

# 控制与决策

Control and Decision

## 有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制

汪磊, 杨慧中, 陶洪峰

引用本文:

汪磊, 杨慧中, 陶洪峰. 有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制[J]. *控制与决策*, 2021, 36(3): 599–608.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0873>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 一种改进的紧格式无模型自适应控制方法

An improved compact form model free adaptive control method

*控制与决策*. 2021, 36(2): 436–442 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0635>

### 脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

*控制与决策*. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

### 基于强化学习的倒立摆分数阶梯度下降RBF控制

Reinforcement learning based fractional gradient descent RBF neural network control of inverted pendulum

*控制与决策*. 2021, 36(1): 125–134 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0816>

### 参数未知的离散系统Q-学习优化状态估计与控制

Q-learning optimal state estimation and control for discrete systems with unknown parameters

*控制与决策*. 2020, 35(12): 2889–2897 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0180>

### 基于强化学习的小型无人直升机有限时间收敛控制设计

Finite time control based on reinforcement learning for a small-size unmanned helicopter

*控制与决策*. 2020, 35(11): 2646–2652 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0328>

# 有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制

汪磊, 杨慧中<sup>†</sup>, 陶洪峰

(江南大学 教育部轻工过程先进控制重点实验室, 江苏 无锡 214122)

**摘要:** 针对不同相对度的离散线性重复过程, 研究有限频域范围的动态迭代学习控制问题. 对于零相对度和高相对度的控制对象, 结合二维 (2D) 系统理论, 分别设计有限频域的动态迭代学习控制器; 然后, 运用广义 Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) 引理, 以线性矩阵不等式 (LMI) 的形式给出控制器存在的充分条件以及控制器的增益矩阵; 最后, 在弹簧阻尼系统和桁架机器人模型的仿真中, 与静态迭代学习控制算法进行比较, 验证所提算法的优越性和可行性.

**关键词:** 线性重复过程; 有限频率范围; 相对度; 动态迭代学习控制; 广义 KYP 引理

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0873

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 汪磊, 杨慧中, 陶洪峰. 有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制 [J]. 控制与决策, 2021, 36(3): 599-608.

## Dynamic iterative learning control for linear repetitive processes over finite frequency ranges

WANG Lei, YANG Hui-zhong<sup>†</sup>, TAO Hong-feng

(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** This paper addresses the problem of dynamic iterative learning control for discrete linear repetitive processes with different relative degrees, whose aim is to develop monotonically convergent control law design over a finite frequency domain. For the control objects with zero relative degree and high relative degree, the dynamic iterative learning controllers in the finite frequency domain are designed by combining the two-dimensional (2D) system theory. Using the generalized Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) lemma, the sufficient conditions for the existence of the controller and the gain matrix of the controller are given in the form of linear matrix inequalities (LMI). Finally, the superiority and feasibility of such a control law are tested on a spring damping system and a gantry robot, including a comparative performance against a static law applied to the same robot.

**Keywords:** linear repetitive processes; finite frequency range; different relative degrees; dynamic iterative learning control; generalized Kalman-Yakubovich-Popov lemma

## 0 引言

迭代学习控制适用于在有限时间内重复运行的操作, 其策略是利用系统先前的控制经验和输出误差重复修正当前的控制输入, 使得系统输出完全跟踪期望轨迹<sup>[1]</sup>. 迭代学习控制方法具有控制器形式简单、在线计算量较少的特点, 受到广泛应用.

线性重复过程是一类特殊的 2D 系统, 其主要特点是具有一系列重复性操作, 每一次操作都在一个固定的有限时间内完成, 这些特点正好与迭代学习控制

系统批次维度和时间维度相吻合. 针对线性重复过程, 基于 2D 系统理论研究迭代学习控制方案, 同时改善系统沿时间和批次方向的控制性能, 是近年来迭代学习控制领域的一个重要发展方向<sup>[2]</sup>. 文献 [3] 讨论了具有执行器故障间歇过程的鲁棒迭代学习保性能控制策略, 在不确定扰动和故障情形下, 保证了学习过程在时间和批次两个方向上的性能以及系统的鲁棒  $H_\infty$  性能; 文献 [4] 利用线性重复过程的稳定性理论, 设计高阶迭代学习控制器, 优化了系统的单调收

收稿日期: 2019-06-18; 修回日期: 2019-09-14.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61773181); 高等学校学科创新引智计划项目 (B12018); 中央高校基本科研业务费专项资金项目 (JUSRP51733B).

责任编辑: 虞文武.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: yhz@jiangnan.edu.cn.

敛性和鲁棒性能;在2D系统理论的框架下,文献[5]基于执行器故障的离散线性重复过程,提出了状态反馈式的集成迭代学习容错控制器的综合设计方法,并以LMI的形式给出了闭环系统发生故障时仍然保持稳定的充分条件.这些设计方法都是运用静态状态反馈和前馈信息改善系统的控制性能.但是静态迭代学习控制器通常只利用输出误差和状态信号,因此在某些情形下,静态迭代学习控制律可能导致执行机构、控制信号和快速收敛性等难以获得要求的性能,它仅是动态迭代学习控制律的一种特殊形式,动态迭代学习控制器运用了更多的系统内部信号来构造和更新控制器,可以提高控制系统的整体性能<sup>[6]</sup>,而且控制律可调参数的增加可保证在使用LMI技术求解参数时降低可行解求解过程的保守性和取值范围.

值得注意的是,以上的研究成果均是从时域角度分析迭代学习控制系统的动态性能.然而,实际工程中的被控对象的工作环境和控制要求往往具有明显的有限频域特性,隶属于某个特定的频段,系统控制问题常常可归结为与这些有限频域特性相对应的若干有限频域性能指标的折衷优化问题<sup>[7]</sup>,控制性能指标与频率直接相关.因此,根据这些有限频域特性进行迭代学习控制系统分析和设计就显得尤为必要.广义Kalman-Yakubovich-Popov (KYP)引理能够建立起时域与频域的直接联系,而且方便设计者使用LMI工具刻画和分析有限频域特性,为有限频域范围迭代学习控制问题的研究提供了有效可靠的方法.例如,文献[8]利用广义KYP引理,提出了2D模型鲁棒迭代学习控制算法,并探讨了系统的收敛性;文献[9]利用重复过程的结构特征,设计出一种沿时间方向稳定和沿时间方向收敛的前馈-反馈迭代学习控制策略,在有限频域范围内,基于广义KYP引理和LMI技术分析了控制器存在的充要条件并得出控制器参数.但是,上述研究并没有考虑到动态迭代学习控制技术和系统的相对度问题.

鉴于此,本文针对不同相对度的离散线性重复过程,研究有限频域下的动态迭代学习控制问题.分别针对零相对度( $r = 0$ )和高相对度( $r \geq 1$ )两种情形,设计动态迭代学习控制器,结合2D系统理论构建相应的2D Roesser模型.运用广义KYP引理,将有限频域的性能分析转化为相应的LMI问题,进而给出控制器存在的充分条件以及控制器参数,同时该条件还可保证系统动态性能.最后,在桁架机器人模型的仿真中,与静态迭代学习控制算法进行比较,表明本文所提算法的优越性和有效性.

在本文中:对于矩阵 $X$ ,用 $X^T$ 和 $X^\perp$ 分别表示其转置和正交补, $X > 0$ 和 $X < 0$ 分别表示矩阵是正定和负定; $I$ 和 $0$ 分别表示适当维数的单位阵和零矩阵;符号“ $*$ ”表示对称位置上的元素转置; $\text{sym}(A) = A + A^T$ 表示方阵 $A$ 的Hermitian部分; $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示对角矩阵.

本文的分析证明要用到以下引理.

**引理1**<sup>[10]</sup> 设 $\Psi, A, \Sigma$ 为适当维数的实矩阵,且 $\Psi = \Psi^T$ ,存在可逆矩阵 $W$ 使下列矩阵不等式成立:

$$\Psi + \text{sym}\{A^T W \Sigma\} < 0, \quad (1)$$

当且仅当以下两个不等式成立:

$$A^\perp \Psi A < 0, \quad \Sigma^\perp \Psi \Sigma < 0. \quad (2)$$

**引理2**<sup>[11]</sup> 假如 $W, L$ 和 $V$ 为给定的适当维数矩阵,且 $W$ 和 $V$ 为正定矩阵,则 $L^T V L - W < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} -W & L^T \\ L & -V^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (3)$$

或者

$$\begin{bmatrix} -V^{-1} & L \\ L^T & -W \end{bmatrix} < 0. \quad (4)$$

**引理3**<sup>[12]</sup> 给定适当维数的矩阵 $\Gamma = \Gamma^T, X, Y$ ,则对于任意满足 $\Delta^T \Delta \leq I$ 的 $\Delta$ ,不等式

$$\Gamma + X \Delta Y + Y^T \Delta^T X^T < 0 \quad (5)$$

成立的充要条件是存在 $\varepsilon > 0$ ,使得

$$\Gamma + \varepsilon^2 X X^T + \varepsilon^{-2} Y^T Y < 0. \quad (6)$$

## 1 问题描述

### 1.1 线性重复过程的稳定性

对于批次 $k \geq 0$ ,在有限周期 $0 \leq t \leq \alpha - 1$ 上运行的标准离散线性重复过程的状态空间模型<sup>[13]</sup>为

$$\begin{cases} x(t+1, k+1) = \\ A_d x(t, k+1) + B_d u(t, k+1) + B_{d0} y(t, k), \\ y(t, k+1) = \\ C_d x(t, k+1) + D_d u(t, k+1) + D_{d0} y(t, k). \end{cases} \quad (7)$$

其中 $x(t, k+1) \in R^n, u(t, k+1) \in R^m$ 和 $y(t, k+1) \in R^l$ 分别表示系统在第 $k+1$ 次运行的状态、输入和输出.为了实现此过程,设定系统的边界条件为

$$\begin{cases} x(0, k+1) = d_{k+1}, \quad k \geq 0; \\ y(t, 0) = f(t), \quad 0 \leq t \leq \alpha - 1. \end{cases} \quad (8)$$

其中 $d_{k+1}$ 和 $f(t)$ 都表示已知向量函数.

**引理4**<sup>[14]</sup> 假设系数  $\{A_d, B_{d0}\}$  可控,系数  $\{C_d, D_{d0}\}$  可观,则由式(1)和(2)描述的线性重复过程稳定,当且仅当以下不等式成立:

- 1)  $\rho(D_{d0}) < 1$ ,其模值严格小于1,保证输出迭代批次上的收敛性;
- 2)  $\rho(A_d) < 1$ ,其模值严格小于1,保证重复周期时间上的收敛性;
- 3) 传递函数矩阵  $G(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_{d0} + D_{d0}$  在单位圆  $|z| = 1$  上的所有特征值模都严格小于1,同时保证时间和批次上的收敛性.

**引理5**<sup>[13]</sup> 对于传递函数为  $G(z)$ ,且频率响应矩阵为  $G(e^{j\theta}) = C_d(e^{j\theta}I - A_d)^{-1}B_d + D_d$  的离散线性时不变系统,下列条件等价:

- 1) 频域不等式

$$\begin{bmatrix} G(e^{j\theta}) \\ I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} G(e^{j\theta}) \\ I \end{bmatrix} < 0, \forall \theta \in \Theta. \quad (9)$$

其中:  $\Pi$  表示给定的实对称矩阵,且  $\Theta$  的频域范围如表1所示.

表1 系统频率取值范围

	低频	中频	高频
$\Theta$	$ \theta  < \theta_l$	$\theta_1 < \theta < \theta_2$	$ \theta  \geq \theta_h$

- 2) 线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A_d & B_d \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} A_d & B_d \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_d & D_d \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C_d & D_d \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

且矩阵  $\Xi$  可划分为

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 \\ \Xi_2^T & \Xi_3 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

并指定如下:

$$\Xi = \begin{cases} \begin{bmatrix} -P & Q \\ Q & P - 2\cos(\theta_l)Q \end{bmatrix}, & |\theta| < \theta_l; \\ \begin{bmatrix} -P & e^{j(\theta_1+\theta_2)/2}Q \\ e^{-j(\theta_1+\theta_2)/2}Q & P - 2\cos((\theta_2 - \theta_1)/2)Q \end{bmatrix}, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; \\ \begin{bmatrix} -P & -Q \\ -Q & P + 2\cos(\theta_h)Q \end{bmatrix}, & |\theta| > \theta_h. \end{cases} \quad (12)$$

其中:  $Q > 0, P = P^T$ .

用  $\bar{\sigma}(G(e^{j\theta}))$  表示传递函数为  $G(z)$  的频率响应

矩阵  $G(e^{j\theta})$  的最大奇异值,并且选择  $\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ , 则对于式(9),有

$$G(e^{j\theta})^T G(e^{j\theta}) < I, \forall \theta \in \Theta, \quad (13)$$

或者

$$\bar{\sigma}(G(e^{j\theta})) < 1, \forall \theta \in \Theta, \quad (14)$$

即对于所有的  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,均满足

$$\rho(G(e^{j\theta})) \leq \bar{\sigma}(G(e^{j\theta})). \quad (15)$$

通过以上不等式可以在有限频域范围内重构引理4的条件3),从而得到实际相关的数学方法.

## 1.2 系统描述

考虑如下重复运行的离散线性系统:

$$\begin{cases} x(t+1, k) = Ax(t, k) + Bu(t, k), \\ y(t, k) = Cx(t, k) + Du(t, k). \end{cases} \quad (16)$$

其中:重复周期  $0 \leq t \leq T-1; k \geq 1$  表示系统的迭代次数;  $x(t, k) \in R^n, u(t, k) \in R^m$  和  $y(t, k) \in R^l$  分别表示系统在第  $k$  次的第  $t$  时刻的状态、输入和输出,边界条件  $x(0, k) = x_0$  表示系统在第  $k$  次的初始条件;矩阵  $A, B, C$  和  $D$  表示相应的适当维数的系统矩阵.

假设系统(16)稳定且具有相对度  $r$ ,相对度  $r \geq 0$  具有以下特性<sup>[15]</sup>:

- 1) 如果  $D \neq 0$  且行满秩,则  $r = 0$ .
- 2) 如果系统满足以下条件,则  $r \geq 1$ :
  - i) 对于所有  $i < r-1$ ,有  $D = 0$  和  $CA^i B = 0$ ;
  - ii)  $CA^{r-1} B \neq 0$  且行满秩.

在系统(16)的迭代学习过程中,令其期望轨迹为  $y_d(t)$ ,同时定义跟踪误差

$$e(t, k) = y_d(t) - y(t, k). \quad (17)$$

针对状态空间模型(16),并考虑到系统的各相对度情形,本文通过设计合适的控制器,使被控系统的跟踪误差在指定的有限频域范围随着批次方向单调收敛,同时保证控制系统沿时间方向稳定.

## 2 动态迭代学习控制系统的设计

针对系统(16),设计如下迭代学习控制律:

$$\begin{cases} u(t, k) = u(t, k-1) + \Delta u(t, k); \\ u(t, 0) = 0, t \in [0, T-1]. \end{cases} \quad (18)$$

其中:  $u(t, 0)$  表示迭代控制的初值,  $\Delta u(t, k)$  表示迭代学习更新律,用于更新控制系统的输入信号. 定义

$$\delta_k(f(t, k)) = f(t, k) - f(t, k-1), \quad (19)$$

其中  $\delta_k(f(t, k))$  表示  $f(t, k)$  沿着批次  $k$  方向的误差.

2.1 零相对度( $r = 0$ )系统的稳定性分析

考虑系统(16)的相对度  $r = 0$ , 则有  $D \neq 0$ . 构造动态迭代学习控制器的内部状态方程为

$$x_c(t + 1, k) = A_c x_c(t, k) + B_c \delta_k(x(t, k)) + D_c e(t, k - 1), \quad (20)$$

其中  $A_c, B_c, D_c$  表示待设计的控制器内部状态方程的增益矩阵.

采用如下动态迭代学习更新律:

$$\Delta u(t, k) = K_1 \delta_k(x(t, k)) + K_2 x_c(t, k) + K_3 e(t, k - 1), \quad (21)$$

其中  $K_1, K_2, K_3$  表示待设计的动态学习控制器的参数矩阵. 显然, 当式(21)中的  $K_2 = 0$  或者式(20)中的  $A_c, B_c, D_c$  为0时, 动态迭代学习控制器转化为静态迭代学习控制器, 静态迭代学习控制律仅是动态迭代学习控制方案的一种特例.

为了将动态迭代学习控制系统改写为离散线性重复过程, 定义

$$\mathbf{X}(t, k) = [\delta_k(x(t, k))^T, x_c(t, k)^T]^T, \quad (22)$$

从而得到如下的2D动态模型:

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t + 1, k) = A_1 \mathbf{X}(t, k) + B_1 e(t, k - 1), \\ e(t, k) = C_1 \mathbf{X}(t, k) + D_1 e(t, k - 1). \end{cases} \quad (23)$$

其中:  $A_1 = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ B_c & A_c \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} BK_3 \\ D_c \end{bmatrix}, C_1 = [-C - DK_1, -DK_2], D_1 = I - DK_3$ .

**定理1** 考虑相对度  $r = 0$  的线性离散系统(16), 在动态迭代学习控制律(18)和(21)的作用下, 如果存在矩阵  $\hat{S} = \text{diag}\{\hat{S}_1, \hat{S}_2\} > 0, \hat{P} = \text{diag}\{\hat{P}_1, \hat{P}_2\} > 0, \hat{Q} = \text{diag}\{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2\} > 0$ , 适维可逆矩阵  $\hat{W} = \text{diag}\{\hat{W}_1, \hat{W}_2\}$ , 以及矩阵  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_{A_c}, Y_{B_c}, Y_{D_c}$ , 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$H_{11} = \begin{bmatrix} \hat{S}_1 - \text{sym}(\hat{W}_1) & 0 & A\hat{W}_1 + BY_1 & BY_2 \\ * & \hat{S}_2 - \text{sym}(\hat{W}_2) & Y_{B_c} & Y_{A_c} \\ * & * & -\hat{S}_1 & 0 \\ * & * & * & -\hat{S}_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

$$H_{12} = \begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{11} & 0 & \hat{\Xi}_{21} - \hat{W}_1^T \\ * & \hat{\Xi}_{12} & 0 \\ * & * & \hat{\Xi}_{31} + \text{sym}(A\hat{W}_1 + BY_1) \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hat{\Xi}_{22} - \hat{W}_2^T & 0 & 0 \\ BY_2 + Y_{B_c}^T & BY_3 & (-C\hat{W}_1 - DY_1)^T \\ \hat{\Xi}_{32} + \text{sym}(Y_{A_c}) & Y_{D_c} & (-DY_2)^T \\ * & -I & (I - DY_3)^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

则在有限特定频域范围  $\theta \in \Theta$  内, 动态迭代学习控制下的系统在时间轴和批次轴上均稳定, 且控制系统的实际输出渐近跟踪上期望轨迹. 为了简化分析过程, 假设  $\hat{\Xi}_1 = \text{diag}\{\hat{\Xi}_{11}, \hat{\Xi}_{12}\}, \hat{\Xi}_2 = \text{diag}\{\hat{\Xi}_{21}, \hat{\Xi}_{22}\}, \hat{\Xi}_3 = \text{diag}\{\hat{\Xi}_{31}, \hat{\Xi}_{32}\}$ , 进而可得迭代学习控制律的增益矩阵为

$$\begin{cases} A_c = Y_{A_c} \hat{W}_2^{-1}, B_c = Y_{B_c} \hat{W}_1^{-1}, D_c = Y_{D_c}; \\ K_1 = Y_1 \hat{W}_1^{-1}, K_2 = Y_2 \hat{W}_2^{-1}, K_3 = Y_3. \end{cases} \quad (26)$$

**证明** 如果式(25)成立, 则不等式

$$\begin{bmatrix} -I & D_1^T \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

也成立, 从而可得  $\rho(D_1) < 1$ , 满足引理4的条件1).

在有限特定频域  $\theta \in \Theta$  内, 为了使迭代学习控制系统的传递函数的频率响应矩阵  $G(e^{j\theta})$  满足引理4的条件3), 不等式(13)必须成立. 根据引理5可得, 存在对称矩阵  $P = \text{diag}\{P_1, P_2\} > 0$ , 以及适维矩阵  $Q = \text{diag}\{Q_1, Q_2\} > 0$ , 且下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & D_1 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C_1 & D_1 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0. \quad (28)$$

式(28)可改写为

$$(A_1^\perp)^T \Psi_1 A_1^\perp < 0. \quad (29)$$

其中

$$A_1^\perp = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Psi_1 = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & 0 \\ * & \Xi_3 + C_1^T C_1 & C_1^T D_1 \\ * & * & -I + D_1^T D_1 \end{bmatrix}.$$

根据引理1, 令  $A_1 = [-I, A_1, B_1], \Sigma_1 = [0, I, 0]$ , 求得  $(\Sigma_1^\perp)^T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ , 则有

$$(\Sigma_1^\perp)^T \Psi_1 \Sigma_1^\perp = \begin{bmatrix} \Xi_1 & 0 \\ * & D_1^T D_1 - I \end{bmatrix}. \quad (30)$$

因为  $\Xi_1 = -P < 0$ , 由式(27)可知  $D_1^T D_1 - I < 0$  成立, 所以  $(\Sigma_1^\perp)^T \Psi_1 \Sigma_1^\perp < 0$  显然成立.

当式(29)与(30)同时成立时, 根据引理1可得, 存在可逆矩阵  $W = \text{diag}\{W_1, W_2\}$  满足以下矩阵不等式:

$$\Psi_1 + \text{sym}\{A_1^T W \Sigma_1\} < 0. \quad (31)$$

对式(31)利用引理2, 则有

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 - W & 0 & 0 \\ * & \Xi_3 + \text{sym}(A_1^T W) & W^T B_1 & C_1^T \\ * & * & -I & D_1^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (32)$$

设  $\hat{W} = W^{-1}$ , 将不等式(32)分别左乘和右乘  $\text{diag}\{\hat{W}^T, \hat{W}^T, I, I\}$  及其转置, 使得下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_1 & \hat{\Xi}_2 - \hat{W}^T & 0 & 0 \\ * & \hat{\Xi}_3 + \text{sym}(A_1 \hat{W}) & B_1 & (C_1 \hat{W})^T \\ * & * & -I & D_1^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\Xi}_1 &= \hat{W}^T \Xi_1 \hat{W}, \quad \hat{\Xi}_2 = \hat{W}^T \Xi_2 \hat{W}, \quad \hat{\Xi}_3 = \hat{W}^T \Xi_3 \hat{W}; \\ \hat{P}_1 &= \hat{W}^T P_1 \hat{W}, \quad \hat{P}_2 = \hat{W}^T P_2 \hat{W}; \\ \hat{Q}_1 &= \hat{W}^T Q_1 \hat{W}, \quad \hat{Q}_2 = \hat{W}^T Q_2 \hat{W}. \end{aligned}$$

即可得不等式(25)的  $H_{12} < 0$ , 从而满足引理4的条件3).

对不等式(24)中的  $H_{11} < 0$  分别左乘和右乘  $\text{diag}\{W^T, W^T\}$  及其转置, 则有下列不等式成立:

$$\begin{bmatrix} S & 0 \\ * & -S \end{bmatrix} + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} -I \\ A_1^T \end{bmatrix} W [I, 0] \right\} < 0. \quad (34)$$

其中

$$S = \text{diag}\{S_1, S_2\}, \quad S_1 = W^T \hat{S}_1 W, \quad S_2 = W^T \hat{S}_2 W.$$

为了利用引理1, 令  $\Psi_2 = \begin{bmatrix} S & 0 \\ * & -S \end{bmatrix}$ ,  $\Sigma_2 = [I, 0]$ ,  $A_2 = [-I, A_1]$ , 可求得  $(\Sigma_2^\perp)^T = [0, I]$ ,  $(A_2^\perp)^T = [A_1^T, I]$ ,  $S > 0$ , 从而可得

$$(\Sigma_2^\perp)^T \Psi_2 \Sigma_2^\perp = -S < 0, \quad (35)$$

$$(A_2^\perp)^T \Psi_2 A_2^\perp = A_1^T S A_1 - S < 0. \quad (36)$$

不等式(36)的成立保证了  $\rho(A_1) < 1$  的成立, 即满足引理4的条件2).  $\square$

更进一步地, 在定理1的基础上考虑线性重复过程(16)含有范数不确定性

$$\begin{cases} \hat{A} = A + \Delta A, \quad \hat{B} = B + \Delta B; \\ \hat{C} = C + \Delta C, \quad \hat{D} = D + \Delta D. \end{cases} \quad (37)$$

其中:  $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$  表示可允许的范数有界不确定性, 满足

$$\begin{cases} \Delta A = E_1 \Omega F_1, \quad \Delta B = E_1 \Omega F_2; \\ \Delta C = E_2 \Omega F_1, \quad \Delta D = E_2 \Omega F_2. \end{cases} \quad (38)$$

其中:  $E_1, E_2, F_1, F_2$  表示已知的适维常矩阵;  $\Omega$  表示不确定性扰动, 且满足

$$\Omega^T \Omega \leq I. \quad (39)$$

**推论1** 考虑相对度  $r = 0$  的动态迭代学习控制系统(16)、(18)和(21), 假设系统的模型矩阵具有不确定性(38)和(39), 如果存在矩阵  $\hat{S} = \text{diag}\{\hat{S}_1, \hat{S}_2\} > 0$ ,  $\hat{P} = \text{diag}\{\hat{P}_1, \hat{P}_2\} > 0$ ,  $\hat{Q} = \text{diag}\{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2\} > 0$ , 适维可逆矩阵  $\hat{W} = \text{diag}\{\hat{W}_1, \hat{W}_2\}$ , 以及矩阵  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_{A_c}, Y_{B_c}, Y_{D_c}$ , 标量  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ , 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$H'_{11} = \begin{bmatrix} H_{11} & \lambda_1 X_1 & N_1^T \\ * & -\lambda_1 I & 0 \\ * & * & -\lambda_1 I \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

$$H'_{12} = \begin{bmatrix} H_{12} & \lambda_2 X_2 & N_2^T \\ * & -\lambda_2 I & 0 \\ * & * & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (41)$$

其中:  $H_{11}$  和  $H_{12}$  如定理1, 且有

$$X_1 = [E_1^T, 0, 0, 0]^T, \quad X_2 = [0, 0, E_1^T, 0, 0, -E_2^T]^T;$$

$$N_1 = [0, 0, F_1 \hat{W}_1 + F_2 Y_1, F_2 Y_2],$$

$$N_2 = [0, 0, F_1 \hat{W}_1 + F_2 Y_1, F_2 Y_2, F_2 Y_3, 0].$$

则在有限特定频域范围  $\theta \in \Theta$  内, 动态迭代学习控制下的不确定性系统在时间轴和批次轴上均稳定, 且控制系统的实际输出渐近跟踪上期望轨迹, 迭代学习控制器参数为

$$\begin{cases} A_c = Y_{A_c} \hat{W}_2^{-1}, \quad B_c = Y_{B_c} \hat{W}_1^{-1}, \quad D_c = Y_{D_c}; \\ K_1 = Y_1 \hat{W}_1^{-1}, \quad K_2 = Y_2 \hat{W}_2^{-1}, \quad K_3 = Y_3. \end{cases} \quad (42)$$

**证明** 首先证明不等式(40)的  $H'_{11} < 0$  成立, 不等式  $H'_{12} < 0$  可用相同的方法证得. 在定理1的基础上加入不确定性后可得

$$H'_{11} = H_{11} + \text{sym}\{X_1 \Omega N_1\} < 0. \quad (43)$$

由引理3可知, 当且仅当存在标量  $\lambda_1 > 0$  时, 下

列不等式成立:

$$H_{11} + \lambda_1 X_1 X_1^T + \lambda_1^{-1} N_1^T N_1 < 0. \quad (44)$$

应用引理2,不等式(44)可写成

$$\begin{bmatrix} H_{11} & [\lambda_1^{1/2} X_1, \lambda_1^{-1/2} N_1^T] \\ * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (45)$$

最后,对不等式(45)分别左乘、右乘对角矩阵  $\text{diag}\{I, I, I, I, \lambda_1^{1/2} I, \lambda_1^{-1/2} I\}$ ,即可证明不等式(40)中的  $H_{11} < 0$ .  $\square$

### 2.2 高阶相对度 ( $r \geq 1$ ) 系统的稳定性分析

考虑系统(16)具有高阶相对度  $r \geq 1$ ,即系统模型满足  $D = 0, CA^{r-1}B \neq 0, CA^i B = 0 (i = 0, 1, \dots, r - 2)$ . 为了补偿高阶相对度,设计的动态迭代学习控制器的状态方程和迭代学习更新律分别为

$$x_c(t + 1, k) = A_c x_c(t, k) + B_c \delta_k(x(t, k)) + D_c e(t + r, k - 1), \quad (46)$$

$$\Delta u(t, k) = K_1 \delta_k(x(t, k)) + K_2 x_c(t, k) + K_3 e(t + r, k - 1). \quad (47)$$

则

$$\delta_k(x(t + 1, k)) = (A + BK_1) \delta_k(x(t, k)) + BK_2 x_c(t, k) + BK_3 e(t + r, k - 1), \quad (48)$$

$$\begin{aligned} e(t + r, k) &= e(t + r, k - 1) - C \delta_k(x(t + r, k)) = \\ &= e(t + r, k - 1) - C(A + BK_1) \delta_k(x(t + r - 1, k)) - \\ &= CBK_2 x_c(t + r - 1, k) - \\ &= CBK_3 e(t + 2r - 1, k - 1) = \\ &= e(t + r, k - 1) - C(A + BK_1) \delta_k(x(t + r - 1, k)) = \\ &= e(t + r, k - 1) - CA[(A + BK_1) \delta_k(x(t + r - 2, k)) + \\ &= BK_2 x_c(t + r - 2, k) + BK_3 e(t + 2r - 2, k - 1)] = \\ &= e(t + r, k - 1) - CA^2 \delta_k(x(t + r - 2, k)) = \dots = \\ &= e(t + r, k - 1) - CA^{r-1} \delta_k(x(t + 1, k)) = \\ &= -CA^{r-1}(A + BK_1) \delta_k(x(t, k)) - \\ &= CA^{r-1} BK_2 x_c(t, k) + \\ &= (I - CA^{r-1} BK_3) e(t + r, k - 1). \end{aligned} \quad (49)$$

相应的2D动态模型为

$$\begin{cases} X(t + 1, k) = A_2 X(t, k) + B_2 e(t + r, k - 1), \\ e(t + r, k) = C_2 X(t, k) + D_2 e(t + r, k - 1). \end{cases} \quad (50)$$

其中

$$X(t, k) = \begin{bmatrix} \delta_k(x(t, k)) \\ x_c(t, k) \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ B_c & A_c \end{bmatrix},$$

$$B_2 = [(BK_3)^T, D_c^T]^T, D_2 = I - CA^{r-1} BK_3,$$

$$C_2 = [-CA^{r-1}(A + BK_1) - CA^{r-1} BK_2].$$

**定理2** 考虑相对度  $r \geq 1$  的线性离散系统(16),在动态迭代学习控制律(18)和(47)的作用下,如果存在矩阵  $\hat{S} = \text{diag}\{\hat{S}_1, \hat{S}_2\} > 0, \hat{P} = \text{diag}\{\hat{P}_1, \hat{P}_2\} > 0, \hat{Q} = \text{diag}\{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2\} > 0$ , 适维可逆矩阵  $\hat{W} = \text{diag}\{\hat{W}_1, \hat{W}_2\}$ , 以及矩阵  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_{A_c}, Y_{B_c}, Y_{D_c}$ , 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$H_{21}^{(r)} = \begin{bmatrix} \hat{S}_1 - \text{sym}(\hat{W}_1) & 0 & A\hat{W}_1 + BY_1 & BY_2 \\ * & \hat{S}_2 - \text{sym}(\hat{W}_2) & Y_{B_c} & Y_{A_c} \\ * & * & -\hat{S}_1 & 0 \\ * & * & * & -\hat{S}_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (51)$$

$$H_{22}^{(r)} = \begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{11} & 0 & \hat{\Xi}_{21} - \hat{W}_1^T & 0 \\ * & \hat{\Xi}_{12} & 0 & \hat{\Xi}_{22} - \hat{W}_2^T \\ * & * & \hat{\Xi}_{31} + \text{sym}(A\hat{W}_1 + BY_1) & BY_2 + Y_{B_c}^T \\ * & * & * & \hat{\Xi}_{32} + \text{sym}(Y_{A_c}) \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \leftarrow BY_3 & (-CA^r \hat{W}_1 - CA^{r-1} BY_1)^T & & \\ Y_{D_c} & (-CA^{r-1} BY_2)^T & & \\ -I & (I - CA^{r-1} BY_3)^T & & \\ * & -I & & \end{bmatrix} < 0. \quad (52)$$

其中:  $\hat{\Xi}_1 = \text{diag}\{\hat{\Xi}_{11}, \hat{\Xi}_{12}\}, \hat{\Xi}_2 = \text{diag}\{\hat{\Xi}_{21}, \hat{\Xi}_{22}\}, \hat{\Xi}_3 = \text{diag}\{\hat{\Xi}_{31}, \hat{\Xi}_{32}\}$ . 则在有限特定频域范围  $\theta \in \Theta$  内,动态迭代学习控制下的系统在时间轴和批次轴上均稳定,且控制系统的实际输出渐近跟踪上期望轨迹,进而可得系统的控制器矩阵为

$$\begin{cases} A_c = Y_{A_c} \hat{W}_2^{-1}, B_c = Y_{B_c} \hat{W}_1^{-1}, D_c = Y_{D_c}; \\ K_1 = Y_1 \hat{W}_1^{-1}, K_2 = Y_2 \hat{W}_2^{-1}, K_3 = Y_3. \end{cases} \quad (53)$$

证明过程同定理1,此处略.

由于在2D动态模型(50)中,矩阵  $C_2$  和  $D_2$  含有乘积项  $CA^r B$  和  $CA^{r-1} B$ , 矩阵  $A, B, C$  上不能同时含有不确定性,定理2不能像定理1那样具有推论1. 然而,对于相对度  $r = 1$  这种特殊情况,可以考虑

系统的范数不确定性情形.

考虑相对度  $r = 1$  的系统具有如下的不确定性:

$$\tilde{A} = A + \Delta A, \tilde{B} = B + \Delta B. \quad (54)$$

其中:  $\Delta A, \Delta B$  表示可允许的范数有界不确定性, 满足

$$\Delta A = E_3 \Omega F_3, \Delta B = E_3 \Omega F_4. \quad (55)$$

这里:  $E_3, F_3, F_4$  表示已知的适维常矩阵;  $\Omega$  表示不确定性扰动, 且满足

$$\Omega^T \Omega \leq I. \quad (56)$$

**推论2** 考虑相对度  $r = 1$  的动态迭代学习控制系统(16)、(18)和(47), 假设系统的模型矩阵具有不确定性(55)和(56), 如果存在矩阵  $\hat{S} = \text{diag}\{\hat{S}_1, \hat{S}_2\} > 0, \hat{P} = \text{diag}\{\hat{P}_1, \hat{P}_2\} > 0, \hat{Q} = \text{diag}\{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2\} > 0,$  适维可逆矩阵  $\hat{W} = \text{diag}\{\hat{W}_1, \hat{W}_2\}$ , 以及矩阵  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_{A_c}, Y_{B_c}, Y_{D_c}$ , 标量  $\lambda_3 > 0, \lambda_4 > 0$ , 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\mathbf{H}'_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{21}^{(1)} & \lambda_3 X_3 & N_3^T \\ * & -\lambda_3 I & 0 \\ * & * & -\lambda_3 I \end{bmatrix} < 0, \quad (57)$$

$$\mathbf{H}'_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{22}^{(1)} & \lambda_4 X_4 & N_4^T \\ * & -\lambda_4 I & 0 \\ * & * & -\lambda_4 I \end{bmatrix} < 0. \quad (58)$$

其中:  $\mathbf{H}_{21}^{(1)}$  和  $\mathbf{H}_{22}^{(1)}$  如定理2中相对度  $r = 1$  时的矩阵, 且

$$X_3 = [E_3^T, 0, 0, 0]^T,$$

$$X_4 = [0, 0, E_3^T, 0, 0, -(CE_3)^T]^T,$$

$$N_3 = [0, 0, F_3 \hat{W}_1 + F_4 Y_1, F_4 Y_2],$$

$$N_4 = [0, 0, F_3 \hat{W}_1 + F_4 Y_1, F_4 Y_2, F_4 Y_3, 0].$$

则在有限特定频域范围  $\theta \in \Theta$  内, 动态迭代学习控制下的不确定性系统在时间轴和批次轴上均稳定, 且控制系统的实际输出渐近跟踪期望轨迹, 迭代学习控制律的增益矩阵为

$$\begin{cases} A_c = Y_{A_c} \hat{W}_2^{-1}, B_c = Y_{B_c} \hat{W}_1^{-1}, D_c = Y_{D_c}; \\ K_1 = Y_1 \hat{W}_1^{-1}, K_2 = Y_2 \hat{W}_2^{-1}, K_3 = Y_3. \end{cases} \quad (59)$$

证明过程同推论1, 此略.

### 3 仿真结果

为验证本文所提动态迭代学习控制算法的性能, 分别对系统的不同相对度情形进行讨论. 为评价系

统跟踪性能, 引入均方根误差指标

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e^2(t, k)}. \quad (60)$$

**情况1** 考虑相对度  $r = 0$  的一个单位质量-弹簧-阻尼器组成的二阶机械位移系统, 系统的状态方程<sup>[16]</sup>如下:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t), \\ y(t) = C_p x(t) + D_p u(t). \end{cases} \quad (61)$$

系统的参数矩阵为

$$A_p = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix},$$

$$C_p = [5, 0], D_p = 1.$$

以  $T_s = 0.01$  的采样时间将系统离散化, 可得如下离散状态空间模型:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9808 & 0.0290 \\ 0.0386 & 0.9518 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0146 \end{bmatrix},$$

$$C = [5, 0], D = 1.$$

定义系统的参考轨迹如图1(a)所示, 其频谱应用快速傅里叶变换求得, 如图1(b)所示.

从图1(a)和图1(b)可以看出, 参考轨迹的有效谐波在低频范围  $0 \sim 5$  Hz 内变化, 因此  $\theta_l = 0.3142$ .

对于相对度  $r = 0$  的动态迭代学习控制系统(16)、(18)和(21), 利用定理1中的式(24)~(26)可得

$$A_c = -0.1645, B_c = [0, 0.0015], D_c = -0.0898;$$

$$K_1 = [-5.00, -0.0245], K_2 = -0.1336,$$

$$K_3 = 0.91.$$

图1(c)为跟踪误差随着迭代时间和批次的变化曲线, 表明相对度  $r = 0$  的动态迭代学习控制系统在时间和迭代批次方向上的控制性能.

为比较静态与动态迭代学习控制方案的效果, 在相同条件下, 设计相应的静态迭代学习控制律

$$u(t, k) = u(t, k - 1) + L_1 \delta_k(x(t, k)) + L_2 e(t, k - 1), \quad (62)$$

可求得静态迭代学习控制律的参数为

$$L_1 = [-5.00, 0], L_2 = 0.5395.$$

在图1(d)中给出了两种控制律作用下系统的均方根跟踪误差随迭代次数的变化曲线, 从图1(d)中可以看出, 对于相对度  $r = 0$  的系统, 在动态迭代学习控制作用下系统的收敛性能更好.

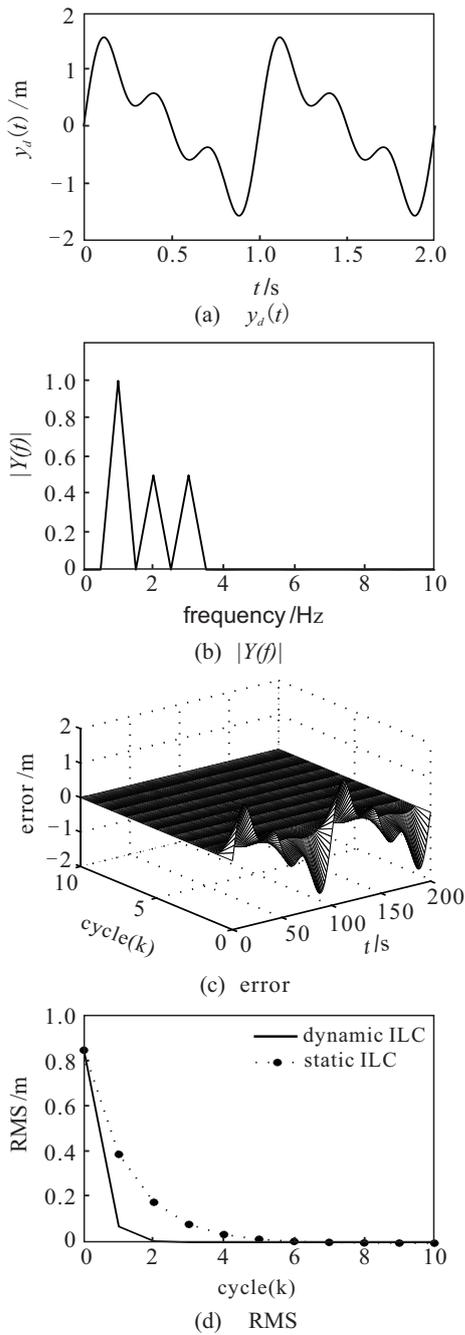


图1 相对度  $r = 0$  动态迭代学习控制系统

情况2 考虑系统的相对度  $r = 1$ , 以桁架式机器人为研究对象<sup>[8]</sup>. 桁架式机器人是一种基于空间XYZ直角坐标系的机器人, 经常用于完成重复性的搬运任务. 桁架机器人的每个轴都是正交的, 且忽略它们之间的耦合关系, 可以采用开环频率响应方法得到每个轴的传递函数.

Y轴的状态空间模型参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} -0.1067 & 0.125 & 0.0777 \\ -0.0211 & -0.1067 & 0.1016 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0286 \end{bmatrix}, C = [0.0360, 0, 0.0286], D = 0.$$

在2s内Y轴的参考轨迹如图2(a)所示, 其频谱

如图2(b)所示. 从图2(a)和图2(b)中可以看出, 参考轨迹的有效谐波在0~5Hz内变化, 为低频范围, 也可以取  $\theta_l = 0.3142$ .

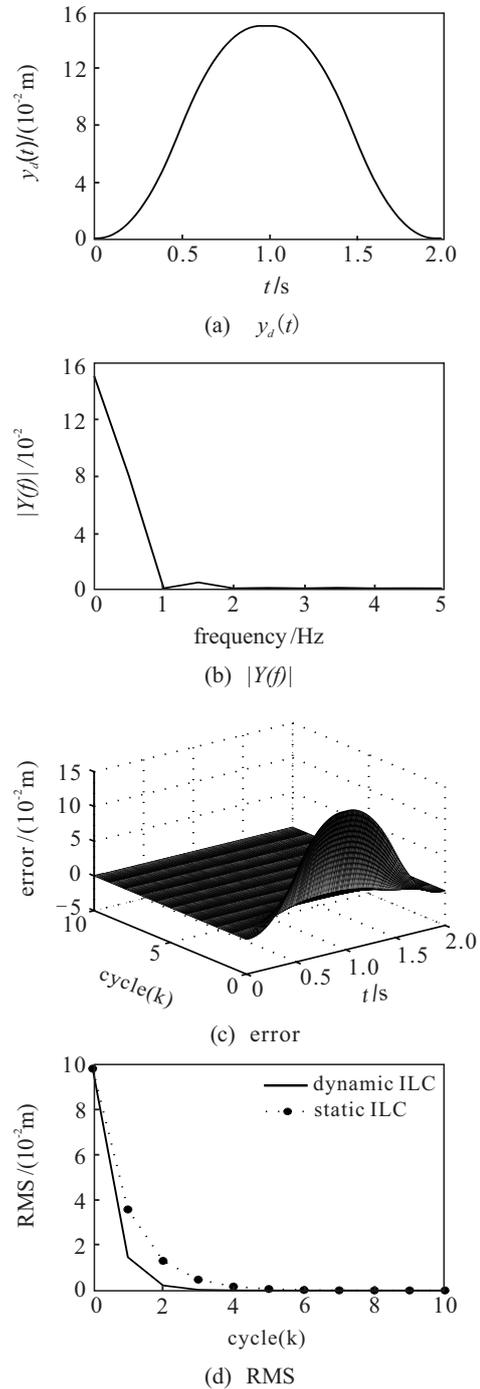


图2 相对度  $r = 1$  动态迭代学习控制系统

对于不确定性模型(55),  $E_3 = [0.2, 0, 0]^T$ ,  $F_3 = [0.5, -0.1, 0.1]$ ,  $F_4 = 0.02$ ,  $\Omega$ 在-1~1之间任意变化. 利用推论2中的式(57)~(59)可求得

$$A_c = -0.0194, B_c = [-0.0083, 0.0123, 0.2210], D_c = -3.5375; K_1 = [-8.1386, 1.1885, -23.7758], K_2 = -22.0233, K_3 = 720.6404.$$

图2(c)为跟踪误差随迭代时间和批次的变化曲

线,表明了动态迭代学习控制系统在时间方向上的稳定性以及在迭代批次方向上的收敛性和鲁棒性.

在相同条件下,考虑相应的静态迭代学习控制律为

$$u(t, k) = u(t, k - 1) + L_1 \delta_k(x(t, k)) + L_2 e(t + 1, k - 1). \quad (63)$$

同样可求得静态迭代学习控制器参数为

$$L_1 = [-8.0533, 1.7515, -23.6820], L_2 = 1062.2.$$

图2(d)是两种控制律作用下系统的均方根误差随迭代次数的变化曲线.从图2(d)中可以看出,在动态迭代学习控制作用下,相对度  $r = 1$  的系统的均方根误差能更快地收敛到0,动态迭代学习控制系统的跟踪误差单调收敛性能更好.

**情况3** 考虑高相对度情形,系统的相对度取为  $r = 2$ ,如文献[17],将桁架式机器人Z轴的传递函数离散化,仍以0.01 s为采样时间,所得的状态空间模型参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0.9941 & 0.0406 & 0.0270 & 0 \\ 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [0, 0.0467, 0.0183, 0.0044],$$

则  $CB = 0, CAB \neq 0$ .在2s内,桁架式机器人Z轴的参考轨迹如图3(a)所示,相应的频谱如图3(b)所示.

图3(a)和图3(b)表示参考轨迹的有效谐波也在低频范围0~5 Hz内变化,故而可得  $\theta_l = 0.3142$ .

对于高相对度的动态迭代学习控制系统(16)、(18)和(47),利用定理2中的LMI(51)~(53)可得

$$A_c = -0.1897,$$

$$B_c = [0.3751, 0.0129, 0.0017, -0.0022],$$

$$D_c = -29.4561,$$

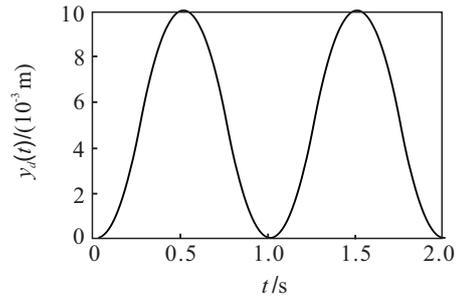
$$K_1 = [-18.3582, -1.3043, -0.4378, 0.0210],$$

$$K_2 = -16.9246, K_3 = 2400.4.$$

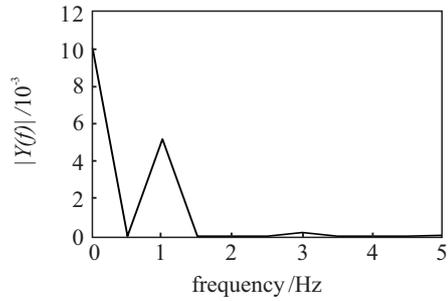
图3(c)为跟踪误差随着迭代时间和批次的变化曲线,表明高相对度的动态迭代学习控制系统在时间方向上的稳定性,以及迭代批次方向上的收敛性.

在相同条件下,设计如下的静态迭代学习控制律,进一步探究高相对度动态迭代学习控制的优点:

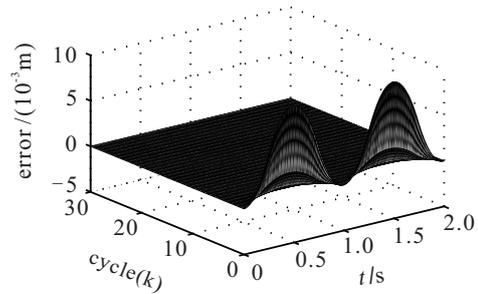
$$u(t, k) = u(t, k - 1) + L_1 \delta_k(x(t, k)) + L_2 e(t + 2, k - 1). \quad (64)$$



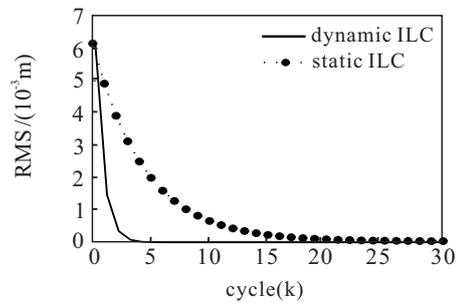
(a)  $y_d(t)$



(b)  $|Y(f)|$



(c) error



(d) RMS

图3 相对度  $r = 2$  动态迭代学习控制系统

可求得静态迭代学习控制器参数为

$$L_1 = [-16.8709, -1.2266, -0.4608, -0.0101],$$

$$L_2 = 4751.4.$$

从图3(d)中可以看出,对于高相对度系统,其均方根误差在动态迭代学习控制作用下也能很快收敛到0,动态迭代学习控制器相较于静态迭代学习控制同样具有很好的收敛性.

## 4 结论

对于不同相对度的离散线性系统,本文研究了有限频域下的动态迭代学习控制问题.分别针对零相

对度( $r = 0$ )和高相对度( $r \geq 1$ )两种情形,结合2D系统理论,设计有限频域范围的动态迭代学习控制器,运用广义KYP引理,以LMI的形式给出了控制器存在的充分条件以及控制器的增益矩阵,同时该条件保证了系统动态性能。最后,在弹簧阻尼系统和桁架机器人模型的仿真中,与静态迭代学习控制算法进行了比较,验证了本文算法的优越性。

#### 参考文献(References)

- [1] Bristow D A, Tharayi M, Alleyne A G. A survey of iterative learning control a learning-based method for high-performance tracking control[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2006, 26(3): 96-114.
- [2] Shi J, Gao F R, Wu T J. Robust iterative learning control design for batch processes with uncertain perturbations and initialization[J]. AIChE Journal, 2006, 52(6): 2171-2187.
- [3] Wang L M, Chen X, Gao F R. An LMI method to robust iterative learning fault-tolerant guaranteed cost control for batch processes[J]. Chinese Journal of Chemical Engineering, 2013, 21(4): 401-411.
- [4] Wang X, Chu B, Rogers E. Higher-order iterative learning control law design using linear repetitive process theory: Convergence and robustness[J]. IFAC-Papers on Line, 2017, 50(1): 3123-3128.
- [5] Ding J, Cichy B, Galkowski K, et al. Robust fault-tolerant iterative learning control for discrete systems via linear repetitive processes theory[J]. International Journal of Automation and Computing, 2015, 12(3): 254-265.
- [6] Tao H F, Paszke W, Yang H Z, et al. Finite frequency range robust iterative learning control of linear discrete system with multiple time-delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(5): 2690-2708.
- [7] 李贤伟, 高会军. 有限频域分析与设计的广义 KYP 引理方法综述[J]. 自动化学报, 2016, 42(11): 1605-1619. (Li X W, Gao H J. An overview of generalized KYP lemma based methods for finite frequency analysis and design[J]. Acta Automatica Sinica, 2016, 42(11): 1605-1619.)
- [8] Paszke W, Rogers E, Gakowski K, et al. Robust finite frequency range iterative learning control design and experimental verification[J]. Control Engineering Practice, 2013, 21(10): 1310-1320.
- [9] Paszke W, Rogers E, Gakowski K, et al. Experimentally verified generalized KYP Lemma based iterative learning control design[J]. Control Engineering Practice, 2016, 53: 57-67.
- [10] Gahinet P, Apkarian P. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1994, 4(4): 421-448.
- [11] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994: 23-24.
- [12] Xie L H. Output feedback  $H_\infty$  control of systems with parameter uncertainty[J]. International Journal of Control, 1996, 63(4): 741-750.
- [13] Iwasaki T, Hara S. Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(5/6): 415-434.
- [14] Rogers E, Gakowski K, Owens D H. Control systems theory and applications for linear repetitive processes[M]. Berlin: Springer Heidelberg, 2001: 141-175.
- [15] Meng D Y, Jia Y M, Du J P, et al. Data-driven control for relative degree systems via iterative learning[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(12): 2213-2225.
- [16] 吴敏, 周兰, 余锦华, 等. 基于二维混合模型和状态观测器的重复控制设计[J]. 自动化学报, 2009, 35(7): 945-952. (Wu M, Zhou L, She J H, et al. Repetitive control design based on two-dimensional hybrid model and state observer[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(7): 945-952.)
- [17] Paszke W, Rogers E, Galkowski K. Design of iterative learning control schemes for systems with zero Markov parameters[C]. IEEE 54th Annual Conference on Decision and Control. Osaka: IEEE, 2015: 6083-6088.

#### 作者简介

汪磊(1989—), 男, 博士生, 从事迭代学习控制理论应用的研究, E-mail: leiwang112@126.com;

杨慧中(1955—), 女, 教授, 博士生导师, 从事过程控制理论及应用等研究, E-mail: yhz@jiangnan.edu.cn;

陶洪峰(1979—), 男, 教授, 博士, 从事故障检测与容错控制等研究, E-mail: taohongfeng@hotmail.com.

(责任编辑: 闫妍)