|_Q^2 + \sum_{i=k-N}^k \|\gamma_i z_i + (1 - \gamma_i) \hat{z}_{i|k-1} - \hat{y}_{i|k}\|_R^2, \tag{7}$$

其中 M 、 Q 、 R 为需要设计的加权矩阵. $\hat{y}_{i|k}$ 由下式给出:

$$\hat{y}_{i|k} = \hat{C}_i \hat{x}_{i|k}. \tag{8}$$

结合式(7)与(8),可以将代价函数表示为 $J_k =$

$J_k(\hat{x}_{k-N,k|k}, \hat{A}_{k-N,k-1}, \hat{C}_{k-N,k})$, 如果不考虑模型不确定性, k 时刻对 $x_{k-N,k}$ 的最优估值 $\hat{x}_{k-N,k|k}^*$ 可直接通过极小化代价函数获得. 当存在模型不确定性时, 为了增强算法的鲁棒性, 需考虑模型不确定性影响最严重的情况, 此时, 可对问题作如下描述.

问题1 在 $k(k = N, N + 1, \dots)$ 时刻, 根据 \bar{x}_{k-N} 和 $I_k = \text{col}(y_{k-N|k}, y_{k-N+1|k}, \dots, y_{k|k})$, 通过极小化最坏情况下的代价函数可以得到 $x_{k-N,k}$ 的最优估值 $\hat{x}_{k-N,k|k}^*$, 即求解以下 Min-Max 问题:

$$\hat{x}_{k-N,k|k}^* = \min_{\hat{x}_{k-N,k|k}} \max_{\hat{A}_{k-N,k-1}, \hat{C}_{k-N,k}} J_k(\hat{x}_{k-N,k|k}, \hat{A}_{k-N,k-1}, \hat{C}_{k-N,k}). \quad (9)$$

$k + 1$ 时刻, 利用下式计算 \bar{x}_{k+1-N} :

$$\bar{x}_{k+1-N} = A\hat{x}_{k-N|k}^*, \quad k = N, N + 1, \dots, \quad (10)$$

结合新的信息矩阵 I_{k+1} , 可对 $x_{k-N+1,k+1|k+1}$ 进行估计.

2 Min-Max最优化问题的求解

首先, 考虑式(9)中的 Max 问题

$$J_k^*(\hat{x}_{k-N,k|k}) = \max_{\hat{A}_{k-N,k-1}, \hat{C}_{k-N,k}} J_k. \quad (11)$$

根据文献[14]的结论, 式(11)等价于以下受限条件下的极小化问题:

$$\begin{aligned} J_k^*(\hat{x}_{k-N,k|k}) = & \min_{\lambda_{k-N,k-1|k}, \nu_{k-N,k|k}} J_k'(\hat{x}_{k-N,k|k}, \lambda_{k-N,k-1|k}, \nu_{k-N,k|k}). \\ \text{s.t. } \lambda_{i|k} \geq & \|D^T Q D\|, \\ & i = k - N, k - N + 1, \dots, k - 1; \\ \nu_{i|k} \geq & \|G^T R G\|, \quad i = k - N, k - N + 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} J_k'(\hat{x}_{k-N,k|k}, \lambda_{k-N,k-1|k}, \nu_{k-N,k|k}) = & \|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}\|_M^2 + \sum_{i=k-N}^{k-1} (\|\hat{x}_{i+1|k} - \\ & A\hat{x}_{i|k}\|_{Q_{i|k}}^2 + \lambda_{i|k} \|E\hat{x}_{i|k}\|^2) + \\ & \sum_{i=k-N}^k (\|\gamma_i z_i + (1 - \gamma_i)\hat{z}_{i|k-1} - \\ & C\hat{x}_{i|k}\|_{R_{i|k}}^2 + \nu_{i|k} \|H\hat{x}_{i|k}\|^2), \\ Q_{i|k} = & Q(\lambda_{i|k}) = Q + QD(\lambda_{i|k}I - D^T Q D)^+ D^T Q, \\ R_{i|k} = & R(\nu_{i|k}) = R + RG(\nu_{i|k}I - G^T R G)^+ G^T R. \end{aligned}$$

结合式(9)与(12), 问题1可转化为以下 Min-Min 问题:

$$\hat{x}_{k-N,k|k}^* =$$

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}_{k-N,k|k}} \min_{\lambda_{k-N,k-1|k}, \nu_{k-N,k|k}} & J_k'(\hat{x}_{k-N,k|k}, \\ & \lambda_{k-N,k-1|k}, \nu_{k-N,k|k}). \\ \text{s.t. } \lambda_{i|k} \geq & \|D^T Q D\|, \\ & i = k - N, k - N + 1, \dots, k - 1; \\ \nu_{i|k} \geq & \|G^T R G\|, \quad i = k - N, k - N + 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (13)$$

在 J_k' 中, $\hat{x}_{k-N,k|k}$ 、 $\lambda_{k-N,k-1|k}$ 以及 $\nu_{k-N,k|k}$ 是相互独立的变量. J_k' 是正定的且是关于 $\hat{x}_{k-N,k|k}$ 、 $\lambda_{k-N,k-1|k}$ 和 $\nu_{k-N,k|k}$ 的严格凸函数. 由于式(11)是关于 $\hat{x}_{k-N,k|k}$ 的严格凸函数^[14], 结合式(11)与(12)的等价性可知, 式(12)也是关于 $\hat{x}_{k-N,k|k}$ 的严格凸函数, 根据凸函数的性质, 问题1具有全局最优解并且没有其他的局部最优解. 另外, 考虑到 J_k' 是关于 $\hat{x}_{k-N,k|k}$ 的二次型函数, 对于任意给定的 $\lambda_{k-N,k-1|k}$ 和 $\nu_{k-N,k|k}$, 满足式(13)极小化的 $\hat{x}_{k-N,k|k}$ 可以表示为关于 $\lambda_{k-N,k-1|k}$ 和 $\nu_{k-N,k|k}$ 的函数

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k-N,k|k}(\lambda_{k-N,k-1|k}, \nu_{k-N,k|k}) = & \\ \arg \min_{\hat{x}_{k-N,k|k}} & J_k'(\hat{x}_{k-N,k|k}, \lambda_{k-N,k-1|k}, \nu_{k-N,k|k}). \end{aligned} \quad (14)$$

注2 J_k' 中, $\hat{x}_{k-N,k|k}$ 、 $\lambda_{k-N,k-1|k}$ 和 $\nu_{k-N,k|k}$ 是相互独立的变量, 式(14)中 $\tilde{x}_{k-N,k|k}$ 与 $\lambda_{k-N,k-1|k}$ 、 $\nu_{k-N,k|k}$ 的关系是由最小化过程引入的.

根据二次型函数的性质, $\tilde{x}_{k-N,k|k}$ 可通过一阶最优条件 $\nabla_{\hat{x}_{k-N,k}} J_k' = 0$ 得出^[14]

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k-N|k} = & K_{k-N|k} \tilde{y}_{k-N|k}, \\ \tilde{x}_{i|k} = & K_{i|k} (Q_{i-1|k} A \tilde{x}_{i-1|k} + \tilde{y}_{i|k}), \\ & i = k - N + 1, k - N + 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (15)$$

其中: $K_{k-N,k|k}$ 和 $\tilde{y}_{k-N,k|k}$ 通过以下向后递推算算法计算:

$$\begin{aligned} K_{k|k} = & (Q_{k-1|k} + C^T R_{k|k} C + \nu_{k|k} H^T H)^{-1}; \\ K_{i|k} = & (Q_{i-1|k} - A^T Q_{i|k} K_{i+1|k} Q_{i|k} A + A^T Q_{i|k} A + \\ & \lambda_{i|k} E^T E + C^T R_{i|k} C + \nu_{i|k} H^T H)^{-1}, \\ & i = k - N + 1, k - N + 2, \dots, k - 1; \\ K_{k-N|k} = & (M - A^T Q_{k-N|k} K_{k-N+1|k} Q_{k-N|k} A + \\ & A^T Q_{k-N|k} A + \lambda_{k-N|k} E^T E + \\ & C^T R_{k-N|k} C + \nu_{k-N|k} H^T H)^{-1}. \\ \tilde{y}_{k|k} = & C^T R_{k|k} (\gamma_k z_k + (1 - \gamma_k) \hat{z}_{k|k-1}); \\ \tilde{y}_{i|k} = & A^T Q_{i|k} K_{i+1|k} \tilde{y}_{i+1|k} + C^T R_{i|k} (\gamma_i z_i + \\ & (1 - \gamma_i) \hat{z}_{i|k-1}), \\ & i = k - N + 1, k - N + 2, \dots, k - 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k-N|k} &= M\tilde{x}_{k-N} + A^T Q_{k-N|k} K_{k-N+1|k} \tilde{y}_{k-N+1|k} + \\ &C^T R_{k-N|k} (\gamma_{k-N} z_{k-N} + \\ &(1 - \gamma_{k-N}) \hat{z}_{k-N|k-1}). \end{aligned}$$

结合式(13)与(15)可知,最优拉格朗日乘子

$\tilde{\lambda}_{k-N,k-1|k}$ 和 $\tilde{\nu}_{k-N,k|k}$ 可通过以下极小化问题获得:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{k-N,k-1|k}, \tilde{\nu}_{k-N,k|k} &= \\ \min_{\lambda_{k-N,k-1|k}, \nu_{k-N,k|k}} &J'_k(\tilde{x}_{k-N,k|k}, \lambda_{k-N,k-1|k}, \nu_{k-N,k|k}). \\ \text{s.t. } \lambda_{i|k} &\geq \|D^T Q D\|, \\ &i = k - N, k - N + 1, \dots, k - 1; \\ \nu_{i|k} &\geq \|G^T R G\|, i = k - N, k - N + 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{16}$$

于是,问题1的解可通过下式给出:

$$\hat{x}_{i|k}^* = \tilde{x}_{i|k}(\tilde{\lambda}_{k-N,k-1|k}, \tilde{\nu}_{k-N,k|k}). \tag{17}$$

就形式而言,上述优化过程与文献[14]中的优化过程相同,但本文研究网络条件下的状态估计,通过引入预测补偿器来降低数据丢包对状态估计的影响.从 $\tilde{y}_{k-N,k|k}$ 的具体形式可以看出,随机变量 $\gamma_{k-N,k}$ 和预测值 $\hat{z}_{k-N,k|k-1}$ 都会对估计性能产生影响.另外,补偿机制的引入会对稳定性产生很大的影响,并进一步影响到参数 M 、 Q 、 R 的选取.从式(16)可以看出, Q 、 R 的选取会通过影响最优拉格朗日乘子 $\tilde{\lambda}_{k-N,k-1|k}$ 、 $\tilde{\nu}_{k-N,k|k}$ 的计算而影响最终的优化结果.

在实际应用中,为了简化运算,可采用以下近似方法对 $\lambda_{k-N,k-1|k}$ 和 $\nu_{k-N,k|k}$ 进行处理^[15]:

$$\begin{aligned} \lambda_{i|k} &= (1 + \alpha_\lambda) \|D^T Q D\|, \\ &i = k - N, k - N + 1, \dots, k - 1; \\ \nu_{i|k} &= (1 + \alpha_\nu) \|G^T R G\|, \\ &i = k - N, k - N + 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{18}$$

其中 α_λ 、 α_ν 可通过离线仿真等方法进行调整.

注3 式(5)中, $\hat{x}_{i|k-1}^*$ ($k - N \leq i \leq k - 1$)可通过在 $k - 1$ 时刻求解本节优化问题直接得到, $\hat{x}_{k|k-1}^*$ 需进行一步预测得到,即 $\hat{x}_{k|k-1}^* = A\hat{x}_{k-1|k-1}^*$.

3 稳定性分析

本节对前文所提算法的稳定性进行分析,首先作如下假设.

假设1 矩阵对 (A_k, C_k) 是可测的.

假设2 系统(1)是二次稳定的,即 $\exists P > 0$; s.t. $(A + \delta A)^T P (A + \delta A) - P < 0, \forall \delta A \in \mathcal{A}$.

为了后文的论述方便,且不失一般性,假设权矩阵满足 $M = mI, Q = qI, R = rI$,并给出以下参数定

义:

$$c = \|C\|^2, \bar{c} = \sup_{C_i \in \mathcal{C}} \|C_i\|^2, \bar{\rho}_A = \sup_{A_i, A_j \in \mathcal{A}} \|A_i - A_j\|^2,$$

$$\bar{\rho}_C = \sup_{C_i, C_j \in \mathcal{C}} \|C_i - C_j\|^2, h = \sup_k \|H_k\|^2,$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 2qN(\eta_w^2 + \bar{\rho}_A \eta_x^2) + \\ &4r(N + 1)[(\bar{\rho}_C + c + \bar{c})\eta_x^2 + \eta_v^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 3[rNh\eta_w^2 + r(N + 1)\eta_v^2] + \\ &2r(N + 1)(c_N + \bar{c}_N)\eta_x^2, \end{aligned}$$

$$\rho_3 = 3m(\bar{\rho}_A \eta_x^2 + \eta_w^2),$$

$$\rho = \left(2 + \frac{3h}{q}r\right)\rho_3 + \left(1 + \frac{3h}{q}r\right)\rho_1 + \rho_2,$$

$$\alpha = \frac{m}{2} + \frac{r}{3}\gamma f, \beta = m\left(8 + \frac{12h}{q}r\right)\|A\|^2,$$

$$a = \alpha^{-1}\beta, b = \alpha^{-1}\rho, c_N = \|C_N\|^2,$$

$$C_{Nk} = \text{diag}(C_{k-N}, C_{k-N+1}, \dots, C_k),$$

$$C_N = \text{diag}(\underbrace{C, \dots, C}_{N+1}), \bar{c}_N = \sup_{C_i \in \mathcal{C}} \|C_{Nk}\|^2,$$

$$R_N = \text{diag}(\underbrace{R, \dots, R}_{N+1}),$$

$$S_k = \text{diag}(\gamma_{k-N}I, \gamma_{k-N+1}I, \dots, \gamma_k I),$$

$$\tilde{S}_k =$$

$$\text{diag}((1 - \gamma_{k-N})I, (1 - \gamma_{k-N+1})I, \dots, (1 - \gamma_k)I),$$

$$f = \min_{\hat{A}_{k-N,k-1}, \hat{C}_{k-N,k}} \|F_k(\hat{A}_{k-N,k-1} \hat{C}_{k-N,k})\|^2,$$

$$d_0 = \max_{x_0, \bar{x}_0 \in \mathcal{X}} \|x_0 - \bar{x}_0\|,$$

$$b_0 = \alpha^{-1} \left[\left(2 + \frac{3h}{q}r\right) m d_0^2 + \left(1 + \frac{3h}{q}r\right) \rho_1 + \rho_2 \right],$$

$$F_k = \begin{bmatrix} C_{k-N} \\ C_{k-N+1} A_{k-N} \\ \vdots \\ C_k \prod_{i=1}^N A_{k-i} \end{bmatrix},$$

$$H_k =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_{k-N+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_{k-N+2} A_{k-N+1} & C_{k-N+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_k \prod_{i=1}^{N-1} A_{k-i} & C_k \prod_{i=1}^{N-2} A_{k-i} & \dots & C_k A_{k-1} & C_k \end{bmatrix}.$$

假设 k 时刻状态 x_{k-N} 的估计误差为

$$e_{k-N} = x_{k-N} - x_{k-N|k}^*. \tag{19}$$

结合前文的参数定义,可给出以下定理.

定理1 对于式(1)、(2)和(4)表示的系统,如果 M, Q, R 满足不等式

$$a = \alpha^{-1}\beta < 1, \quad (20)$$

则 e_{k-N} 范数平方的期望满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\|e_{k-N}\|^2\} \leq \frac{b}{1-a}. \quad (21)$$

其中

$$E\{\|e_{k-N}\|^2\} \leq \tilde{e}_{k-N}, \quad k = N, N+1, \dots \quad (22)$$

上界函数可根据以下方程得到:

$$\tilde{e}_0 = b_0, \tilde{e}_k = a\tilde{e}_{k-1} + b. \quad (23)$$

证明 首先,求 J_k^* 的上界.

由代价函数的性质和 $\hat{x}_{k-N,k|k}^*$ 的最优性可得

$$\begin{aligned} J_k^* &\leq \max_{\hat{A}_{k-N,k-1}, \hat{C}_{k-N,k}} J_k(x_{k-N|k}, \hat{A}_{k-N,k-1}, \hat{C}_{k-N,k}) = \\ &\sum_{i=k-N}^k \max_{\hat{C}_i} \|\gamma_i[(C_i - \hat{C}_i)x_i + v_i] + \\ &(1 - \gamma_i)(C\hat{x}_{i|k-1}^* - \hat{C}_i x_i)\|_R^2 + \|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}\|_M^2 + \\ &\sum_{i=k-N}^{k-1} \max_{\hat{A}_i} \|w_i + (A_i - \hat{A}_i)x_i\|_Q^2. \end{aligned} \quad (24)$$

根据前文变量的定义及 γ_i 的性质可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k-N}^{k-1} \max_{\hat{A}_i} \|w_i + (A_i - \hat{A}_i)x_i\|_Q^2 \leq \\ &2qN(\eta_w^2 + \bar{\rho}A\eta_x^2), \\ &\sum_{i=k-N}^{k-1} \max_{\hat{C}_i} \|\gamma_i[(C_i - \hat{C}_i)x_i + v_i] + \\ &(1 - \gamma_i)(C\hat{x}_{i|k-1}^* - \hat{C}_i x_i)\|_R^2 \leq \\ &4r(N+1)(\bar{\rho}C\eta_x^2 + \eta_v^2 + c\eta_x^2 + \bar{c}\eta_x^2). \end{aligned}$$

代入式(24)可得

$$J_k^* \leq \|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}\|_M^2 + \rho_1. \quad (25)$$

其次,考虑 J_k^* 的下界.

根据式(9)可得

$$\begin{aligned} J_k^* &\geq J_k(\hat{x}_{k-N,k|k}^*, A_{k-N,k-1}, C_{k-N,k}) = \\ &\| \hat{x}_{k-N|k}^* - \bar{x}_{k-N} \|_M^2 + \sum_{i=k-N}^{k-1} \| \hat{x}_{i+1|k}^* - A_i \hat{x}_{i|k}^* \|_Q^2 + \\ &\sum_{i=k-N}^k \| \gamma_i z_i + (1 - \gamma_i) \hat{Z}_{i|k-1} - \hat{y}_{i|k}^* \|_R^2, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\hat{y}_{i|k}^* = C_i \hat{x}_{i|k}^*$.

定义 $\hat{w}_{i|k}^* = \hat{x}_{i+1|k}^* - A_i \hat{x}_{i|k}^*, i = t - N, t - N + 1, \dots, t - 1$, 由式(26)可得

$$\begin{aligned} J_k^* &\geq \| \hat{x}_{k-N|k}^* - \bar{x}_{k-N} \|_M^2 + \sum_{i=k-N}^k \| y_{i|k} - \hat{y}_{i|k}^* \|_R^2, \\ J_k^* &\geq q \| \hat{w}_{k-N,k-1|k}^* \|^2, \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $\sum_{i=k-N}^k \| y_{i|k} - \hat{y}_{i|k}^* \|_R^2$ 可写成矩阵形式

$$\begin{aligned} &\| S_k(F_k x_{k-N} + H_k w_{k-N,k-1} + v_{k-N,k} - \\ &F_k \hat{x}_{k-N|k}^* - H_k \hat{w}_{k-N,k-1|k}^*) + \\ &\tilde{S}_k(C_N \hat{x}_{k-N,k|k-1}^* - C_{Nk} \hat{x}_{k-N,k|k}^*) \|_{R_N}, \end{aligned}$$

考虑以下式子:

$$\begin{aligned} &S_k(F_k x_{k-N} - F_k \hat{x}_{k-N|k}^*) = \\ &[S_k(F_k x_{k-N} + H_k w_{k-N,k-1} + v_{k-N,k} - \\ &F_k \hat{x}_{k-N|k}^* - H_k \hat{w}_{k-N,k-1|k}^*) + \\ &\tilde{S}_k(C_N \hat{x}_{k-N,k|k-1}^* - C_{Nk} \hat{x}_{k-N,k|k}^*)] - \\ &\tilde{S}_k(C_N \hat{x}_{k-N,k|k-1}^* - \\ &C_{Nk} \hat{x}_{k-N,k|k}^*) - S_k(H_k w_{k-N,k-1} + \\ &v_{k-N,k} - H_k \hat{w}_{k-N,k-1|k}^*). \end{aligned}$$

由和函数平方的性质可得

$$\begin{aligned} &\| F_k x_{k-N} - F_k \hat{x}_{k-N|k}^* \|_{S_k R_N S_k}^2 \leq \\ &3 \sum_{i=k-N}^k \| y_{i|k} - \hat{y}_{i|k}^* \|_R^2 + 3 \| \tilde{S}_k(C_N \hat{x}_{k-N,k|k-1}^* - \\ &C_{Nk} \hat{x}_{k-N,k|k}^*) \|_{R_N}^2 + 3 \| S_k(H_k w_{k-N,k-1} + \\ &v_{k-N,k} - H_k \hat{w}_{k-N,k-1|k}^*) \|_{R_N}^2. \end{aligned}$$

进一步可得

$$\begin{aligned} &\| F_k x_{k-N} - F_k \hat{x}_{k-N|k}^* \|_{S_k R_N S_k}^2 \leq \\ &3 \sum_{i=k-N}^k \| y_{i|k} - \hat{y}_{i|k}^* \|_R^2 + 9 \| H_k w_{k-N,k-1} \|_{S_k R_N S_k}^2 + \\ &9 \| H_k \hat{w}_{k-N,k-1|k}^* \|_{S_k R_N S_k}^2 + 9 \| v_{k-N,k} \|_{S_k R_N S_k}^2 + \\ &6 \| C_N \hat{x}_{k-N,k|k-1}^* \|_{\tilde{S}_k R_N \tilde{S}_k}^2 + 6 \| C_{Nk} \hat{x}_{k-N,k|k}^* \|_{\tilde{S}_k R_N \tilde{S}_k}^2. \end{aligned} \quad (28)$$

联立式(27)和(28)可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k-N}^k \| y_{i|k} - \hat{y}_{i|k}^* \|_R^2 \geq \\ &\frac{1}{3} \| F_k x_{k-N} - F_k \hat{x}_{k-N|k}^* \|_{S_k R_N S_k}^2 - 3 \frac{h}{q} r J_k^* - \rho_2. \end{aligned} \quad (29)$$

同理,由 $x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}^* = (x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}) + (\bar{x}_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}^*)$ 可得

$$\begin{aligned} &\| \hat{x}_{k-N|k}^* - \bar{x}_{k-N} \|_M^2 \geq \\ &\frac{1}{2} \| x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}^* \|_M^2 - \| x_{k-N} - \bar{x}_{k-N} \|_M^2. \end{aligned} \quad (30)$$

联立式(27)、(29)、(30)可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}^*\|_M^2 + \frac{1}{3}\|F_k x_{k-N} - \\ & F_k \hat{x}_{k-N|k}^*\|_{S_k R_N S_k}^2 \leq \\ & J_k^* + \frac{3h}{q} r J_k^* + \|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}\|_M^2 + \rho_2. \end{aligned} \quad (31)$$

结合 J_k^* 的上界可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|e_{k-N}\|_M^2 + \frac{1}{3}\|F_k e_{k-N}\|_{S_k R_N S_k}^2 \leq \\ & \left(2 + \frac{3h}{q} r\right)\|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}\|_M^2 + \left(1 + \frac{3h}{q} r\right)\rho_1 + \rho_2. \end{aligned} \quad (32)$$

根据 \bar{x}_{k+1-N} 和 x_{k-N} 的性质, 当 $k > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} & x_{k-N} - \bar{x}_{k-N} = \\ & A e_{k-N-1} + (A_{k-N-1} - A)x_{k-N-1} + w_{k-N+1}, \end{aligned}$$

于是可得

$$\|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}\|_M^2 \leq 3\|A e_{k-N-1}\|_M^2 + \rho_3.$$

代入式(32)可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|e_{k-N}\|_M^2 + \frac{1}{3}\|F_k e_{k-N}\|_{S_k R_N S_k}^2 \leq \\ & \left(8 + \frac{12h}{q} r\right)\|A e_{k-N-1}\|_M^2 + \rho. \end{aligned} \quad (33)$$

式(33)是一个包含 $\gamma_{k-N,k}$ 的不等式, 对不等号两边求期望可得

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2} E\{\|e_{k-N}\|^2\} + \frac{r}{3} \gamma E\{\|F_k e_{k-N}\|^2\} \leq \\ & m \left(8 + \frac{12h}{q} r\right) \|A\|^2 E\{\|e_{k-N+1}\|^2\} + \rho. \end{aligned} \quad (34)$$

由参数 f 的定义可知, $\|F_k e_{k-N}\|^2 \geq f\|e_{k-N}\|^2$, 代入式(34)可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m}{2} + \frac{r}{3} \gamma f\right) E\{\|e_{k-N}\|^2\} \leq \\ & m \left(8 + \frac{12h}{q} r\right) \|A\|^2 E\{\|e_{k-N-1}\|^2\} + \rho. \end{aligned}$$

由前文的参数定义可得

$$E\{\|e_{k-N}\|^2\} \leq a E\{\|e_{k-N-1}\|^2\} + b.$$

$k = N$ 时, 由式(32)可得 $E\{\|e\|^2\} \leq b$. 由 \tilde{e}_k 的定义可得

$$E\{\|e_{k-N}\|^2\} \leq \tilde{e}_{k-N}, \quad k = N, N+1, \dots$$

根据式(23), \tilde{e}_k 可写成以下形式:

$$\tilde{e}_k = a^k \tilde{e}_0 + b \sum_{i=0}^{k-1} a^i.$$

显然, 如果式(20)成立, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\|e_{k-N}\|^2\} \leq \frac{b}{1-a}. \quad \square$$

注4 加权矩阵可结合定理1的结论进行离线设计, 省去了传统MHE算法实时计算到达代价函数的

步骤, 可大大提高计算效率.

注5 根据定理1, $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\|e_{k-N}\|^2\}$ 受 A_i 、 C_i 、 M 、 Q 、 R 、 γ 等多个变量共同影响. 通过合理调节权矩阵 M 、 Q 、 R , 可以有效地降低丢包和参数不确定性对估计性能的影响.

4 仿真分析

考虑如下线性时变离散随机系统:

$$\begin{aligned} & x_{k+1} = (A + \delta A_k)x_k + w_k, \\ & z_k = (C + \delta C_k)x_k + v_k. \end{aligned}$$

其中: $\delta A = D \Delta_k E$, $\delta C = G \Delta_k' H$, $\|\Delta_k'\| \leq 1$, $\|\Delta_k\| \leq 1$, $A = \begin{bmatrix} 0.68 & -0.5 \\ 1 & 0.7 \end{bmatrix}$, $C = [10, 1]$, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}$, $E = [0, 0.04]$, $H = [2, 0.2]$, $G = 1$.

定义截断正态分布的概率密度函数为

$$\mathcal{N}_T(x; \bar{m}, \bar{C}, \bar{S}) = \begin{cases} \frac{\mathcal{N}(x; \bar{m}, \bar{C})}{\int_{\bar{S}} \mathcal{N}(x; \bar{m}, \bar{C}) dx}, & x \in \bar{S}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中: $\mathcal{N}(x; \bar{m}, \bar{C})$ 为正态分布的概率密度函数, \bar{m} 和 \bar{C} 分别为变量的均值和方差, \bar{S} 为表示变量方差界限的集合.

假设 x_0 、 w_k 、 v_k 为相互独立的随机变量, 概率密度函数分别为 $\mathcal{N}_T(x_0; 0, \sigma_x^2 I, [-3\sigma_x, 3\sigma_x]^2)$, $\mathcal{N}_T(w_t; 0, \sigma_w^2 I, [-3\sigma_w, 3\sigma_w]^2)$, $\mathcal{N}_T(v_t; 0, \sigma_v^2 I, [-3\sigma_v, 3\sigma_v]^2)$. 其中: $x_0 = [1, 1]^T$, $\sigma_x = 1$, $\sigma_w = 1$, $\sigma_v = 1$.

采用均方根误差 (root mean square errors, RMSE) 描述估计算法的性能, 定义如下:

$$RMSE(k) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} \|e_{k,j}\|^2}.$$

其中: τ 为仿真次数, $e_{k,j}$ 为第 j 次仿真中 k 时刻的估计误差.

根据式(26)选取加权矩阵 $M = 0.15I_2$, $Q = 10^2 I_2$, $R = 10$, 取 $\gamma = 0.8$, 进行100次蒙特卡洛仿真, 仿真结果如图2所示.

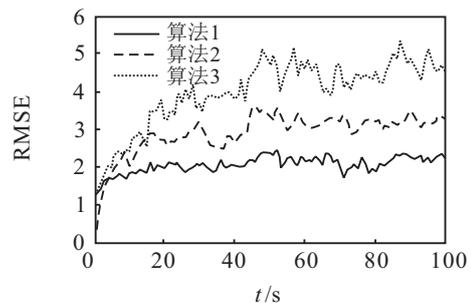


图2 算法性能比较

图2中, 算法1为本文提出的方法, 算法2为基于KF的估计算法^[5], 算法3为现有的滚动时域估计方

法^[16]. 不难看出, 本文所提算法的性能优于另外两种方法.

图3对比了不同补偿策略下算法的性能. 可以看出, 预测补偿策略下的RMSE明显小于另外两种情况, 说明基于预测值的补偿策略能够更好地减弱测量数据丢失对状态估计的影响.

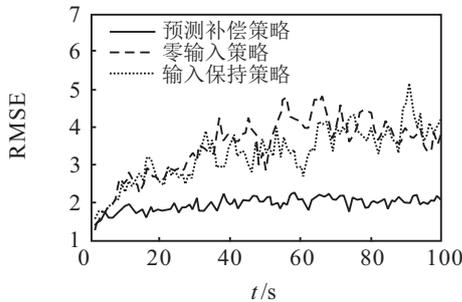


图3 补偿策略性能对比

5 结论

本文针对存在传感器测量数据丢失的随机不确定系统提出了一种滚动时域估计方法, 采用预测补偿策略处理丢包现象, 通过求解Min-Max问题得到不确定系统的状态估计. 对所提算法进行稳定性分析, 得到了估计误差范数平方期望的上界函数, 推导了估计误差范数平方期望收敛的充分条件, 可作为代价函数中加权矩阵的选取依据. 仿真结果表明, 本文所提算法具有较好的估计性能.

参考文献(References)

- [1] Zhang D, Shi P, Wang Q G, et al. Analysis and synthesis of networked control systems: A survey of recent advances and challenges[J]. ISA Transactions, 2017, 66: 376-392.
- [2] Liang X, Xu J J. Control for networked control systems with remote and local controllers over unreliable communication channel[J]. Automatica, 2018, 98: 86-94.
- [3] Sun S L, Lin H L, Ma J, et al. Multi-sensor distributed fusion estimation with applications in networked systems: A review paper[J]. Information Fusion, 2017, 38: 122-134.
- [4] Gao C, Zhao G R, Lu J H, et al. Decentralised moving-horizon state estimation for a class of networked spatial-navigation systems with random parametric uncertainties and communication link failures[J]. IET Control Theory and Applications, 2015, 9(18): 2666-2677.
- [5] Sun S L, Xie L H, Xiao W D, et al. Optimal linear estimation for systems with multiple packet dropouts[J]. Automatica, 2008, 44(5): 1333-1342.
- [6] Sun S L, Tian T, Lin H L. Optimal linear estimators for systems with finite-step correlated noises and packet dropout compensations[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2016, 64(21): 5672-5681.

- [7] 赵国荣, 韩旭, 杜闻捷, 等. 具有传感器增益退化的不确定系统融合估计器[J]. 控制与决策, 2016, 31(8): 1413-1418.
(Zhao G R, Han X, Du W J, et al. Fusion estimator with stochastic sensor gain degradation for uncertain systems[J]. Control and Decision, 2016, 31(8): 1413-1418.)
- [8] 潘爽, 赵国荣, 高超, 等. 测量数据丢失的随机不确定系统鲁棒滤波递推算法[J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 280-284.
(Pan S, Zhao G R, Gao C, et al. Robust filter recursive algorithm for stochastic uncertain system with missing measurements[J]. Control and Decision, 2011, 26(2): 280-284.)
- [9] Rao C V, Rawlings J B, Lee J H. Constrained linear state estimation—A moving horizon approach[J]. Automatica, 2001, 37(10): 1619-1628.
- [10] Zhao H Y, Chen H. Moving horizon estimation approach to constrained systems with uncertain noise covariance[J]. Control and Decision, 2008, 23(2): 217-220.
- [11] Liu A D, Yu L, Zhang W A. Moving horizon estimation for networked systems with multiple packet dropouts[J]. Journal of Process Control, 2012, 22(9): 1593-1608.
- [12] Farina M, Trecate G F, Scattolini R. Distributed moving horizon estimation for linear constrained systems[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2010, 55(11): 2462-2475.
- [13] Xie L T, Xie L, Su H Y. A comparative study on algorithms of robust and stochastic MPC for uncertain systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2017, 43(6): 969-992.
- [14] Alessandri A, Baglietto M, Battistelli G. Min-Max moving-horizon estimation for uncertain discrete-time linear systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2012, 50(3): 1439-1465.
- [15] Sayed A H. A framework for state-space estimation with uncertain models[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(7): 998-1013.
- [16] Xue B Q, Li S Y, Zhu Q M. Moving horizon state estimation for networked control systems with multiple packet dropouts[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(9): 2360-2366.

作者简介

刘帅(1990—), 男, 博士生, 从事组网导航技术的研究, E-mail: 15165714808@163.com;

赵国荣(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器导航与控制等研究, E-mail: GRZhao6881@163.com;

曾宾(1989—), 男, 博士生, 从事飞行器综合导航技术的研究, E-mail: 363929893@qq.com;

高超(1985—), 男, 工程师, 博士, 从事组网导航技术等研究, E-mail: gaochao.shd@163.com.