

控制与决策

Control and Decision

基于共享隐空间的多视角SVM

姜志彬, 周洁, 张远鹏, 王士同

引用本文:

姜志彬, 周洁, 张远鹏, 等. 基于共享隐空间的多视角SVM[J]. *控制与决策*, 2021, 36(3): 534–542.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0829>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

融合稀疏编码与深度学习的草图特征表示

A feature representation of sketch based on fusion of sparse coding and deep learning

控制与决策. 2021, 36(3): 699–704 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0941>

基于多维泰勒网的超前d步预测模型

d-step-ahead predictive model based on multi-dimensional Taylor network

控制与决策. 2021, 36(2): 345–354 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0722>

结合注意力机制的循环神经网络复述识别模型

Recurrent neural networks based paraphrase identification model combined with attention mechanism

控制与决策. 2021, 36(1): 152–158 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0638>

基于联合知识表示学习的多模态实体对齐

Multi-modal entity alignment based on joint knowledge representation learning

控制与决策. 2020, 35(12): 2855–2864 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0331>

阴影条件下基于迁移强化学习的光伏系统最大功率跟踪

Transfer reinforcement learning based maximum power point tracker of PV systems under partial shading condition

控制与决策. 2020, 35(12): 2939–2949 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0412>

基于共享隐空间的多视角SVM

姜志彬^{1,2,3†}, 周洁^{1,3}, 张远鹏², 王士同^{1,3}

(1. 江南大学数字媒体学院, 江苏无锡 214122; 2. 南通大学医学信息学系, 江苏南通 226019;
3. 江苏省媒体设计与软件技术重点实验室, 江苏无锡 214122)

摘要: 传统的单视角方法对来自不同场景不同形式的多视角样本难以获得较好的分类性能, 因此多视角学习成为近年来的热门研究课题并被广泛研究. 在多视角学习中, 可能存在这样一种特殊现象, 即来自不同视角相同类的样本间的差异比来自同一视角不同类的样本间的差异大, 这给多视角学习带来很大挑战, 并导致多视角学习效果变差. 鉴于此, 首先利用 Parzen 窗技术构建共享隐空间, 并将共享隐空间联合原始空间得到扩展空间, 进行多视角学习, 能够很好应对上述特殊现象; 然后利用支持向量机 (SVM), 提出一种新型的多视角学习方法, 即基于共享隐空间的多视角 SVM; 最后通过在人工和真实的多视角数据集上的实验验证了所提方法在应对上述挑战时具有很好的实验效果.

关键词: 多视角学习; Parzen 窗; 共享隐空间; 扩展空间; 支持向量机

中图分类号: TP181

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0829

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 姜志彬, 周洁, 张远鹏, 等. 基于共享隐空间的多视角 SVM[J]. 控制与决策, 2021, 36(3): 534-542.

Multi view SVM based on common hidden space

JIANG Zhi-bin^{1,2,3†}, ZHOU Jie^{1,3}, ZHANG Yuan-peng², WANG Shi-tong^{1,3}

(1. School of Digital Media, Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. Department of Medical Informatics, Nantong University, Nantong 226019, China; 3. Jiangsu Key Laboratory of Digital Design and Software Technology, Wuxi 214122, China)

Abstract: Because the traditional single-view methods difficultly obtain better classification performance on different scenes and different forms of multi-view samples, multi-view learning has been widely studied and has become one of the hot topics in recent years. However, in multi-view learning, there may be a special phenomenon of that the difference between samples from the same class of different perspectives is larger than that from different classes of the same perspective, which brings great challenges to multi-view learning, and eventually it will lead to poor multi-view learning. The Parzen window technology is used to construct the public space, and the public space is combined with the original space to obtain the extended space for multi-angle learning, so as to meet the challenges brought by the above special phenomena. Then we use the support vector machine (SVM) to propose a kind of new multi-view learning method, namely a multi-view SVM based on shared hidden space. Experiments on real multi-view data sets verify that the proposed method has good experimental results in response to the above challenges.

Keywords: multi-view learning; Parzen window; common hidden space; extended space; SVM

0 引言

随着计算机技术的飞速发展,数据的收集和存储能力得到了极大的提高,在科学研究和社会生活的各个领域,海量表现形式的复杂数据大量涌现.在多样化信息获取技术的推动下,获取多种不同形式的的数据变得更容易、便捷,许多对象可通过两个或多个不同的形式来表示.针对同一对象从不同途径或不同层面获得的特征数据被称为多视角数据(multi

view data)^[1-2],其呈现出多态性、多源性、多描述性和高维异构性等特点.由此,多视角学习(multi view learning)^[3-7]应运而生.目前,多视角学习已经引起了人们的广泛关注.关于多视角学习的一个基本共识是:不同的视角都是对共同数据的补充^[8].具体而言,数据的每个视角可能包含其他视角没有的特定信息,因此应当应用多个视角来全面且准确地表示数

收稿日期: 2019-06-11; 修回日期: 2019-09-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61170122, 61272210, 81701793); 江苏省自然科学基金项目(BK20130155).

责任编辑: 董久祥.

†通讯作者. E-mail: jnuszmtjzb@163.com.

据. 比如,在信息技术领域,以网页分类为例,一个网页既可以由这个网页中的文本信息进行描述,也可以由指向这个网页的链接上的文本信息进行描述,而通过二者结合能够更准确地对网页进行分类. 与此同时,多视角学习也是一个很有挑战的课题. 一方面,由于不同的视角可能形成不同的特征空间,具有不同的分布特性,不同视角难以直接同时比较;另一方面,由于视角间存在重要的相关信息,多个不同的视角不能进行逐个学习^[9]. 因此在多视角学习中,可能存在这样一种特殊现象,即来自不同视角的相同类样本间的差异比来自同一个视角的不同类样本间的差异大^[9]. 如图1所示,以两个视角的人脸图像为例,上述现象会导致分类器在一个视角中出现错误,进而导致最终的分类结果出现错误. 因此,有必要采取措施来应对这一现象,以更好地处理多视角学习问题. 目前,已经有很多方法被提出用以应对上述这种特殊现象,例如Li等^[10]提出使用典型相关分析(CCA)来学习一对投影,这些投影使投影的个体内特征在潜在空间中最大程度地相关;Sharma等^[11]采用偏最小二乘回归(PLS)将样本从两个视角投影到一个共同的潜在空间;Kan等^[3]提出了多视图判别分析(MvDA),通过最大化类间变化同时最小化公共空间中所有视角的类内变化来学习视角的特定变换. 这些方法对于应对上述多视角问题都有一定的效果,但是它们只利用了公共空间的信息,忽略了原始空间.

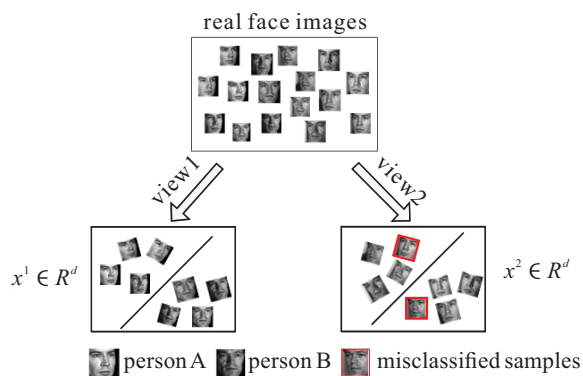


图1 多视角数据特殊现象的直观展示

随着对多视角学习研究的深入,出现了很多多视角学习方法^[12-18]. 根据文献[12],已有的多视角学习方法大致可以分为3类:基于协同训练(co-training)的多视角学习方法^[13]、基于多核学习(multi kernel learning)的多视角学习方法^[14]和基于子空间学习(subspace learning)的多视角学习方法^[15]. 其中,基于协同训练的方法试图通过迭代训练来最大限度地两个不同的视角上达成共识. 基于多核学习的方法通过对不同的视角寻找不同的核,然后将它们组合起

来处理整个数据集. 而基于子空间学习的方法旨在学习由不同视角共享的潜在子空间,其中视角之间的间隙被最小化. 此外,有很多基于支持向量机(SVM)提出的多视角学习方法,例如SVM-2K^[16]、Multi-view L2-SVM (MV-L2-SVM)^[17]、Multi-view twin SVM (MvTSVM)^[18]等. 本文受 SVM-2K 的启发,利用 Parzen 窗^[19]方法构建共享隐空间,并将共享隐空间联合原始空间得到扩展空间,然后引入支持向量机,在充分考虑不同视角样本间的差异与联系的基础上,提出基于共享隐空间的多视角SVM (multi view SVM based on common hidden space, CHS-MV-SVM),基本流程如图2所示. 通过在不同的多视角数据集上进行实验,也验证了该方法在应对上述挑战时具有很好的效果.

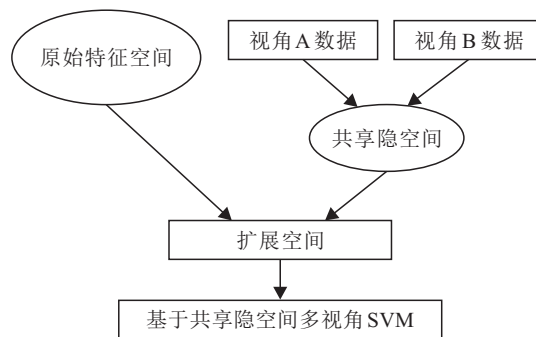


图2 CHS-MV-SVM算法原理

本文的贡献主要体现在以下几方面:

- 1) 本文利用 Parzen 窗技术构建了一个新的共享隐空间,并且将共享隐空间联合原始空间构建了扩展空间来进行多视角学习,从而能够很好地应对前述特殊现象对视角学习造成的困扰.
- 2) 本文通过构建扩展空间,同时利用共享隐空间和原始空间的信息进行学习,进而充分利用视角内及视角间样本的相关信息,可以很好地解决不同视角相同类样本间的差异比同一个视角不同类样本间的差异大带来的多视角学习问题.
- 3) 本文在构建的扩展空间中引入了支持向量机,进而提出了 CHS-MV-SVM. 在优化求解时将其转化为经典的QP问题,可以通过已有的现成优化方法求解,具有很好的有效性和理论保障.

1 相关工作

1.1 Parzen 窗

Parzen 窗^[19]又称为核密度估计,是概率论中非参数估计方法之一,用来估计未知概率密度函数. 对于一组 d 维的样本及其标签 $\{(x_i, y_i) | x_i \in \mathbf{R}^d, i = 1, 2, \dots, N\}$, 利用 Parzen 窗方法估计概率密度函数的公式如下:

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h^2 K\left(\frac{x-x_i}{h}\right). \quad (1)$$

其中: $h > 0$ 是窗口的宽度或者是核函数的带宽参数; $K(\cdot)$ 是核函数. 如果使用高斯函数作为核函数, 则上式变为

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2\right). \quad (2)$$

1.2 SVM-2K

SVM-2K^[16] 是一种很有代表性的多视角算法, 它通过引入从两个特征空间学习两个不同的 SVM 得到的两个投影之间的相似性约束来组合两个视角. 对于两个视角的数据, 通过两个特征投影表示, 即对应核 K_A 的 ϕ_A 和对应核 K_B 的 ϕ_B , 可以得到对应的映射后的配对数据集

$$S = \{(\phi_A(x_1), \phi_B(x_1)), \dots, (\phi_A(x_N), \phi_B(x_N))\}. \quad (3)$$

使用松弛变量的 ε 不敏感 1-范数来衡量不符合 ε 相似性的样本点的数量, 有

$$|\langle w_A, \phi_A(x_i) \rangle + b_A - \langle w_B, \phi_B(x_i) \rangle - b_B| \leq \eta_i + \varepsilon, \quad (4)$$

其中 $w_A, b_A (w_B, b_B)$ 是第 1(第 2) 个 SVM 的权重和阈值. 因此, SVM-2K 的目标函数可以表示为

$$\begin{aligned} \arg \min_{w_A, w_B} & \frac{1}{2} \|w_A\|^2 + \frac{1}{2} \|w_B\|^2 + C^A \sum_{i=1}^N \xi_i^A + \\ & C^B \sum_{i=1}^N \xi_i^B + D \sum_{i=1}^N \eta_i. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{s.t. } |\langle w_A, \phi_A(x_i) \rangle + b_A - \langle w_B, \phi_B(x_i) \rangle - b_B| \leq \eta_i + \varepsilon;$$

$$y_i(\langle w_A, \phi_A(x_i) \rangle + b_A) \geq 1 - \xi_i^A;$$

$$y_i(\langle w_B, \phi_B(x_i) \rangle + b_B) \geq 1 - \xi_i^B;$$

$$\xi_i^A \geq 0, \xi_i^B \geq 0, \eta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N.$$

2 基于共享隐空间的多视角 SVM

本文首先利用 Parzen 窗方法构建了共享隐空间, 并将共享隐空间联合原始空间得到扩展空间, 然后引入 SVM, 提出基于共享隐空间的多视角 SVM. 不失一般性, 为了推导方便以及实验操作简便, 在原理一致的情况下, 本文考虑在两个视角下的场景.

2.1 利用 Parzen 窗构建共享隐空间

假设 $\Theta \in \mathbf{R}^{r \times d}$ 为正交矩阵, 并且满足 $\Theta\Theta^T = \mathbf{I}_{r \times r}$, 则隐空间可以表示成 $\Theta x \in \mathbf{R}^{r \times d}$, 其中 r 代表隐特征的数目. 对于 d 维的两个视角的数据集 $\{(x_i^A, y_i) | i = 1, 2, \dots, N\}, \{(x_i^B, y_i) | i = 1, 2, \dots, N\}$,

基于 Parzen 窗构建的对两个视角在隐空间中的密度分布^[19] 可分别表示为

$$P_A(\tilde{x}) = P_A(\Theta x) = \frac{1}{N \cdot \sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{i=1}^N e^{-\frac{\|\Theta x - \Theta x_i^A\|^2}{2\sigma^2}}, \quad (6)$$

$$P_B(\tilde{x}) = P_B(\Theta x) = \frac{1}{N \cdot \sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{i=1}^N e^{-\frac{\|\Theta x - \Theta x_i^B\|^2}{2\sigma^2}}. \quad (7)$$

本文使用 $P_A(\tilde{x})$ 和 $P_B(\tilde{x})$ 之间的积分均方误差来衡量其差别, 即

$$J = \int (P_A(\tilde{x}) - P_B(\tilde{x}))^2 dx. \quad (8)$$

通过最小化 J , 可以使得两个视角的数据在共享隐空间中具有最大程度的共性, 进而可以应对不同视角样本间的差异性过大带来的挑战.

假设 $G(\Theta x, \Theta x_i, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\|\Theta x - \Theta x_i\|^2}{2\sigma^2}}$, 则 $P_A(\tilde{x})$ 和 $P_B(\tilde{x})$ 可以分别表示为

$$P_A(\tilde{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(\Theta x, \Theta x_i^A, \sigma^2), \quad (9)$$

$$P_B(\tilde{x}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N G(\Theta x, \Theta x_j^B, \sigma^2). \quad (10)$$

式(1)展开式为

$$\begin{aligned} J = & \int P_A^2(\tilde{x}) dx - 2 \int P_A(\tilde{x}) P_B(\tilde{x}) dx + \int P_B^2(\tilde{x}) dx, \end{aligned} \quad (11)$$

并且根据文献[20-21], 有

$$\int G(x, x_i, \sigma_1^2) G(x, x_j, \sigma_2^2) dx = G(x_i, x_j, \sigma_1^2 + \sigma_2^2). \quad (12)$$

因此

$$\begin{aligned} \int P_A^2(\tilde{x}) dx = & \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G(\tilde{x}_i^A, \tilde{x}_j^A, 2\sigma^2) = \\ & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N G(\tilde{x}_i^A, \tilde{x}_j^A, 2\sigma^2) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int P_B^2(\tilde{x}) dx = & \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G(\tilde{x}_i^B, \tilde{x}_j^B, 2\sigma^2) = \\ & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N G(\tilde{x}_i^B, \tilde{x}_j^B, 2\sigma^2) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\int P_A(\tilde{x}) P_B(\tilde{x}) dx = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G(\tilde{x}_i^A, \tilde{x}_j^B, 2\sigma^2). \quad (15)$$

其中表达式 $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N G(\tilde{x}_i^A, \tilde{x}_j^A, 2\sigma^2)$ 可以看作 $P_A(\tilde{x}_i)$ 的另一种估计, 因此 $\int P_A^2(\tilde{x})dx$ 可以近似表示为 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_A(\tilde{x}_i)$, 进一步近似表示为 $\frac{1}{N}$. 相同地, $\int P_B^2(\tilde{x})dx$ 可以近似为 $\frac{1}{N}$.

最终, 可以得到近似式

$$J \approx \frac{1}{N} + \frac{1}{N} - \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G(\tilde{x}_i^A, \tilde{x}_j^B, 2\sigma^2), \quad (16)$$

从而有

$$\begin{aligned} \arg \min_{\theta} J &\approx \arg \max_{\theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G(\tilde{x}_i^A, \tilde{x}_j^B, 2\sigma^2), \\ \text{s.t. } \theta \theta^T &= \mathbf{I}_{r \times r}. \end{aligned} \quad (17)$$

然而, 式(17)难以直接求解, 可以使用泰勒展开式^[22]来近似求解. 由泰勒展开式可得

$$\begin{aligned} G(\tilde{x}_i^A, \tilde{x}_j^B, 2\sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\|\theta x_i^A - \theta x_j^B\|^2}{4\sigma^2}} \approx \\ &\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} (1 - (\theta x_i^A - \theta x_j^B)^2). \end{aligned} \quad (18)$$

因此, 式(17)可以进一步近似表示为

$$\begin{aligned} \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\theta x_i^A - \theta x_j^B)^2, \\ \text{s.t. } \theta \theta^T &= \mathbf{I}_{r \times r}. \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)中隐特征变换矩阵 θ 依然无法直接求解, 但可以用梯度下降法求解得到, 具体过程如下.

式(19)可以重新表示为

$$\begin{aligned} J &= \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N ((x_i^A)^T \theta^T \theta x_i^A + \\ & (x_j^B)^T \theta^T \theta x_j^B - 2(x_i^A)^T \theta^T \theta x_j^B), \\ \text{s.t. } \theta \theta^T &= \mathbf{I}_{r \times r}. \end{aligned} \quad (20)$$

对 θ 求导可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (2\theta x_i^A (x_i^A)^T + 2\theta x_j^B (x_j^B)^T - \\ & 2\theta (x_i^A (x_i^A)^T + x_j^B (x_j^B)^T)). \end{aligned} \quad (21)$$

则变量 θ 可以用梯度下降法求解得到, 梯度下降规则^[23-24]为

$$\theta \leftarrow \theta - \eta \frac{\partial J}{\partial \theta} (\mathbf{I}_{r \times r} - \theta \theta^T) = \theta - \eta \nabla \theta, \quad (22)$$

其中 η 表示步长, 且 η 的解析解为

$$\eta = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N ((x_i^A)^T (\theta^T \nabla \theta + \nabla \theta^T \theta) x_i^A +$$

$$\begin{aligned} & (x_j^B)^T (\theta^T \nabla \theta + \nabla \theta^T \theta) x_j^B - \\ & 2(x_i^A)^T (\theta^T \nabla \theta + \nabla \theta^T \theta) x_j^B) / \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (2(x_i^A)^T \nabla \theta^T \nabla \theta x_i^A + \\ & (x_j^B)^T \nabla \theta^T \nabla \theta x_j^B - 4(x_i^A)^T \nabla \theta^T \nabla \theta x_j^B). \end{aligned} \quad (23)$$

根据上述的分析和推导, 给出求解隐特征变换矩阵 θ 的算法描述如下.

算法1 求解隐特征变换矩阵 θ .

输入: 两个视角的数据集 $\{(x_i^A, y_i) | i = 1, 2, \dots, N\}$, $\{(x_i^B, y_i) | i = 1, 2, \dots, N\}$, 隐特征维数 r ;

输出: 隐特征变换矩阵 θ .

初始化. 初始化 $\theta_0 \in \mathbf{R}^{r \times d}$ ($\theta_0 \theta_0^T = \mathbf{I}_{r \times r}$), 迭代值 t 初值为0; 设置最大迭代次数 t_{\max} 和误差阈值 δ .

循环重复.

step 1: $t = t + 1$;

step 2: 使用梯度下降法, 分别利用式(13)和(23)求 $\frac{\partial J}{\partial \theta}$ 和 η ;

step 3: 利用 step 2 求得的 $\frac{\partial J}{\partial \theta}$ 和 η , 根据式(22)确定 θ_t .

结束. $\|\theta^{(t)} - \theta^{(t-1)}\| \leq \delta$ 或 $t \geq t_{\max}$.

2.2 CHS-MV-SVM的目标函数

结合第2节以及上述描述, 可以得到CHS-MV-SVM的目标函数如下:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\substack{w_A, w_B, v_A, \\ v_B, b_A, b_B}} \frac{1}{2} \|w_A\|^2 + \frac{1}{2} \|w_B\|^2 + \frac{1}{2} \|v_A\|^2 + \frac{1}{2} \|v_B\|^2 + \\ C^A \sum_{i=1}^N \xi_i^A + C^B \sum_{i=1}^N \xi_i^B + \lambda \|v_A - v_B\|^2. \\ \text{s.t. } y_i (w_A^T \phi(x_i^A) + v_A^T \phi(\theta x_i^A) + b_A) \geq 1 - \xi_i^A; \\ y_i (w_B^T \phi(x_i^B) + v_B^T \phi(\theta x_i^B) + b_B) \geq 1 - \xi_i^B; \\ \xi_i^A, \xi_i^B \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (24)$$

其中 λ , C^A 和 C^B 是正则化参数. 观察式(24)可以发现该式由3部分组成: 第1部分即前4项, 分别反映原始特征空间和共享隐空间中的结果风险; 第2部分即中间两项, 表示的是经验风险; 第3部分即最后1项, 反映两个视角在共享隐空间中的差异. 式(24)通过隐映射, 在传统的SVM基础上强化了约束条件, 使得不同视角的数据在共享隐空间中的概率分布尽可能一致, 从而可以很好解决本文一开始描述的问题.

2.3 优化求解

为了有效地求解式(24), 根据拉格朗日优化理论, 引入相关拉格朗日乘子, 可将式(24)转换为对应的对偶形式, 具体过程如下.

式(24)对应的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}\|w_A\|^2 + \frac{1}{2}\|w_B\|^2 + \frac{1}{2}\|v_A\|^2 + \frac{1}{2}\|v_B\|^2 + C^A \sum_{i=1}^N \xi_i^A + C^B \sum_{i=1}^N \xi_i^B + \lambda\|v_A - v_B\|^2 + \sum_{i=1}^N \alpha_i^A (1 - \xi_i^A - y_i(w_A^T \phi(x_i^A) + v_A^T \phi(\Theta x_i^A) + b_A)) + \sum_{i=1}^N \alpha_i^B (1 - \xi_i^B - y_i(w_B^T \phi(x_i^B) + v_B^T \phi(\Theta x_i^B) + b_B)) - \sum_{i=1}^N \mu_i^A \xi_i^A - \sum_{i=1}^N \mu_i^B \xi_i^B, \quad (25)$$

其中 $\alpha_i^A \geq 0, \alpha_i^B \geq 0, \mu_i^A \geq 0, \mu_i^B \geq 0$ 是拉格朗日乘子。

令 L 对 $w_A, w_B, v_A, v_B, b_A, b_B, \xi_i^A$ 和 ξ_i^B 的偏导为零可得

$$w_A = \sum_{i=1}^N \alpha_i^A y_i \phi(x_i^A), \quad (26)$$

$$w_B = \sum_{i=1}^N \alpha_i^B y_i \phi(x_i^B), \quad (27)$$

$$v_A = \frac{1+2\lambda}{1+4\lambda} \sum_{i=1}^N \alpha_i^A y_i \phi(\Theta x_i^A) + \frac{2\lambda}{1+4\lambda} \sum_{i=1}^N \alpha_i^B y_i \phi(\Theta x_i^B), \quad (28)$$

$$v_B = \frac{1+2\lambda}{1+4\lambda} \sum_{i=1}^N \alpha_i^B y_i \phi(\Theta x_i^B) + \frac{2\lambda}{1+4\lambda} \sum_{i=1}^N \alpha_i^A y_i \phi(\Theta x_i^A), \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^A y_i = 0, \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^B y_i = 0, \quad (31)$$

$$C_A = \alpha_i^A + \mu_i^A, \quad (32)$$

$$C_B = \alpha_i^B + \mu_i^B, \quad (33)$$

将式(26)~(33)代入(25),即可得到式(25)的对偶问题为

$$\arg \max -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^A \alpha_j^A y_i y_j \phi(x_i^A)^T \phi(x_j^A) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^B \alpha_j^B y_i y_j \phi(x_i^B)^T \phi(x_j^B) - \frac{4\lambda}{2(1+4\lambda)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^A \alpha_j^B y_i y_j \phi(\Theta x_i^A)^T \phi(\Theta x_j^B) -$$

$$\frac{1+2\lambda}{2(1+4\lambda)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^A \alpha_j^A y_i y_j \phi(\Theta x_i^A)^T \phi(\Theta x_j^A) - \frac{1+2\lambda}{2(1+4\lambda)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i^B \alpha_j^B y_i y_j \phi(\Theta x_i^B)^T \phi(\Theta x_j^B) + \sum_{i=1}^N \alpha_i^A + \sum_{i=1}^N \alpha_i^B. \quad (34)$$

上式可以进一步表示为

$$\arg \max_{\tilde{\alpha}} -\frac{1}{2} \tilde{\alpha}^T \mathbf{K} \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}^T \mathbf{1}. \\ \text{s.t. } \tilde{\alpha}^T \mathbf{f} = 0, \mathbf{f} = [\mathbf{y}^T, \mathbf{y}^T]^T; \\ \tilde{\alpha}_i \geq 0, \forall i. \quad (35)$$

其中

$$\tilde{\alpha} = [\alpha_1^A, \alpha_2^A, \dots, \alpha_N^A, \alpha_1^B, \alpha_2^B, \dots, \alpha_N^B]^T, \quad (36)$$

$$\mathbf{K}_A = K(x^A, x^A) \mathbf{y} \mathbf{y}^T + \frac{1+2\lambda}{1+4\lambda} K(\Theta x^A, \Theta x^A) \mathbf{y} \mathbf{y}^T, \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_B = K(x^B, x^B) \mathbf{y} \mathbf{y}^T + \frac{1+2\lambda}{1+4\lambda} K(\Theta x^B, \Theta x^B) \mathbf{y} \mathbf{y}^T, \quad (38)$$

$$\mathbf{K}_{AB} = \frac{2\lambda}{1+4\lambda} K(\Theta x^A, \Theta x^B) \mathbf{y} \mathbf{y}^T, \quad (39)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_A & \mathbf{K}_{AB} \\ \mathbf{K}_{AB} & \mathbf{K}_B \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T. \quad (41)$$

$K(\cdot)$ 表示核函数. 显然, 式(35)是经典的QP问题, 本文将采用文献[25]的QP求解方法进行求解.

通过QP优化后,可以得到式(35)对应的优化后的拉格朗日乘子 $\tilde{\alpha}$, 进而可以得到对应的优化后的 $w_A, w_B, v_A, v_B, b_A, b_B$.

对于CHS-MV-SVM, 本文采用的分类面如下:

$$f(x) = \frac{1}{2} (w_A^T \phi(x^A) + v_A^T \phi(\Theta x^A) + b_A + w_B^T \phi(x^B) + v_B^T \phi(\Theta x^B) + b_B). \quad (42)$$

2.4 算法描述

根据算法1以及上一节的推导和结论, 本小节给出CHS-MV-SVM的算法描述.

算法2 CHS-MV-SVM算法.

输入: 两个视角的训练样本 $\{(x_i^A, y_i) | i = 1, 2, \dots, N\}, \{(x_i^B, y_i) | i = 1, 2, \dots, N\}$, 正则化参数 C^A, C^B, λ ;

输出: 测试样本的预测标签.

step 1: 利用算法1得到隐特征变换矩阵 Θ ;

step 2: 利用隐映射矩阵 Θ 得到对应的共享隐空间数据;

step 3: 根据式(35)求解得到拉格朗日乘子 $\tilde{\alpha}$;

step 4: 根据step 3得到的 $\tilde{\alpha}$ 求解得到 $w_A, w_B, v_A, v_B, b_A, b_B$;

step 5: 根据step 4学习得到对应的参数生成CHS-MV-SVM用于测试样本, 最终输出测试样本的预测标签.

3 实验分析

为了对本文所提出CHS-MV-SVM的性能进行验证, 使用人工数据集和真实多视角数据集进行实验, 并将CHS-MV-SVM与 k -Nearest Neighbor (KNN)^[26]、Support Vector Machine (SVM)^[27]、SVM-2K^[16]、Multi-view L2-SVM (MV-L2-SVM)^[17]、Alternative Multiview MED (AMVMED)^[28]等方法进行比较分析.

3.1 实验设置

3.1.1 评价指标

为了对所有方法进行合理评价, 本文选用下式作为性能评价指标:

$$Accuracy = \frac{\text{分类正确的样本个数}}{\text{测试样本总数}}. \quad (43)$$

3.1.2 参数设置

在实验中, 以KNN、SVM、SVM-2K、MV-L2-SVM、AMVMED等方法作为对比方法, 与本文提出的CHS-MV-SVM进行比较. 为了公平, SVM、SVM-2K、MV-L2-SVM和CHS-MV-SVM均采用高斯核 $K(x_i, x_j) = \exp(-\|x_i - x_j\|^2/2\sigma^2)$ 进行实验. 对于所有方法, 均采用十折交叉验证(CV)来确定最优参数. 表1给出了各方法的相关参数及范围的具体设置.

表1 各方法的参数及范围

| 方法 | 参数及范围 |
|------------|--|
| KNN | 正则化参数 $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ |
| SVM | 正则化参数 $C \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$; 核宽度 $\sigma \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$ |
| SVM-2K | 正则化参数 $C^A \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$, $C^B \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$, $D \in \{2^{-5}, 2^{-4}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^4, 2^5\}$; 核宽度 $\sigma \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$ |
| MV-L2-SVM | 正则化参数 $C^A \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$, $C^B \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$; 核宽度 $\sigma \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$ |
| AMVMED | 正则化参数 $C^A \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$, $C^B \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$; 视角权值 $\gamma \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ |
| CHS-MV-SVM | 正则化参数 $C^A \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$, $C^B \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$, $\lambda \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1\}$; 核宽度 $\sigma \in \{2^{-8}, 2^{-7}, \dots, 2^0, 2^1, \dots, 2^7, 2^8\}$ |

3.1.3 实验环境设置

实验硬件平台为Intel Pentium×4 CPU, 其主频为3.40 GHz, 内存为4 GB, 编程环境为Matlab R2016a.

3.2 实验数据

3.2.1 人工数据集

本文采用了Two moon-Two line多视角人工数据集来比较所有方法的性能. 该数据集可以分为两个视图, 即双月视角和双线视角. 对于该多视角数据集, 双月视角是非线性分类问题, 而另一个是线性分类问题. 该人工数据集有2个类别, 共600个样本. 为了充分验证本文方法的有效性, 在原始生成的数据基础上, 添加了5%的高斯白噪声. 具体的人工数据集样本分布如图3所示.

3.2.2 真实多视角数据集

本文采用的真实多视角数据集是AWA^[29], 该数据集共有30475个图像, 包含50个动物类. 本文随机选举4个类别, 即giant_panda、hippopotamus、leopard、

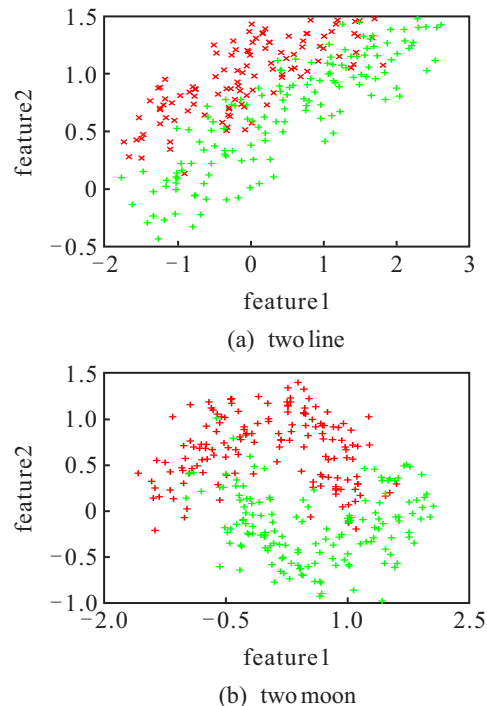


图3 Two moon-Two line数据集样本的分布

persian_cat, 共计 2987 个图像进行实验. 同时选用 Lss_hist 特征 (2000 维) 和 SIFT 特征 (2000 维) 分别作为视角 A 和视角 B. 本文主要考虑二分类问题, 因而

将上述 4 个类别两两配对构建了 6 个二分类数据集. 具体细节如表 2 所示.

表 2 AWA 数据集组合细节

| 组合 | 数据集 | 正类 | 负类 | 样本个数 |
|----|-----------------------------|--------------|--------------|-------|
| D1 | giant_panda vs hippopotamus | giant_panda | hippopotamus | 1 665 |
| D2 | giant_panda vs leopard | giant_panda | leopard | 1 550 |
| D3 | giant_panda vs persian_cat | giant_panda | persian_cat | 1 656 |
| D4 | hippopotamus vs leopard | hippopotamus | leopard | 1 331 |
| D5 | hippopotamus vs persian_cat | hippopotamus | persian_cat | 1 437 |
| D6 | leopard vs persian_cat | leopard | persian_cat | 1 322 |

3.3 实验结果与分析

3.3.1 人工数据集实验结果

图 4 展示的是所有方法在 Two moon-Two line 上的实验结果. 为保证实验的公正性, 实验运行 20 次, 实验结果取均值. 从图 4 的结果可以看出, 本文所提出 CHS-MV-SVM 方法的效果是最好的. 整体而言, 多

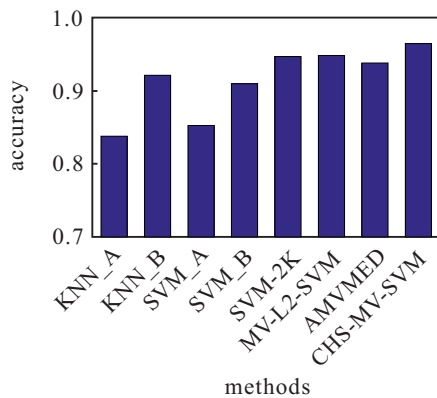


图 4 所有方法对 Two moon-Two line 的实验结果

视角方法比单视角方法效果好. 显然, 添加了噪声对单视角方法 KNN 和 SVM 的识别效果影响很大, 而且噪声对线性分类 (line 视角) 和非线性分类 (moon 视角) 的影响也是不一样的, 最终使得单视角方法的性能不如多视角方法. 而对于多视角方法, CHS-MV-SVM 充分利用了不同视角样本间的差异与联系, 能够得到较好的效果.

3.3.2 真实多视角数据集实验结果

对于真实多视角数据集 AWA, 先将所有的样本利用 PCA 降维至 150, 然后进行实验, 所有方法在构建的 6 个多视角数据集上的实验结果由表 3 给出. 表 3 展示的是实验运行 20 次的均值和方差, 其中最好的结果加粗显示 (表 3 中最后两行是所有结果的平均精度和平均方差). KNN_A 和 KNN_B 分别表示单视角方法 KNN 在两个视角上的结果; 同样地, SVM_A 和 SVM_B 分别表示单视角方法 SVM 在两个视角上的结果.

表 3 所有方法对真实多视角数据集 AWA 的实验结果

| # | KNN_A | KNN_B | SVM_A | SVM_B | SVM-2K | MV-L2-SVM | AMVMED | CHS-MV-SVM |
|---------|-----------------------|---------------|---------------|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------------|
| D1 | 0.8158± 0.0148 | 0.8130±0.0114 | 0.8182±0.0645 | 0.8353±0.0496 | 0.8804±0.0134 | 0.9059 ±0.0132 | 0.8519±0.0140 | 0.9007±0.0177 |
| D2 | 0.7828±0.0123 | 0.7826±0.0123 | 0.8165±0.0636 | 0.8251±0.0652 | 0.8765±0.0196 | 0.8986± 0.0081 | 0.8256±0.0093 | 0.9147 ±0.0097 |
| D3 | 0.7970±0.0192 | 0.8022±0.0147 | 0.8238±0.0429 | 0.8393±0.0391 | 0.8560±0.0146 | 0.9032±0.0104 | 0.8381±0.0135 | 0.9066 ± 0.0091 |
| D4 | 0.7862±0.0210 | 0.8386±0.0184 | 0.8139±0.0423 | 0.8355±0.0343 | 0.8515±0.0251 | 0.8913±0.0148 | 0.8467± 0.0099 | 0.9189 ±0.0138 |
| D5 | 0.7578±0.0132 | 0.8497±0.0151 | 0.8224±0.0475 | 0.8436±0.0353 | 0.8662±0.0103 | 0.9222±0.0118 | 0.8480±0.0126 | 0.9433 ± 0.0089 |
| D6 | 0.8199±0.0118 | 0.8348±0.0176 | 0.8345±0.0389 | 0.8571±0.0436 | 0.8909± 0.0026 | 0.9197±0.0131 | 0.8727±0.0107 | 0.9304 ±0.0151 |
| Ave.acc | 0.7933 | 0.8202 | 0.8216 | 0.8393 | 0.8703 | 0.9068 | 0.8472 | 0.9191 |
| Ave.std | 0.0154 | 0.0149 | 0.0500 | 0.0445 | 0.0143 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0124 |

从表 3 可以看出, 从平均精度和平均方差角度, 本文提出的 CHS-MV-SVM 精度最好, 但是稳定性不如 MV-L2-SVM. 而且, 从整体上看, 多视角方法无论是在精度还是稳定性方面都优于单视角方法. 单独对每个多视角数据集, 在大多数情况下, CHS-MV-SVM 的精度和方差都是最好的, 这表明本文方法能

够很好地应对前文提到的多视角学习的挑战.

3.3.3 统计分析

为了进一步分析本文方法与对比方法的性能差异, 本节对所有方法进行统计分析.

利用 Friedman test^[30] 来对所有方法在所有数据集上的实验结果进行统计分析. Friedman test 是一种

非参数检验方法,能够用来分析多个方法在多个数据集上的性能之间是否存在显著差异,其原理是:首先根据每个方法在每个数据集上的结果得到每个方法在所有数据集上性能的平均排序;然后比较这些平均排序是否相同,如果相同,则表明所有方法的性能相同,否则说明所有方法的性能存在显著差异,进而利用Post hoc假设检验来具体分析两种方法的性能是否存在显著差异.因此,首先计算每个方法的平均排序,结果如图5所示,CHS-MV-SVM的性能显然是最好的,而KNN_A的性能是最差的(平均排序越低,方法的性能越好).这表明所有方法的性能存在显著差异,因此需要利用Post hoc假设检验来具体分析两种方法的性能是否存在显著差异.这里主要分析本文方法CHS-MV-SVM与其他对比方法的性能是否存在显著差异.

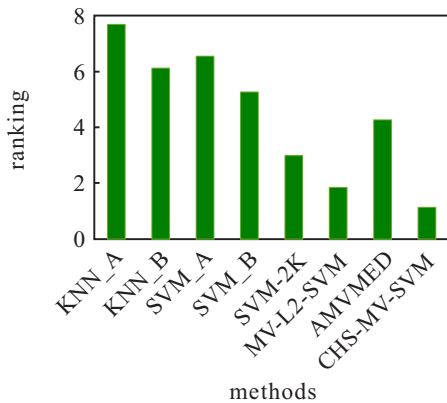


图5 每个方法的平均排序

表4展示了显著性水平为 $\alpha = 0.05$ 的Post hoc假设检验结果.所有方法是按照在检验分析过程中得到的 z 来排序的.从表4可以看出,当 $p_{F_{ri}} \leq 0.025$ 时拒绝“CHS-MV-SVM与其他方法的性能没有显著性差异”的假设.因此,可以得到如下结论:CHS-MV-SVM的性能最好,多视角方法明显优于单视角方法.

表4 显著性水平为 $\alpha = 0.05$ 的Post hoc假设检验结果

| i | method | z | $p_{F_{ri}}$ | holm | hypothesis |
|-----|-----------|-----------|--------------|-----------|--------------|
| 7 | KNN_A | 5.019 011 | 0.000 001 | 0.007 143 | rejected |
| 6 | SVM_A | 4.146 140 | 0.000 034 | 0.008 333 | rejected |
| 5 | KNN_B | 3.818 813 | 0.000 134 | 0.01 | rejected |
| 4 | SVM_B | 3.164 159 | 0.001 555 | 0.012 5 | rejected |
| 3 | AMVMED | 2.400 397 | 0.016 377 | 0.016 667 | rejected |
| 2 | SVM-2K | 1.418 416 | 0.156 069 | 0.025 | not rejected |
| 1 | MV-L2-SVM | 0.545 545 | 0.585 379 | 0.05 | not rejected |

综上所述可以得出如下结论:当不同视角样本间的差异性过大时,CHS-MV-SVM能够很好地应对,最终得到较好的效果.

4 结论

本文利用Parzen窗构建了共享隐空间,然后基于共享隐空间概率密度一致,引入支持向量机,针对多视角学习由于不同视角样本间差异带来的识别性能下降的问题,提出了基于共享隐空间的多视角SVM方法.通过转化为经典的QP问题,有效利用了已有的求解方法进行求解.通过在人造数据集和真实多视角数据集上进行实验,亦验证本文方法较其他方法具有较好的实验效果.

参考文献(References)

- [1] Wang Y, Lin X, Wu L, et al. Robust subspace clustering for multi-view data by exploiting correlation consensus[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2015, 24(11): 3939-3949.
- [2] Chen N, Zhu J, Xing E P. Predictive subspace learning for multi-view data: A large margin approach[C]. Proceedings of the International Conference on Neural Information Processing Systems. Vancouver: MIT Press, 2010: 361-369.
- [3] Kan M, Shan S, Zhang H, et al. Multi-view discriminant analysis[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2016, 38(1): 188-194.
- [4] 邓赵红, 张丹丹, 蒋亦樟, 等. 基于划分自适应融合的多视角模糊聚类算法[J]. 控制与决策, 2016, 31(4): 593-600.
(Deng Z H, Zhang D D, Jiang Y Z, et al. Multi-view fuzzy clustering algorithm based on partition adaptive-fusion[J]. Control and Decision, 2016, 31(4): 593-600.)
- [5] Ding Z M, Fu Y. Low-rank common subspace for multi-view learning[C]. Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Data Mining. Shenzhen: IEEE, 2014: 110-119.
- [6] Yu J, Rui Y, Tang Y Y, et al. High-order distance-based multiview stochastic learning in image classification[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2014, 44(12): 2431-2442.
- [7] 黄成泉, 王士同, 蒋亦樟, 等. 一种基于L2-SVM的多视角核心向量机[J]. 控制与决策, 2015, 30(8): 1356-1364.
(Huang C Q, Wang S T, Jiang Y Z, et al. A multi-view core vector machine based on L2-SVM[J]. Control and Decision, 2015,30(8):1356-1364.)
- [8] Tang J, Tian Y, Zhang P, et al. Multiview privileged support vector machines[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(8): 3463-3477.
- [9] Li J J, Wu Y, Zhao J, et al. Low-rank discriminant

- embedding for multiview learning[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(11): 3516-3529.
- [10] Li A, Shan S, Chen X, et al. Maximizing intra-individual correlations for face recognition across pose differences[C]. Proceedings of the 2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Miami: IEEE, 2009: 605-611.
- [11] Sharma A, Jacobs D W. Bypassing synthesis: PLS for face recognition with pose, low-resolution and sketch[C]. Proceedings of the 2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Providence: IEEE, 2011: 593-600.
- [12] Xu C, Tao D L C, Xu C. A survey on multi-view learning[J]. 2013, arXiv: 1304.5634.
- [13] Yu S, Krishnapuram B, Rosales R, et al. Bayesian co-training[J]. Journal of Machine Learning Research, 2011, 12(9): 2649-2680.
- [14] Gönen M, Alpaydm E. Multiple kernel learning algorithms[J]. Journal of Machine Learning Research, 2011, 12(7): 2211-2268.
- [15] Zhai D L M, Chang H, Shan S G, et al. Multiview metric learning with global consistency and local smoothness[J]. ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology (TIST), 2012, 3(3): 1-22.
- [16] Farquhar J D R, Hardoon D R, Meng H Y, et al. Two view learning: SVM-2K, theory and practice[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2006: 355-362.
- [17] Huang C Q, Chung F L, Wang S T. Multi-view L2-SVM and its multi-view core vector machine[J]. Neural Networks, 2016, 75: 110-125.
- [18] Xie X L J, Sun S L L. Multi-view Laplacian twin support vector machines[J]. Applied Intelligence, 2014, 41(4): 1059-1068.
- [19] Vincent P, Bengio Y. Manifold parzen windows[C]. Proceedings of the Advances in Neural Information Processing Systems. Vancouver: MIT Press, 2002: 849-856.
- [20] Deng Z H, Chung F L, Wang S T. FRSDE: Fast reduced set density estimator using minimal enclosing ball approximation[J]. Pattern Recognition, 2008, 41(4): 1363-1372.
- [21] Wang S T, Wang J, Chung F L. Kernel density estimation, kernel methods, and fast learning in large data sets[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2014, 44(1): 1-20.
- [22] Hansen P, Jaumard B, Xiong J. Cord-slope form of Taylor's expansion in univariate global optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1994, 80(3): 441-464.
- [23] Edelman A, Arias T A, Smith S T. The geometry of algorithms with orthogonality constraints[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1998, 20(2): 303-353.
- [24] Del Buono N, Politi T. A continuous technique for the weighted low-rank approximation problem[C]. Proceedings of the International Conference on Computational Science and Its Applications. Assisi: Springer, 2004: 988-997.
- [25] Deng Z H, Jiang Y Z, Choi Kup-Sze, et al. Knowledge-leverage-based TSK fuzzy system modeling[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2013, 24(8): 1200-1212.
- [26] Liu Q, Liu C. A novel locally linear KNN method with applications to visual recognition[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2017, 28(9): 2010-2021.
- [27] Halldorsson G H. Support vector machines in multisource classification[C]. Proceedings of the Geoscience and Remote Sensing Symposium. Assisi: Springer, 2003: 2054-2056.
- [28] Chao G C, Sun S. Alternative multiview maximum entropy discrimination[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2015, 27(7): 1445-1456.
- [29] Lampert C H, Nickisch H, Harmeling S. Learning to detect unseen object classes by between-class attribute transfer[C]. Proceedings of the 2009 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Miami: IEEE, 2009: 951-958.
- [30] Sheldon M R, Fillyaw M J, Thompson W D. The use and interpretation of the Friedman test in the analysis of ordinal-scale data in repeated measures designs[J]. Physiotherapy Research International, 1996, 1(4): 221-228.

作者简介

姜志彬(1991—), 男, 博士生, 从事人工智能与模式识别、机器学习的研究, E-mail: jnuszmtjzb@163.com;

周洁(1992—), 女, 博士生, 从事人工智能与模式识别、机器学习的研究, E-mail: 799489588@qq.com;

张远鹏(1984—), 男, 讲师, 博士生, 从事人工智能与模式识别的研究, E-mail: 155297131@qq.com;

王士同(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事人工智能与模式识别、机器学习等研究, E-mail: wxwangst@jiangnan.eud.cn.

(责任编辑: 齐 霖)