控制与决策
Control and Decision

一种要素双模糊的限制交流结构合作博弈方法及应用

杨洁， 李登峰

一种要素双模糊的限制交流结构合作博弈方法及应用

杨 洁[1]，李登峰[2†]

(1. 福建农林大学 管理学院，福州 350002；2. 成都电子科技大学 经济与管理学院，成都 610054)

摘 要: 针对具有限制交流结构的合作博弈,基于现实结盟局中人参与联盟程度模糊且联盟支付模糊的情形,提出一种带局中人偏好的要素(联盟与支付)双模糊限制交流结构合作博弈的A-T解(average tree solution)分配方法. 首先基于局中人的风险偏好均值,结合模糊联盟合作博弈的Choquet积分形式,构建要素双模糊合作联盟的特征函数,进而给出一个满足公理体系的解公式. 该博弈模型不仅能够刻画现实结盟的约束性和模糊性,且有利于分配收益函数的求解. 最后,通过对典型限制交流农地经营PPP合作项目收益分配问题的应用分析,表明所提出方法相对于Shapley值更具合理性.

关键词: 模糊合作博弈；限制交流结构；A-T解；风险偏好；模糊联盟与模糊支付

中图分类号: O225；C934 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.1048 **开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

引用格式: 杨洁,李登峰. 一种要素双模糊的限制交流结构合作博弈方法及应用[J]. 控制与决策, 2021, 36(2): 475-482.

An allocation model of limited communication structure cooperative game with dual fuzzy elements

YANG Jie[1]，*LI Deng-feng*[2†]

(1. College of Management，Fujian Agriculture and Forestry University，Fuzhou 350002，China；2. School of Economics and Management，University of Electronic Science and Technology of China，Chengdu 610054，China)

Abstract: For cooperative games with limited communication structure, in view of that players' participation rates and alliances profit are both fuzzy, an average tree (A-T) solution with fuzzy coalitions and fuzzy payoffs is proposed. Considering the degree of risk preference, we give the characteristic function by combining with the Choquet integral form, and then propose a solution formula that satisfies an axiom system. This solution model not only can depict the restrictiveness and fuzziness of the real alliance, but also benefit for solving the distribution function. Finally, the allocation method is applied to the revenue allocation of PPP project, which manifests that the method is more reasonable than the Shapley value.

Keywords: fuzzy cooperative game；limited communication structure；average tree solution；risk preference；fuzzy coalitions and fuzzy payoffs

0 引 言

模糊是相对于清晰而言的,模糊合作博弈研究主要基于局中人可能仅以一定参与程度(非完全)参加到联盟合作中,或是联盟支付(收益)不确定或模糊的假设. Aubin[1] 最早提出了联盟模糊的多人结盟合作博弈(对策),模糊联盟合作博弈是从联盟组建角度对经典合作博弈进行的扩展. 与经典合作博弈类似,无论考虑局中人仅以一定程度参与联盟的模糊联盟合作博弈,还是考虑合作预期回报收益值模糊不确定的模糊支付合作博弈,都需要寻求一个或者一组使每个局中人都满意的模糊分配. 虽然当前涉及模糊信息的合作博弈研究不少,但几乎都仅从单方面考虑信息的模糊性,即要么研究具有模糊联盟的合作博弈[2-4],要么研究具有模糊支付的合作博弈[5-8]. 对于联盟程度和支付函数同时模糊的合作博弈(简称“要素双模糊合作博弈”)的研究甚少.

Borkotokey[9] 最早在文献[10]定义的Choquet积分模糊博弈基础上提出了要素双模糊合作博弈的概

收稿日期: 2019-07-22；**修回日期:** 2019-09-14.

基金项目: 教育部人文社科青年项目(19YJC630201)；博士后科学基金面上项目(227348)；福建省自然科学基金项目(2020J01589)；福建省高校杰出青年科研人才培育计划项目(K80SCC55A).

责任编委: 刘宝碇.

†通讯作者. E-mail: lidengfeng@uestc.edu.cn.

念,并提出了相应模糊合作博弈Shapley值应满足的公理体系,但由于未给出模糊Shapley值的具体形式,不具有明显的实际意义. 随后,部分学者进行了更为深入的研究. 文献[11]通过公理体系证明,给出了要素双模糊合作博弈的具体模糊Shapley值形式,文章将此类模糊合作博弈称为广义模糊合作博弈. 文献[12]应用模糊结构元理论,构造了要素双模糊合作博弈的Shapley值,使模糊Shapley值的隶属函数得到解析表达,文章将此类合作博弈称为要素双重模糊的模糊合作博弈. 文献[13]基于直觉模糊集理论提出了支付值与联盟值均为直觉模糊数的模糊Shapley值形式. 可见,当前要素双模糊合作博弈研究主要集中于Shapley值的探讨,基于局中人可自由结盟的假设. 但现实生活中,由于局中人之间受到资源、文化冲突或竞争地位等因素的影响,其合作结盟往往并非任意,大多具有交流结构限制性.

Myerson用无向连通图表示效用可以转移的合作博弈,以图的顶点表示局中人,图的边表示局中人的交流联系,从而引入具有交流结构的合作博弈(也称“图博弈”),并提出了著名的Myerson值[14]. 沿此思路,部分学者开展了一类限制交流合作博弈的经典A-T解研究. 文献[15]提出了交流结构合作博弈的A-T解(average tree solution),并讨论了分支有效性和分支公平性两个特殊性质. 文献[16]探讨了A-T解存在于核心等优良性质. 文献[17]提出了一种适用于具有限制约束的可容许联盟结构下的A-T解. 基于信息模糊,文献[18]给出了具有模糊联盟的A-T解. 本文则针对区间模糊联盟情形拓展了模糊A-T解[19]. 关于A-T解的研究不断深入,源于此解不仅具备分配所需的公平性与合理性,且具有如下良好特性[20]: 1)当特征函数具有超可加时,Myerson值不满足存在于核心中,A-T解却满足; 2)对于任意超可加性的凸博弈,所有具有交流关系的局中人分配至少存在于A-T解中; 3)因联盟边际收益计算无需进行$n!$(阶层)运算,A-T解的求解计算量相较于Shapley值大大简化. 然而,以上研究仅基于清晰或联盟模糊情形,未考虑联盟与支付双要素均模糊情形.

此外,现实结盟合作中的个体差异性明显,如局中人行为偏好等主体特征在处理模糊信息时体现更为明显,决策理论中已开展较多此方面的研究,但合作博弈角度较少见[21],因此合作博弈中融合局中人的不同偏好信息成为亟待解决的问题. 为刻画现实不确定性环境下,局中人参与联盟程度和预期支付同时出现模糊的交流结构合作博弈收益分配问题,本文将融入风险偏好信息,通过引入局中人的风险偏好程度,并结合模糊联盟合作博弈的Choquet积分形式,提出一种要素双模糊的交流结构合作博弈分配模型. 最后,通过对典型限制交流农地经营PPP合作项目收益分配问题的应用分析,表明所提出方法相对于Shapley值更具合理性.

1 要素双模糊的限制交流结构合作博弈

1.1 经典交流结构合作博弈及A-T解

三元组(N,v,L)表示经典交流结构合作博弈,其中: $N=\{1,2,\ldots,n\}$为有限局中人集合; $v:2^N\rightarrow R$为清晰支付函数; $L\subseteq\{\{i,j\}|i\neq j,i,\ j\in N\}$为边集,表示局中人交流的集合,在交流结构中只有连通的节点才可能结成清晰联盟. 若$L=\{\{i,j\}|i\neq j,\ i,j\in N\}$,则称$(N,v,L)$为具有完全交流结构的合作博弈,即各局中人可自由结盟,通常所说的合作博弈便是指这一类. 若$L\neq\{\{i,j\}|i\neq j,\ i,j\in N\}$且$L$非空,则$(N,v,L)$为具有限制交流结构的合作博弈,即局中人不能自由结盟. 此外,在(N,v,L)中,不同结点$i_1,i_2,\ldots,i_q$构成的一个序列$(i_1,i_2,\ldots,i_q)(q\geqslant 2)$,如果满足: 1) $i_{q+1}=i_1$, 2) $\{i_i,i_{i+1}\}\in L,i=1,2,\ldots,q-1$,则$(i_1,i_2,\ldots,i_q)$形成一个圈. 不包含任何圈的合作博弈称为无圈合作博弈,本文讨论此类无圈且有限制交流结构的合作博弈.

经典交流结构合作博弈中,n维A-T解$\mathrm{AT}(N,v,L)$定义[15]为

$$\mathrm{AT}_i(N,v,L)=\frac{1}{|B^L|}\Big(\sum_{B\in B^L}\Big(v(B_i)-\sum_{K\in\hat{C}^L(B_i\backslash\{i\})}v(K)\Big)\Big).\tag{1}$$

其中: $i=1,2,\ldots,n$, B^L为所有可容许B构成的集合, $|B^L|$为B^L的元素个数, K为任意分支, $C^L(N)$为所有连通子集构成的集合, $\hat{C}^L(N)$为所有连通分支构成的集合.

可见,A-T解也是一种基于边际贡献的分配解. 特别需要指出: 当合作博弈基于完全交流结构,即合作没有任何约束时,A-T解等于Shapley值,因此A-T解是Shapley值的一种广义形式[15-16].

1.2 要素双模糊限制交流结构合作博弈的定义

根据经典具有交流结构合作博弈和具有模糊联盟、具有模糊支付的任意结盟合作博弈研究基础,定义具有模糊和支付双模糊的交流结构合作博弈如下.

定义1 设$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$为局中人集$N=\{1,2,\ldots,n\}$的交流结构合作博弈,若支付函数$\tilde{w}$为从模糊联盟$F(N)$到模糊数集合$\tilde{R}$的映射,即$\tilde{w}:F(N)\rightarrow$

$\tilde{R}$且$\tilde{w}(\varnothing)=\tilde{0}$,则称$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$为具有模糊支付和模糊联盟的交流结构合作博弈,称为要素双模糊限制交流结构合作博弈,同时称$\tilde{w}$为$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$的联盟支付函数. 记所有要素双模糊限制交流结构合作博弈的全体为$G_F(N,L(\bar{S}))$.

由于实数是一种特殊的模糊数,如果将要素双模糊限制交流结构合作博弈$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$的模糊支付函数$\tilde{w}$限制为从模糊联盟$F(N)$到实数集R的映射,即$\tilde{w}:F(N)\to R$,则要素双模糊限制交流结构合作博弈$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$退化为模糊联盟交流结构合作博弈. 由于N的清晰联盟集合$P(N)\subseteq F(N)$,若将要素双模糊限制交流结构合作博弈$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$的模糊支付函数$\tilde{w}$限制为从$P(N)$到模糊集$\tilde{R}$的映射,即$\tilde{w}:P(N)\to\tilde{R}$,则$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$退化为模糊支付合作博弈. 由此可见,要素双模糊限制交流结构合作博弈是经典交流结构合作博弈关于模糊联盟和模糊支付的推广. 因此,经典交流结构合作博弈、模糊联盟交流结构合作博弈、模糊支付交流结构合作博弈都可看作是一种特殊的要素双模糊限制交流结构合作博弈.

定义2　对于要素双模糊限制交流结构合作博弈$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))\in G_F(N,L(\bar{S}))$,任意联盟$\bar{S}\in F(N)$,其支撑集$\mathrm{Supp}(\bar{S})=\{i\in N|\mu_{\bar{S}}(i)\geqslant 0\}$,函数$x:F(N)\to\tilde{R}$,如果存在维向量函数$\tilde{\boldsymbol{x}}(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=(\tilde{x}_1(N,\tilde{w},L(\bar{S})),\tilde{x}_2(N,\tilde{w},L(\bar{S})),\dots,\tilde{x}_n(N,\tilde{w},L(\bar{S})))$满足: 1) $\tilde{x}_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=0, i\notin\mathrm{Supp}(\bar{S})$; 2) $\sum\limits_{i\in N}\tilde{x}_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=\tilde{w}(\bar{S})$; 3) $\tilde{x}_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))\geqslant\tilde{w}(\{i\}), i\in\mathrm{Supp}(\bar{S})$. 则称函数$\tilde{\boldsymbol{x}}(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$为$G_F(N,L(\bar{S}))$上的一个模糊分配.

定义3　对于要素双模糊限制交流结构合作博弈$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$,如果对于任意联盟$\bar{S},\bar{T}\in F(N)$,且$\bar{S}\bigcap\bar{T}=\varnothing$,有下式成立:

$$\tilde{w}(\bar{S}\bigcup\bar{T})\geqslant\tilde{w}(\bar{S})+\tilde{w}(\bar{T}),$$

则$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$是超可加的要素双模糊限制交流结构合作博弈,即具有超可加性.

定义4　对于要素双模糊限制交流结构合作博弈$(N,\tilde{w},L)$,如果对于任意联盟$\bar{S},\bar{T}\in F(N)$,且$\bar{S}\bigcap\bar{T}=\varnothing$,有下式成立:

$$\tilde{w}(\bar{S}\bigcup\bar{T})\geqslant\tilde{w}(\bar{S})+\tilde{w}(\bar{T})-\tilde{w}(\bar{S}\bigcap\bar{T}),$$

则$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$是凸的要素双模糊限制交流结构合作博弈,即具有凸性.

本文讨论这类满足凸性和超可加性的要素双模糊限制交流结构合作博弈.

2　考虑风险偏好的要素双模糊合作博弈特征函数确定

由于现实联盟合作中个体差异的普遍性,各局中人的风险偏好程度往往不同,基于考虑风险偏好的均值算法,不仅能融合局中人的偏好信息,还能对要素双模糊的联盟收益进行集结,从而有利于分配收益函数的求解.

2.1　模糊数的风险偏好均值

在模糊和支付双模糊交流结构合作博弈$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$中,考虑局中人$i(i=1,2,\dots,n)$具有不同风险偏好信息,且局中人的BUM(单位区间单调)函数为Q_i. 若$\theta=\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x$,则Yager证明了$\theta\in[0,1]$,并称$\theta$是与BUM函数$Q(x)$对应的态度系数[21-22]. θ值越大,表明局中人对风险的偏好程度越高.

根据Yager提出的连续有序加权平均算子(COWA算子),$Q(x)$是BUM函数,区间模糊数$\tilde{A}=[a,b]$的风险偏好的均值为

$$F_Q(\tilde{A})=a\Big[1-\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x\Big]+b\int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x=$$
$$a(1-\theta)+b\theta.$$

此时,$F_Q(\tilde{A})$是模糊数上以$1-\theta$和θ为权数(θ为乐观系数)的端点加权平均.

当模糊数$\tilde{A}$推广为广义梯形模糊数时,$\tilde{A}=(a,b,c,d;f(x))$的隶属度见图1,公式如下:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}0,\ x<a;\\ f_l(x),\ a\leqslant x<b;\\ 1,\ b\leqslant x\leqslant c;\\ f_r(x),\ c<x\leqslant d;\\ 0,\ x>d.\end{cases}$$

此时,$\tilde{A}$的偏好均值可表示为

$$F_Q(\tilde{A})=\int_0^{\frac{b-a}{d-a}}f_l(x)\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}t\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\frac{b-a}{d-a}}^{\frac{c-a}{d-a}}\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}t\mathrm{d}x+\int_{\frac{c-a}{d-a}}^{1}f_r(x)\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}t\mathrm{d}x,$$

其中$t=d-(d-a)x$.

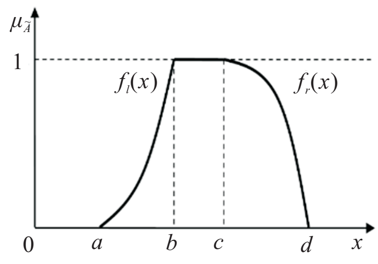

图1　$\tilde{A}=(a,b,c,d;f(x))$**隶属度**

若$f_l(x)$和$f_r(x)$为线性,则一般梯形模糊数$\tilde{A}=$

(a,b,c,d)的隶属度见图2,公式如下:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}0,\ x<a;\\(x-a)/(b-a),\ a\leqslant x<b;\\1,\ b\leqslant x\leqslant c;\\(d-x)/(d-c),\ c<x\leqslant d;\\0,\ x>d.\end{cases}$$

此时,$\tilde{A}=(a,b,c,d)$的偏好均值可表示为

$$F_Q(\tilde{A})=\int_0^{\frac{b-a}{d-a}}\frac{t-a}{b-a}\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}t\mathrm{d}x+\int_{\frac{b-a}{d-a}}^{\frac{c-a}{d-a}}\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}t\mathrm{d}x+\int_{\frac{c-a}{d-a}}^{1}\frac{d-t}{d-c}\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}t\mathrm{d}x,$$

其中$t=d-(d-a)x$.

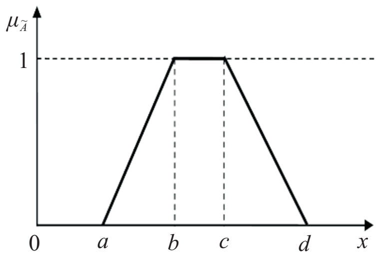

图2 $\tilde{A}=(a,b,c,d)$隶属度

当$b\to c$时,梯形模糊数$\tilde{A}=(a,b,c,d)$退化为三角模糊数$\tilde{A}=(a,c,d)$,其隶属度见图3,公式如下:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}0,\ x<a;\\(x-a)/(c-a),\ a\leqslant x<c;\\1,\ x=c;\\(d-x)/(d-c),\ c<x\leqslant d;\\0,\ x>d.\end{cases}$$

此时,$\tilde{A}=(a,b,c,d)$偏好均值可表示为

$$\lim_{b\to c}F_Q(\tilde{A})=\int_0^{\frac{c-a}{d-a}}\frac{t-a}{c-a}\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}t\mathrm{d}x+\int_{\frac{c-a}{d-a}}^{1}\frac{d-t}{d-c}\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}t\mathrm{d}x,$$

其中$t=d-(d-a)x$.

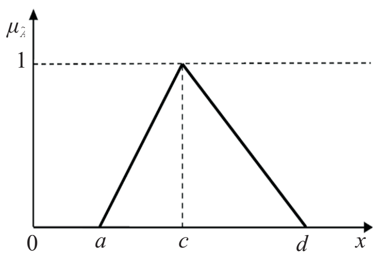

图3 $\tilde{A}=(a,c,d)$隶属度

当$b\to a$且$c\to d$时,梯形模糊数$\tilde{A}=(a,b,c,d)$退化为区间模糊数$\tilde{A}=(a,d)$,其偏好均值可表示为

$$\lim_{b\to a,c\to d}F_Q\tilde{A}=\int_0^1(d-(d-a)x)\mathrm{d}Q(x).$$

此时,可证明$\lim\limits_{b\to a,c\to d}F_Q\tilde{A}$与Yager提出的区间均值一致.

证明 已知$\lim\limits_{b\to a,c\to d}\dfrac{b-a}{d-a}=0$, $\lim\limits_{b\to a,c\to d}\dfrac{c-a}{d-a}=1$,可得

$$\lim_{b\to a,c\to d}F_Q\tilde{A}=\int_0^1(d-(d-a)x)\mathrm{d}Q(x)=(d-(d-a)x)Q(x)|_0^1+\int_0^1(d-a)Q(x)\mathrm{d}x=d\int_0^1Q(x)\mathrm{d}x+a\Big(1-\int_0^1Q(x)\mathrm{d}x\Big)=a(1-\theta)+\mathrm{d}\theta.\qquad\square$$

风险偏好均值本质是结合局中人风险偏好对模糊数进行集结,常见模糊数形式都可采用以下思路开展研究,为了简便表达,本文采用区间形式进行讨论.

2.2 要素双模糊的合作博弈特征函数

定义5 对于任意模糊联盟$\bar{S}\in F(N)$, $|\bar{S}|$表示支撑集$\mathrm{Supp}(\bar{S})$中元素的个数,联盟$\bar{S}$的风险偏好态度因子$\theta_{\bar{S}}$可定义为

$$\theta_{\bar{S}}=\frac{1}{|\bar{S}|}\sum_{i\in\mathrm{Supp}(\bar{S})}\theta_i.\tag{2}$$

式(2)表明,联盟的风险偏好态度为联盟内局中人风险偏好态度的算术平均值,即联盟内各局中人风险偏好态度与联盟风险偏好态度越接近越好. 因为若联盟中各局中人风险偏好态度越趋向一致,则对于联盟目标期望便越接近,此时联盟也越稳定. 需说明,由于$|S|=|\bar{S}|$,有$\mathrm{Supp}(S)=\mathrm{Supp}(\bar{S})$, $\theta_S=\theta_{\bar{S}}$,即无论在具有清晰联盟还是模糊联盟的合作博弈中,相同联盟组合下的风险偏好均相同.

定义6 给定联盟$\bar{S}\in G_F(N,L(\bar{S}))$,令$D(\bar{S})=\{\mu_{\bar{S}}(i)|\mu_{\bar{S}}(i)\geqslant 0,i\in N\}$, $d(\bar{S})$为$D(\bar{S})$的元素个数,将$D(\bar{S})$中的元素按单调递增的顺序排列为$0<h_1\leqslant h_2\ldots\leqslant h_{d(\bar{S})}\leqslant 1$. 那么,基于Choquet积分延拓具有模糊联盟交流结构合作博弈$G_F(N,L(\bar{S}))$的支付函数上限和下限可表示为

$$t\tilde{v}^-(\bar{S})=\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}\tilde{v}^-([\bar{S}]_{h_m})(h_m-h_{m-1}),\tag{3}$$

$$t\tilde{v}^+(\bar{S})=\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}\tilde{v}^+([\bar{S}]_{h_m})(h_m-h_{m-1}),\tag{4}$$

其中$\tilde{v}^-([\bar{S}]_{h_m})$和$\tilde{v}^+([\bar{S}]_{h_m})$分别为可知模糊支付合作博弈中的支付下限和上限.

由式(3)和(4),基于风险偏好均值的要素双模糊限制交流结构合作博弈$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$的联盟支付函数可集结表示为

$$\tilde{w}(\bar{S})=\theta_{\bar{S}}t\tilde{v}^{+}(\bar{S})+(1-\theta_{\bar{S}})t\tilde{v}^{-}(\bar{S})=$$
$$\theta_{\bar{S}}\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}\tilde{v}^{+}([\bar{S}]_{h_m})(h_m-h_{m-1})+$$
$$(1-\theta_{\bar{S}})\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}\tilde{v}^{-}([\bar{S}]_{h_m})(h_m-h_{m-1})=$$
$$\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}[\theta_{\bar{S}}\tilde{v}^{+}([\bar{S}]_{h_m})+$$
$$(1-\theta_{\bar{S}})\tilde{v}^{-}([\bar{S}]_{h_m})](h_m-h_{m-1})=$$
$$\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}v_Q([\bar{S}]_{h_m})(h_m-h_{m-1}). \tag{5}$$

其中: $h(0)=0; m=1,2,\ldots,d(\bar{S}); [\bar{S}]_{h_m}=\{i\in N|\mu_{\bar{S}}(i)\geqslant h_m\}$ 为参与程度 $\mu_{\bar{S}}(i)\geqslant h_m$ 的所有局中人组成的清晰联盟, 即 $v_Q([\bar{S}]_{h_m})$ 是 $(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$ 相对应的经典交流结构合作博弈 $(N,v_Q,L([\bar{S}]_{h_m}))$ 的联盟收益.

根据经典A-T解, 要素双模糊限制交流结构合作博弈 $(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$ 的分配解为

$$\mathrm{AT}_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=$$
$$\frac{1}{|B^L|}\sum_{B\in B^L}\Big[\tilde{v}_Q(B_i)-\sum_{K\in C^L(B_i\backslash\{i\})}\tilde{v}_Q(K)\Big]. \tag{6}$$

可见, 利用联盟态度因子, 通过风险偏好均值算法可对要素双模糊限制交流结构合作博弈的联盟支付函数进行集结, 即可实现要素双模糊限制交流结构合作博弈到模糊联盟交流结构合作博弈的转化, 进而确定其收益分配方法.

3 要素双模糊限制交流结构合作博弈的A-T解及其性质

根据定义的要素双模糊限制交流结构合作博弈的凸性等性质, 基于经典A-T解和模糊联盟支付函数, 给出带偏好的要素双模糊限制交流结构合作博弈的A-T解具体形式.

定义7 对于要素双模糊限制交流结构合作博弈 $(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$, 若实向量 $x(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=(x_1(N,\tilde{w},L(\bar{S})),x_2(N,\tilde{w},L(\bar{S})),\ldots,x_n(N,\tilde{w},L(\bar{S})))$ 满足以下公理, 则称 $x(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$ 是 $(N,\tilde{w},L)$ 的模糊解.

公理1 (分支有效性公理) 对于要素双模糊限制交流结构合作博弈 $(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$, 若维向量值函数 $x(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$ 满足

$$\sum_{i\in K}x_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=\tilde{v}(K),\ K\in\hat{C}^L(N),$$

则称 $x_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$ 具有分支有效性 (即整体合理性).

公理2 (分支公平性公理) 对于要素双模糊限制交流结构合作博弈 $(N,\tilde{w},L(\bar{S})), K\in\hat{C}^L(N)$, 若维向量值函数 $\boldsymbol{x}(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$ 满足

$$\frac{1}{|K^h|}\sum_{i\in K^h}(x_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))-$$
$$x_i((N,\tilde{w},L(\bar{S}))\backslash L\{h,l\}))=$$
$$\frac{1}{|K^l|}\sum_{j\in K^l}(x_j(N,\tilde{w},L(\bar{S}))-$$
$$x_j((N,\tilde{w},L(\bar{S}))\backslash L\{h,l\})).$$

则称 $x_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$ 具有分支公平性, 其中 K^h 和 K^l 为 K 删掉边 $L\{i,j\}$ 后所得的包含结点 i 的连通分支. 分支公平性反应了删除任意边 $L\{h,l\}$ 后, 分支两边收益变化程度相同.

公理3 (可加性公理) 对于要素双模糊限制交流结构合作博弈 $(N,\tilde{w}_1,L(\bar{S}))$ 和 $(N,\tilde{w}_2,L(\bar{S}))$, 若对于任意 $i\in N$, 满足

$$x_i(N,\tilde{w}_1+\tilde{w}_2,L(\bar{S}))=$$
$$x_i(N,\tilde{w}_1,L(\bar{S}))+x_i(N,\tilde{w}_2,L(\bar{S})),$$

则称 $x_i(N,\tilde{w},L(\bar{s}))$ 具有可加性.

定理1 若 $(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$ 是要素双模糊限制交流结构合作博弈, 则 $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=(\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_1(N,\tilde{w},L(\bar{S})),\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_2(N,\tilde{w},L(\bar{S})),\ldots,\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_n(N,\tilde{w},L(\bar{S})))$ 是其A-T解, 具体为

$$\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=$$
$$\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}\mathrm{AT}_i(N,v_Q,L([\bar{S}]_{h_m}))(h_m-h_{m-1}). \tag{7}$$

其中: $h(0)=0, m=1,2,\ldots,d(\bar{S}), [\bar{S}]_{h_m}=\{i\in N|\mu_{\bar{S}}(i)\geqslant h_m\}$ 为局中人参与程度 $\mu_{\bar{S}}(i)\geqslant h_m$ 的所有局中人组成的清晰联盟.

证明 要证明 $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$ 是 $(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$ 上的A-T解, 需要证明式(7)满足定义7中公理1～公理3.

1) 分支有效性. 由于 $(N,v_Q,L([\bar{S}]_{h_m}))$ 是 $(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$ 相对应的经典交流结构合作博弈, 根据经典A-T解分支有效性可得, 对于任意联盟 $S\in P(N)$, $\mathrm{AT}_i(N,v_Q,L([\bar{S}]_{h_m}))$ 具有分支有效, 故对于任意 $K\in\hat{C}^L(N)$, 有

$$\sum_{i\in K}\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=$$
$$\sum_{i\in\mathrm{Supp}K}\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}\mathrm{AT}_i(N,v_Q,L([\bar{S}]_{h_m}))(h_m-h_{m-1})=$$
$$\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}(h_m-h_{m-1})\sum_{i\in\mathrm{Supp}K}\mathrm{AT}_i(N,v_Q,L([\bar{S}]_{h_m}))=$$

$$\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}(h_m-h_{m-1})v_Q((K)_{h_m})=\tilde{w}(K).$$

因此,要素双模糊限制交流结构合作博弈$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$的A-T解满足分支有效性,即

$$\sum_{i\in K}\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=\tilde{w}(K),\ K\in\hat{C}^L(N).$$

2) 分支公平性. 因为对于任意$K\in\hat{C}^L(N)$, $\sum\limits_{i\in K}\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=\tilde{w}(K)$,且由于经典交流结构合作博弈的分支有效性,在$L(K)$中任意连接边$L\{i,j\}$有

$$\sum_{i\in K^h}\mathrm{AT}_i((N,\tilde{w},L(\bar{S}))\backslash L\{h,l\})=\tilde{w}(K^h),$$

$$\sum_{i\in K^l}\mathrm{AT}_i((N,\tilde{w},L(\bar{S}))\backslash L\{h,l\})=\tilde{w}(K^l).$$

结合经典交流结构合作博弈的分支公平性定理,可以推导出

$$\frac{1}{|K^h|}\sum_{i\in\mathrm{Supp}K^h}(\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))-\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i((N,\tilde{w},L(\bar{S}))\backslash\{h,l\}))=\frac{1}{|K^l|}\sum_{i\in\mathrm{Supp}K^l}(\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))-\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i((N,\tilde{w},L(\bar{S}))\backslash\{h,l\})).$$

3) 可加性. 设要素双模糊限制交流结构合作博弈$(N,\tilde{w}_1,L(\bar{S})),(N,\tilde{w}_2,L(\bar{S}))\in G_F(N,L(\bar{S}))$,由式(7)具有的线性性质可知

$$\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i(N,\tilde{w}_1+\tilde{w}_2,L(\bar{S}))=\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}(h_m-h_{m-1})\mathrm{AT}_i(N,(v_Q)_1+(v_Q)_2,L[\bar{S}]_{h_m})=\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}(h_m-h_{m-1})\mathrm{AT}_i(N,(v_Q)_1,L[\bar{S}]_{h_m})+\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}(h_m-h_{m-1})\mathrm{AT}_i(N,(v_Q)_2,L[\bar{S}]_{h_m})=\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i(N,\tilde{w}_1,L(\bar{S}))+\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i(N,\tilde{w}_2,L(\bar{S})).$$

综上,$\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=(\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_1(N,\tilde{w},L(\bar{S})),\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_2(N,\tilde{w},L(\bar{S})),\ldots,\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_n(N,\tilde{w},L(\bar{S})))$是要素双模糊限制交流结构合作博弈$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$的A-T解. □

定理2 若$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$是要素双模糊限制交流结构合作博弈,则A-T解$\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$是$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$的一个分配.

证明 若$i\notin N$,则显然$\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=0$.

若$i\in N$,因为$(N,v_Q,L([\bar{S}]_{h_m}))$是$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$相对应的经典交流结构合作博弈,则根据$\mathrm{AT}(N,v_Q,L([\bar{S}]_{h_m}))$的分支有效性,对于任意$K\in\hat{C}^L(N)$,有

$$\sum_{i\in K}\mathrm{AT}_i(N,v_Q,L([\bar{S}]_{h_m}))=v_Q(K).$$

由此该解满足分配中的群体合理性. 另外,因为

$$v_Q(B)=v_Q(\{i\})\bigcup\sum_{K\in C^L(B_i\backslash\{i\})}v_Q(K)\geqslant v_Q(\{i\})+\sum_{K\in C^L(B_i\backslash\{i\})}v_Q(K),$$

从而可得

$$v_Q(B)-\sum_{K\in C^L(B_i\backslash\{i\})}v_Q(K)\geqslant v_Q(\{i\}).$$

因此有

$$\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_i(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}\mathrm{AT}_i(N,v_Q,L([\bar{S}]_{h_m}))(h_m-h_{m-1})=\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}(h_m-h_{m-1})\frac{1}{|B^L|}\Big(\sum_{i\in B\in B^L}v_Q(B_i)-\sum_{K\in C^L(B_i\backslash\{i\})}v_Q(K)\Big)\geqslant\sum_{m=1}^{d(\bar{S})}(h_m-h_{m-1})v_Q(\{i\})=\tilde{w}(\{i\}).$$

由此,该解满足分配中的个体合理性.

综上可知,$\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_1(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$是满足分配中的群体合理性和个体合理性条件,因此该解是要素双模糊限制交流结构合作博弈$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$的一个分配. □

定理3 若$(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$是要素双模糊完全交流结构合作博弈,则A-T解$\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$等同于Shapley值$\mathrm{SH}(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$.

证明 根据式(5)将要素双模糊交流结构合作博弈的特征函数转化为清晰函数,且文献[15-16]已证明清晰完全交流结构合作博弈的A-T解等于Shapley值,因此有

$$\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}(N,\tilde{w},L(\bar{S}))=\mathrm{SH}(N,\tilde{w},L(\bar{S})).$$

当要素双模糊交流结构合作博弈为完全图结构时,A-T解等同于Shapley值. □

4 农地经营PPP项目收益分配问题

为了提高农地利用率,政府、农民和企业三方(分别为1、2、3三个局中人)合作的农地经营PPP项目日益常见. 由于该项目以土地为基础,在联盟组建中提供土地的农民不可或缺,可能形成的合作联盟仅有$\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\}$三种形式($\{1,3\}$应无合作基础,联盟不存在),即$N=\{1,2,3\}$, $L=\{\{1,2\},$

$\{2,3\}\}$. 由于市场需求不确定性等因素,联盟收益以区间模糊数形式表示,分别为: $\tilde{v}(\{1\}) = [2.5,5]$, $\tilde{v}(\{2\})=[1.5,3]$, $\tilde{v}(\{3\})=[3.8,7.5]$, $\tilde{v}(\{1,2\})=[8,16]$, $\tilde{v}(\{2,3\}) = [10.5,21]$, $\tilde{v}(\{1,2,3\}) = [25.6,46.5]$ (单位: 万元). 现由于受到能力等诸多条件的限制,局中人1、2、3分别只能以各自所需资源20%、40%、50%的程度参与项目. 此外,各局中人具有不同的风险偏好, BUM函数分别为 $Q_1(y) = y^2$(保守型), $Q_2(y) = y$ (中立型), $Q_3(y) = y^{1/2}$ (冒险型). 由以上信息可见,此联盟收益分配问题属于一类考虑局中人风险偏好的要素双模糊限制交流结构合作博弈.

根据各局中人的BUM函数,利用式(5)～(7)可计算出不同联盟组合下的态度因子、联盟收益以及各局中人从不同联盟中获得的收益分配,如表1所示.

表1 要素双模糊下的收益分配策略

$\bar{S}$	$tv(\bar{S})$	$\boldsymbol{\theta}_{\bar{S}}$	$\tilde{\boldsymbol{w}}(\bar{S})$	1(政府)	2(农民)	3(企业)
$\bar{S}_1=(0.2,0,0)$	$[0.5,1]$	1/3	0.67	0.67	0	0
$\bar{S}_2=(0,0.4,0)$	$[0.6,1.2]$	1/2	0.9	0	0.9	0
$\bar{S}_3=(0,0,0.5)$	$[1.9,3.75]$	2/3	3.13	0	0	3.13
$\bar{S}_{1,2}=(0.2,0.4,0)$	$[1.9,3.8]$	5/12	2.69	1.23	1.46	0
$\bar{S}_{2,3}=(0,0.4,0.5)$	$[4.58,9.15]$	7/12	7.25	0	2.51	4.74
$\bar{S}_{1,2,3}=(0.2,0.4,0.5)$	$[7.6,14.25]$	1/2	10.93	1.673	4.423	4.833

由表1可见,对于政府而言,若不参与该项目(将财政投入其他项目)则可获利0.67万元,若与农民合作则可获利1.23万元,若与农民、企业三方合作则可获利1.673万元. 因此,政府会选择加入所得收益最大的大联盟. 同理分析可知,农民与企业也会作出相同的选择,因此最终形成最大联盟,即三方合作联盟.

农地经营PPP项目中,土地作为关键投入资源必不可少,政府与企业之间不能直接形成合作联盟. 本文讨论的是具有限制交流结构的合作博弈问题,可准确刻画现实中常见的类似具有约束的合作经营项目,比如: 供应链上中下游合作中因技术相关和资源互补性,不是供应链上的任意企业间都可实现有效合作; 公路或机场的合作建设因地域区位限制只有相邻地域间可能直接合作; 流域治理及流域管理合作中,由于流域上游和下游区域限制不能直接合作,但可通过中游加入实现间接交流合作. 针对此类情况,有学者认为若局中人之间无合作,则其联盟收益便是各局中人单干收益之和. 假设 $\tilde{v}(\{1,3\}) = \tilde{v}(\{1\})+\tilde{v}(\{3\})$,利用Shapley值方法进行收益分配,两种方法结果对比为 $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_1(N,\tilde{w},L(\bar{S})) < \mathrm{SH}_1(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$, $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_2(N,\tilde{w},L(\bar{S})) > \mathrm{SH}_2(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$, $\tilde{\mathrm{A}}\mathrm{T}_3(N,\tilde{w},L(\bar{S})) < \mathrm{SH}_3(N,\tilde{w},L(\bar{S}))$,表明A-T解法相对于Shapley值法,农民分配收益有所增加,而政府和企业分配收益有所减少,这源于农民提供土地的无可替代地位. 由此可见,局中人在联盟中的获利能力不仅取决于其对联盟收益的边际贡献,还取决于在联盟中所处的地位,越是关键不可替代其分配越多. 因此,在具有交流结构联盟情形下, A-T解相对于Shapley值更具合理性.

5 结 论

现实合作结盟中信息模糊是普遍存在的,联盟和支付同时模糊的现象并不少见,针对此类情况的限制交流结盟问题,定义了要素双模糊的限制交流结构合作博弈,并通过考虑局中人的风险偏好情况,结合模糊联盟合作博弈的Choquet积分形式,提出了满足公理体系的A-T解. 该解是经典A-T解关于联盟参与度和支付函数的双重模糊延拓推广,不仅能有效刻画现实结盟情境中的约束性和模糊性,而且有利于分配收益函数的求解. 模糊联盟合作博弈的拓展形式除Choquet积分形式,还有多线性、比例值等,支付值的模糊、不确定形式因环境变化而变化,今后将进一步根据实际问题探讨更加合理恰当的模糊合作博弈.

参考文献(References)

[1] Aubin J P. Mathematical methods of game and economic theory[M]. North-Holland: Dover Publications, 1980.

[2] Branzei R, Dimitrov D, Tijs S. Models in cooperative game theory[M]. The 2nd editor. Springer: Springer Publishing Press, 2008.

[3] 孙红霞, 张强. 基于多线性扩展的模糊双合作博弈的支付分配策略模型[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(4): 990-998.
(Sun H X, Zhang Q. Model of payoff allocation for bi-cooperative game with fuzzy coalitions based on multilinear extension[J]. Systems Engineering Theory & Practice, 2017, 37(4): 990-998.)

[4] Basallote M, Hernández-Mancera C. Jiménez-Losada A. A new Shapley value for games with fuzzy coalitions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 383: 51-67.

[5] Mares M. Fuzzy cooperative games: Co-operation with

vague expectations[M]. Heidelberg: Physica, 2001.

[6] 侯东爽,孙浩. 广义特征函数下合作对策的τ值[J]. 应用数学学报, 2008, 31(2): 324-332.
(Hou D S, Sun H. The τ value of cooperative game with generalized characteristic function[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2008, 31(2): 324-332.)

[7] 李登峰, 刘家财. 基于最小平方距离的区间值合作对策求解模型与方法[J]. 中国管理科学, 2016, 24(7): 135-142.
(Li D F, Liu J C. Mmodels and method of interval-valued cooperative games based on the least square distance[J]. Chinese Journal of Management Science, 2016, 24(7): 135-142.)

[8] Wu H C. Cores and dominance cores of cooperative games endowed with fuzzy payoffs[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2019, 18(2): 219-257.

[9] Borkotokey S. Cooperative games with fuzzy coalitions and fuzzy characteristic functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2008, 159(2): 138-151.

[10] Tsurumi M, Tanino T, Inuiguchi M. A shapley function on a class of cooperative fuzzy games[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 129(3): 596-618.

[11] Yu X H, Zhang Q. An extension of cooperative fuzzy games[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(11): 1614-1634.

[12] 赵宝福, 张艳菊. 要素双重模糊下的合作博弈Shapley值的算法[J].计算机工程与应用, 2013, 49(19): 25-30.
(Zhao B F, Zhang Y J. Algorithm of Shapley value for cooperative games with dual fuzzy factors[J]. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(19): 25-30.)

[13] Nan J X, Hong B, Cheng L W. Cooperative games with the intuitionistic fuzzy coalitions and intuitionistic fuzzy characteristic functions[C]. Game Theory and Applications. Singapore: Springer Singapore, 2017: 337-352.

[14] Myerson R B. Graphs and cooperation in games[J]. Mathematics of Operations Research, 1977, 2(3): 225-229.

[15] Herings P J J, Van der Laan G, Talman A, et al. The average tree solution for cooperative games with communication structure[J]. Games and Economic Behavior, 2010, 68(2): 626-633.

[16] Mishra D, Talman A J J. A characterization of the average tree solution for tree games[J]. International Journal of Game Theory, 2010, 39(1/2): 105-111.

[17] van den Brink R, Herings P J J, Van Der Laan G, et al. The average tree permission value for games with a permission tree[J]. Economic Theory, 2015, 58(1): 99-123.

[18] Nie C P, Zhang Q. Fuzzy average tree solution for graph games with fuzzy coalitions[C]. Fuzzy Information & Engineering and Operations Research & Management. Berlin: Springer-Heidelberg, 2014: 409-417.

[19] 杨洁, 赖礼邦,李登峰. 具有区间模糊联盟的带风险偏好图合作对策A-T解[J]. 控制与决策, 2017, 32(2): 299-304.
(Yang J, Lai L B, Li D F. A-T solution of graph cooperative games with interval fuzzy coalitions and risk preference[J]. Control and Decision, 2017, 32(2): 299-304.)

[20] Béal S, Rémila E, Solal P. Characterization of the average tree solution and its kernel[J]. Journal of Mathematical Economics, 2015, 60: 159-165.

[21] 林健,张强. 具有模糊联盟值的带偏好合作对策的Shapley值[J]. 系统管理学报, 2014, 23(2): 217-223.
(Lin J, Zhang Q. Shapley value of cooperative games with preference information and fuzzy coalition value[J]. Journal of Systems and Management, 2014, 23(2): 217-223.)

[22] Yager R R. OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making[J]. IEEE Transactions Systems, Man and Cybernetics, 2004, 34(5): 1952-1963.

作者简介

杨洁(1985−), 女, 副教授, 博士, 从事模糊决策与对策方法等研究, E-mail: yangjie802@126.com;

李登峰(1965−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策与对策、优化方法等研究, E-mail: lidengfeng@uestc.edu.cn.

(责任编辑：郑晓蕾)