

控制与决策

Control and Decision

考虑主体心理行为的三边单向非循环稳定匹配

杨洋, 赵晓冬

引用本文:

杨洋, 赵晓冬. 考虑主体心理行为的三边单向非循环稳定匹配[J]. *控制与决策*, 2021, 36(3): 741–746.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1047>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于模型依赖驻留时间的异步切换控制

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time
控制与决策. 2021, 36(3): 609–618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

考虑附加情绪的两阶段投资组合前景决策模型

Two-stage portfolio prospect decision model considering additional emotion
控制与决策. 2021, 36(3): 724–732 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0565>

基于动态行为选择的和声搜索算法

Harmony search algorithm based on dynamic behavior selection
控制与决策. 2021, 36(3): 577–588 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0597>

考虑时间序列的动态大群体应急决策方法

Dynamic large group emergency decision-making method considering time series
控制与决策. 2020, 35(11): 2609–2618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0088>

基于图像和高程数据的天际线定位匹配

Skyline position matching based on image and elevation data
控制与决策. 2020, 35(11): 2665–2674 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0155>

考虑主体心理行为的三边单向非循环稳定匹配

杨 洋^{1,2†}, 赵晓冬¹

(1. 燕山大学 经济管理学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 燕山大学 里仁学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 针对单向非循环偏好下的三边匹配问题, 考虑主体的心理行为特征, 提出一种三边单向非循环偏好序下的稳定匹配算法. 首先, 基于三边主体间单向非循环的偏好结构关系, 给出三边单向非循环匹配及其稳定性的定义, 构建基于最大基数和稳定匹配的数学模型; 然后, 考虑主体不完全接受性和有限妥协性的心理特征, 提出有限妥协条件下的搜索优选稳定算法, 并分别对算法的时间复杂度和输出方案的稳定性进行计算和证明; 最后, 通过一个实际应用算例验证所提出算法的可行性和有效性.

关键词: 三边匹配; 单向非循环偏好; 偏好序; 稳定性; 时间复杂度; 心理行为

中图分类号: C934

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.1047

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 杨洋, 赵晓冬. 考虑主体心理行为的三边单向非循环稳定匹配[J]. 控制与决策, 2021, 36(3): 741-746.

Three-sided stable matching with one-way acyclic preference considering agent's psychological behavior

YANG Yang^{1,2†}, ZHAO Xiao-dong¹

(1. College of Economics and Management, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China; 2. Liren College, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: Considering agent's psychological behavior, a stable matching algorithm based on trilateral one-way non-cyclic preference order is proposed for the three-sided matching problem with one-way acyclic preference. Firstly, based on the one-way acyclic preference structure, the definition of three-sided matching with one-way acyclic preference and its stability are given, and the mathematical model based on the maximum cardinality and stable matching is established. Then, a search-optimization algorithm based on limited compromise is proposed, and the time complexity of the algorithm and the stability of the output scheme are calculated and proved respectively. Finally, an example is given to verify the feasibility and effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: three-sided matching; one-way acyclic preference; preference order; stability; time complexity; psychological behavior

0 引言

匹配是指决策者依据主体或代理人提供的相互间偏好信息, 为互不相交的各方主体寻求最优联盟的一种市场机制设计过程. 起初, Gale 等^[1]为解决大学录取和男女婚姻问题, 提出了针对两方主体间匹配的 G-S 算法. 随后, Roth^[2]明确地给出了“双边匹配”的概念, 并将其拓展应用于双边市场的机制设计.

现今, 匹配理论已广泛应用于人力资源管理^[3-4]、电子商务^[5-6]、风险投资^[7-8]等多个领域, 并伴随当今市场环境的复杂变化, 应对着不断涌现的新问题和新需求. 樊治平等^[9]结合风险投资领域中的对主体

满意度的新需求, 从双边主体的满意度和最低可接受满意度视角, 构建并求解了多目标双边匹配优化模型. 姜艳萍等^[10]针对人岗双边匹配问题中同时存在岗位占有者和外部申请者的新问题, 在考虑双方匹配主体稳定性的基础上, 设计了岗位存在占有者的改进的公平选择 I-ES 算法. 乐琦^[11]将直觉模糊集理论应用于双边匹配决策领域中, 结合技术供需匹配中存在的不确定偏好, 从主体匹配意愿的视角研究双边匹配决策. Wu 等^[12]针对中国大学录取机制的优选需求, 结合中国一流大学的录取数据进行实证研究, 比较了不同偏好志愿提交时间和不同匹配程序下的录取匹

收稿日期: 2019-07-22; 修回日期: 2019-09-02.

基金项目: 国家自然科学基金青年基金项目(61403335); 教育部人文社会科学青年基金项目(19YJCZH234); 河北省社会科学基金年度项目(HB19GL009); 河北省自然科学基金项目(F2018203370).

责任编辑: 李登峰.

†通讯作者. E-mail: yangyang@ysu.edu.cn.

配机制. 李建荣^[13]从大学录取机制的公平性需求视角出发,利用匹配博弈理论和方法,研究了中国高考招生市场的算法设计及公平激励机制.

随着社会分工的不断细化,社会主体间的合作关系也呈现复杂化和多样化,诸多行业及学科领域中对于三维主体间匹配需求不断涌现. 例如,经济市场中的供应商、企业与采购员的匹配问题^[14],器官移植领域中的三方肾移植匹配^[15],计算机网络领域中服务器、传感器与用户之间的匹配问题^[16]等. 因此,基于匹配决策理论的三维拓展与应用需求,对于三边匹配问题的研究近年来也越来越受到关注. 三边匹配问题最早由Knuth^[17]提出,假设存在三组主体,不妨设为男人、女人和狗,每个主体都会对另外两组中结成的配对作出偏好,最终以三元组(男人,女人,狗)的形式,匹配成一个家庭组,各个家庭的成员之间不共享. 如果不存在阻塞家庭,即所有成员在现有匹配方案下,不存在偏好更优的家庭组,则称该匹配方案是稳定的.

围绕着稳定性的研究,Alkan^[18]首先给出了一个不存在稳定匹配的实例. Ng等^[19]证明了确定三边匹配问题是否存在稳定匹配是NP完全的,并通过对三边偏好关系进行限制,提出了循环偏好下的三边稳定匹配问题. 在循环偏好情形下,任两边主体间只存在单向偏好,并且三边偏好方向构成了一个循环. 例如,男人只关心女人,女人只关心狗,狗只关心男人,从而构成了循环偏好关系. 此后,围绕着循环偏好, Boros等^[20]研究了循环偏好下稳定匹配的存在性问题,证明了当各边主体的数目 $n \leq 3$ 时,一定存在稳定匹配. Eriksson等^[21]证明了 $n = 4$ 时也存在稳定匹配. Biró等^[15]研究了不完全偏好信息下的三边循环稳定匹配问题,给出了 $n = 6$ 情形下不存在稳定匹配的实例. Huang^[22]进一步研究了非独立情形下的循环稳定匹配问题,给出了不同类型的稳定性定义,并应用于解决三方肾移植问题. Cui等^[16]基于服务器、传感器及用户的匹配需求,建立了基于容量和循环偏好的三边匹配模型,给出了约束条件下的稳定匹配算法. 另一方面,对于非循环偏好情形下的研究, Zhong等^[23]基于外科医生、麻醉师及手术护士三方之间的合作关系,建立了合作偏好下的三边匹配模型,证明了稳定匹配的存在性,并提出稳定匹配算法. 张峰等^[24]对具有独立偏好关系的三方匹配问题进行了研究,给出了求解稳定匹配的算法.

上述文献为解决三边匹配问题提供了理论基础和方法支撑. 需要指出的是: 1) 现实中三边主体间的偏好关系存在复杂性和多样性,有必要探究各种偏好

情形下的匹配问题. 以往研究更多地将视角放在循环偏好的情形,对于非循环偏好情形的研究较为少见. 2) 经典匹配理论中主体在满足偏好序和稳定性的需求条件下,对匹配方案给出的匹配对象通常是完全接受的. 然而,实践中主体对匹配对象往往是不完全接受的,为寻求满意的匹配对象也仅允许进行有限妥协. 鉴于此,本文针对单向非循环偏好下的三边匹配问题,基于最大匹配和稳定性的要求,从不完全接受及有限妥协的主体心理特征视角,提出一种有限妥协条件下的搜索优选算法,并对算法的时间复杂度和稳定性分别进行计算和证明.

1 三边单向非循环偏好下的匹配问题

1.1 系统描述及相关定义

设两两互不相交的非空有限集 A 、 B 、 C 分别表示匹配系统中三边主体构成的集合,其中 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{|A|}\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{|B|}\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{|C|}\}$, $|A|$ 、 $|B|$ 、 $|C|$ 分别表示 A 、 B 、 C 中主体的数量. 设 a_i 表示 A 中第 i 个主体, b_j 表示 B 中第 j 个主体, c_k 表示 C 中第 k 个主体. 其中: $i = 1, 2, \dots, |A|$, $j = 1, 2, \dots, |B|$, $k = 1, 2, \dots, |C|$.

定义1 若匹配系统中任意两边主体间都只存在单向偏好,则称之为单向匹配;在三边单向匹配中,若三边主体间的偏好构成循环关系,则称之为三边循环匹配,如图1(a)所示,其中箭头代表偏好方向;反之,则称之为三边单向非循环匹配,如图1(b)所示.

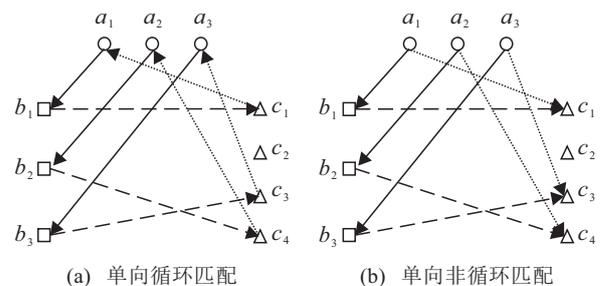


图1 三边单向循环匹配与非循环匹配示例

考虑到个体偏好的差异性,系统中每一个主体未必对其他边集合中的全部主体感兴趣,即不满足匹配意愿上的完全接受性,只愿意接受部分感兴趣的主体作为最终的匹配对象,并且对这部分可接受的主体也存在偏好差异. 因此,在系统匹配之前,每一个主体 x 只对其偏好方向 τ 所指向边中的可接受主体给出严格偏好序集,记作 $P_\tau(x)$, $P_\tau(x)$ 中的主体按偏好递减顺序排列. 对于任意 $x_1, x_2 \in P_\tau(x)$,若对于 x 而言, x_1 排在 x_2 之前,则记作 $x_1 \succ_x x_2$;若相对于不被匹配, x 宁愿选择 x' ,则记作 $x' \succ_x \emptyset$,也可理解为 x 只愿接受 x' 及偏好优于 x' 的主体作为匹配对象. 假设对

于 $\forall y \in P_{\vec{r}}(x)$, 都有 $y \succ_x \emptyset$, 其中 $x \in A \cup B \cup C$.

匹配系统中, 将主体有能力参与匹配的最大匹配组数称为该主体的匹配容量, 设 A 边主体 a_i 的匹配容量为 $r_i, i = 1, 2, \dots, |A|$; 设 B 边主体 b_j 的匹配容量为 $s_j, j = 1, 2, \dots, |B|$; 设 C 边主体 c_k 的匹配容量为 $t_k, k = 1, 2, \dots, |C|$.

定义2 在三边单向非循环匹配系统中, 若有序组 $(a_i, b_j, c_k) \in A \times B \times C$ 满足 $b_j \in P_{\overrightarrow{AB}}(a_i)$ 和 $c_k \in P_{\overrightarrow{AC}}(a_i) \cap P_{\overrightarrow{BC}}(b_j)$, 则称 (a_i, b_j, c_k) 为系统中的一个匹配组. 设 $T = \{(a_i, b_j, c_k) | b_j \in P_{\overrightarrow{AB}}(a_i), c_k \in P_{\overrightarrow{AC}}(a_i) \cap P_{\overrightarrow{BC}}(b_j)\}$, 则 T 为系统中所有匹配组构成的集合. 对于任意的 $M \subseteq T$, 若 M 满足 $1 \leq N(M, a_i) \leq r_i, 1 \leq N(M, b_j) \leq s_j, 1 \leq N(M, c_k) \leq t_k$, 则称 M 为系统的一个匹配, 其中 $N(M, x)$ 表示 M 中主体 x 参与的匹配组数. M 中所包含匹配组的个数称为 M 的基数, 用 $|M|$ 表示.

若对于 $\forall i, j, k$, 都有 $r_i = s_j = t_k = 1$, 即 M 中任意主体 x 都满足 $N(M, x) = 1$, 则称 M 为一对一的匹配. 本文主要研究一对一情形下三边单向非循环匹配的算法及其稳定性.

设 M 为系统中的一个匹配, 若 $(a, b, c) \in M$, 记

$$M_{\overrightarrow{AB}}(a) = b, M_{\overrightarrow{AC}}(a) = c, M_{\overrightarrow{BC}}(b) = c. \quad (1)$$

此外, 设 $M_{\vec{r}}(x) = \emptyset, x \in A \cup B \cup C$ 表示在匹配 M 中, x 与其他两边的主体未结成匹配组, 即 x 在系统中尚处于闲置状态.

下面给出一对一情形下三边单向非循环匹配的阻塞组和稳定性的定义.

定义3 对于匹配 M , 若 T 中存在 M 之外的组 (a_i, b_j, c_k) , 即 $\exists (a_i, b_j, c_k) \in T - M$ 满足下列条件:

$$\{b_j \succ_{a_i} M_{\overrightarrow{AB}}(a_i) \wedge c_k \succ_{a_i} M_{\overrightarrow{AC}}(a_i)\} \wedge \{c_k \succ_{b_j} M_{\overrightarrow{BC}}(b_j)\} \wedge \{N(M, c_k) = 0\}, \quad (2)$$

则称 (a_i, b_j, c_k) 为匹配 M 的阻塞组.

式(2)意味着每个 a_i, b_j, c_k 与 M 中当前匹配的或系统中未被匹配的个体比较, 都更偏好 M 之外的匹配组 (a_i, b_j, c_k) . 假设 $(a_i, b_j, c_k) \in T - M$, 定义阻塞组示性函数 $I(a_i, b_j, c_k)$ 为

$$I(a_i, b_j, c_k) = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j, c_k) \text{ 是 } M \text{ 的阻塞组;} \\ 0, & (a_i, b_j, c_k) \text{ 不是 } M \text{ 的阻塞组.} \end{cases} \quad (3)$$

以阻塞组为基础, 给出三边单向非循环匹配的稳定性定义.

定义4 在三边单向非循环匹配系统中, 对于匹配 $M \subseteq T$, 若 $T - M$ 中不存在 M 的阻塞组, 即 $\forall (a_i, b_j, c_k) \in T - M$, 都有 $I(a_i, b_j, c_k) = 0$, 则称 M

为一个稳定匹配.

1.2 模型建立

在系统描述及其相关定义的基础上, 提出一对一情形下基于最大基数 $|M|$ 的三边单向非循环稳定匹配问题, 其数学模型建立如下:

$$\max |M|; \quad (4)$$

$$\text{s.t. } N(M, a_i) \leq 1, \quad (5)$$

$$N(M, b_j) \leq 1, \quad (6)$$

$$N(M, c_k) \leq 1, \quad (7)$$

$$I(a_i, b_j, c_k) = 0. \quad (8)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, |A|, j = 1, 2, \dots, |B|, k = 1, 2, \dots, |C|$.

该数学模型的约束条件(5)~(7)是基于满足对各边主体一对一匹配的要求; 约束条件(8)表示匹配系统中不存在 M 的阻塞组, 确保了匹配 M 的稳定性.

目前, 国内外很多稳定匹配模型在偏好序下仍然是 NP-hard 问题^[25], 上述三边单向非循环稳定匹配模型也不例外. 但是, 对于下面给出的特定情形, 可以找到多项式时间算法, 并可证明在该算法下存在最优稳定解.

2 不完全接受和有限妥协下的稳定匹配

鉴于三边非循环偏好下, 匹配方案需满足 A 边主体对 \overrightarrow{AB} 、 \overrightarrow{AC} 两方向的偏好选择及 B 边主体对 \overrightarrow{BC} 方向的偏好选择, 即 C 边主体同时受到来自 A, B 两方主体的偏好选择, 而 A 边主体同时对 B, C 两方主体提出偏好选择要求, 这促使匹配问题成为 NP-hard 问题. 因此, 基于匹配的公平性, 又考虑到 A 边主体仅允许有限妥协, 对 A 边主体在 \overrightarrow{AC} 方向的偏好进行约束: 对于 $\forall a_i \in A$, 其在 C 边上可接受的偏好主体 $c_k \in P_{\overrightarrow{AC}}(a_i)$ 之间妥协为并列序关系.

在约束条件下, 阻塞组定义中的式(2)变为

$$\{b_j \succ_{a_i} M_{\overrightarrow{AB}}(a_i)\} \wedge \{c_k \succ_{b_j} M_{\overrightarrow{BC}}(b_j)\} \wedge \{N(M, c_k \in P_{\overrightarrow{AC}}(a_i)) = 0\}. \quad (9)$$

本文将这个约束条件下的模型称为有限妥协模型.

2.1 搜索优选算法的设计与分析

引入算法之前, 首先为有限妥协模型和其匹配 M 定义下面的集合, 此处的匹配 M 不一定稳定. 设 $R^z(M_{\vec{r}}, x), z \in \{+1, +2\}, x \in A \cup B \cup C$, 表示在 \vec{r} 方向的偏好序中, 与 M 中当前的匹配对象相比较, x 更偏好的主体构成的集合; z 表示 $R^z(M_{\vec{r}}, x)$ 中涉及偏好路径的个数. 详细的定义及说明如下:

$$R^{+1}(M_{\overrightarrow{AB}}, a_i) =$$

$$\{b_j | b_j \succ_{a_i} M_{\overrightarrow{AB}}(a_i), b_j \in P_{\overrightarrow{AB}}(a_i)\}, \quad (10)$$

$$R^{+1}(M_{\overrightarrow{BC}}, b_j) = \{c_k | c_k \succ_{b_j} M_{\overrightarrow{BC}}(b_j), c_k \in P_{\overrightarrow{BC}}(b_j)\}, \quad (11)$$

$$R^{+1}(M_{\overrightarrow{AC}}, a_i) = \{c_k | c_k \in P_{\overrightarrow{AC}}(a_i), N(M, c_k) = 0\}, \quad (12)$$

$$R^{+2}(M_{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}}, a_i) = \{b_j | N(M, c_k) = 0, c_k \in P_{\overrightarrow{AC}}(a_i), c_k \succ_{b_j} M_{\overrightarrow{BC}}(b_j), b_j \in B\}. \quad (13)$$

式(10)中, $R^{+1}(M_{\overrightarrow{AB}}, a_i)$ 表示在 \overrightarrow{AB} 方向上比较当前匹配 $M_{\overrightarrow{AB}}(a_i)$, a_i 更偏好的 B 边中的主体集合; 式(11)中, $R^{+1}(M_{\overrightarrow{BC}}, b_j)$ 表示在 \overrightarrow{BC} 方向上比较当前匹配 $M_{\overrightarrow{BC}}(b_j)$, b_j 更偏好的 C 边中的主体集合; 式(12)中, $R^{+1}(M_{\overrightarrow{AC}}, a_i)$ 表示在 \overrightarrow{AC} 方向上符合 a_i 偏好的 C 边闲置主体集合; 式(13)中, $R^{+2}(M_{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}}, a_i)$ 表示 B 边中那些可以在 C 边闲置主体中找到既符合 a_i 偏好又实现自身更优匹配的的主体集合.

此外, 考虑到下文算法表达的简洁性, 定义 $\text{Head}(Y, x)$ 函数: 对于 $y \in Y$, 若满足 $\forall y' \in Y$, 都有 $y \succ_x y'$ 成立, 则称 y 为 x 在 Y 上的首选, 用 $\text{Head}(Y, x) = y$ 表示.

2.2 搜索优选算法

为寻求稳定匹配, 建立搜索优选算法, 该算法以空匹配 ($M = \emptyset$) 为初始匹配, 从 A 边主体出发, 按照 A 边主体 a_i , B 边优选主体 b_j 以及 C 边未匹配主体 c_k 的次序, 依次选择较当前更优的匹配组来改进历次迭代的匹配 M . 详细的步骤如下.

step 1: 输入 A, B, C 三边主体 a_i, b_j, c_k 及偏好序集 $P_{\overrightarrow{AB}}(a_i), P_{\overrightarrow{BC}}(b_j), P_{\overrightarrow{AC}}(a_i)$, 令抵达变量 t 的初始值为 0, 令迭代变量 i 的初始值为 1, 令初始匹配 $M = \emptyset$.

step 2: 令 $t = \max\{t, i\}$.

step 3: 令 $B' = R^{+1}(M_{\overrightarrow{AB}}, a_i) \cap R^{+2}(M_{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}}, a_i)$, 检验 B' 是否为 \emptyset . 若 $B' \neq \emptyset$, 转至 step 4; 若 $B' = \emptyset$, 则转至 step 10.

step 4: 在 B' 中寻求 a_i 的最优偏好主体 $\text{Head}(B', a_i)$, 不妨设为 b_j , 即 $b_j = \text{Head}(B', a_i)$, 转至 step 5.

step 5: 令 $C' = R^{+1}(M_{\overrightarrow{BC}}, b_j) \cap R^{+1}(M_{\overrightarrow{AC}}, a_i)$, 检验 C' 是否为 \emptyset . 若 $C' \neq \emptyset$, 则转至 step 6; 若 $C' = \emptyset$, 则转至 step 10.

step 6: 在 C' 中寻求 b_j 的最优偏好主体 $\text{Head}(C', b_j)$, 不妨设为 c_k , 即 $c_k = \text{Head}(C', b_j)$, 转至 step 7.

step 7: 检验 M 中是否已经存在 b_j 的匹配组

($M_{\overrightarrow{AB}}^{-1}(b_j), b_j, M_{\overrightarrow{BC}}(b_j)$). 若不存在, 则转至 step 8; 若已存在, 则转至 step 9.

step 8: 令 $M = M \cup \{(a_i, b_j, c_k)\}$, 并判断 $i < |A|$ 是否成立. 若成立, 则转至 step 10; 若不成立, 则转至 step 11.

step 9: 令 $M = (M - \{(M_{\overrightarrow{AB}}^{-1}(b_j), b_j, M_{\overrightarrow{BC}}(b_j)\}) \cup \{(a_i, b_j, c_k)\}$, 设 $M_{\overrightarrow{AB}}^{-1}(b_j) = a_s$, 令 $i = s$, 转至 step 3.

step 10: 继续迭代, 令 $i = t + 1$, 转至 step 2.

step 11: 迭代结束, 输出最终匹配 M .

下面对算法进行一些说明.

1) step 7 和 step 9 中的 $M_{\overrightarrow{AB}}^{-1}(b_j)$ 表示 M 中 \overrightarrow{AB} 偏好方向下与 b_j 构成匹配组的 A 边主体, 若其在 A 中的序号为 s , 则可记作 $M_{\overrightarrow{AB}}^{-1}(b_j) = a_s$, 其中 $s \in N, 1 \leq s \leq |A|$.

2) step 7 ~ step 9 为检验更新过程; step 3 ~ step 6 寻优得到的匹配组 (a_i, b_j, c_k) 是当前 M 的阻塞组, 需将其添加到当前 M 中. 但是, 在主体一对一的匹配容量限制下, step 7 用以检验 M 中是否已经存在 b_j 的匹配组 ($M_{\overrightarrow{AB}}^{-1}(b_j), b_j, M_{\overrightarrow{BC}}(b_j)$). 若已存在, 则 step 9 对其进行删除, 并添加最新匹配组 (a_i, b_j, c_k); 否则, 在 step 8 中直接添加最新匹配组 (a_i, b_j, c_k) 即可.

3) $t = \max\{t, i\}$ 表示就当前迭代而言, 迭代变量 i 曾到达的最大值, 用来记录迭代到达的最远位置, 初始值 $t = 0$. step 7 中, 若检测到存在 ($M_{\overrightarrow{AB}}^{-1}(b_j), b_j, M_{\overrightarrow{BC}}(b_j)$), 则在 step 9 需要在 M 中剔除该组, 并对其所对应的 A 边主体 $M_{\overrightarrow{AB}}^{-1}(b_j) = a_s$ 进行返回重选 ($i < t$), 重选后再从 $t + 1$ 位置继续进行迭代; 此外, 若遇到 $B' = \emptyset$ 或者 $C' = \emptyset$, 也需要从 $t + 1$ 位置继续进行迭代. 鉴于以上情形, 设置变量 t .

定理 1 对于三边单向非循环匹配问题的有限妥协模型, 搜索优选算法可以在

$$O\left(|A| \sum_{1 \leq i \leq |A|} \sum_{b_j \in P_{\overrightarrow{AB}}(a_i)} |P_{\overrightarrow{BC}}(b_j)|\right)$$

时间内得到一个稳定匹配.

证明 1) 首先讨论该算法的时间复杂度.

搜索优选算法从 $M = \emptyset$ 出发, 迭代变量 $i = 1$ 至 $i = |A|$ 依次为 A 边主体 a_i 选择匹配组. 在算法 step 7 和 step 10 中, 每一个 a_i 在找到匹配组 (a_i, b_j, c_k) 后, 都将对当前 M 进行检验, 检验当前 M 是否已经存在 b_j 的匹配组 $M_{\overrightarrow{AB}}^{-1}(b_j) = a_s$. 若已存在, 则将其剔除并更新 M , 之后迭代变量 i 将返回到 s , 对 a_s 进行重选, 重选后迭代变量 i 再从 $t + 1$ 位置继续迭代优选, 其中 t 表示就当前迭代值 i 而言迭代变量 i 曾到达的最大值. 显然, 并不是每次迭代匹配都返回重选 (例如 $i = 1$ 时), 按最多的情况计算, 即假设在 $2 \leq i \leq |A|$ 的各

次迭代中都返回重选,则该算法中外层迭代执行次数为 $2|A| - 1 = O(|A|)$ 次.

每一个 a_i 在 B 中寻找合适的匹配对象时,需要依偏好序历遍搜寻 $b_j \in P_{AB}(a_i)$,判断其是否能够在 C 边闲置的 $P_{AC}(a_i)$ 主体中找到优于当前自身的偏好主体,即算法 step 3 的过程. 按历遍最多的情况计算,即每次都从第一个搜寻到最后一个,则内循环执行次数为 $\sum_{1 \leq i \leq |A|} \sum_{b_j \in P_{AB}(a_i)} |P_{BC}(b_j)| \leq |B||C|$. 因此,搜索优选算法的时间复杂度为

$$O\left(|A| \sum_{1 \leq i \leq |A|} \sum_{b_j \in P_{AB}(a_i)} |P_{BC}(b_j)|\right).$$

2) 证明搜索优选算法输出的匹配是稳定匹配.

反证法. 由阻塞组和稳定匹配的定义,假设搜索优选算法输出的匹配 M 不是稳定匹配,则在 T 中至少存在一个阻塞组,不妨设为 (a_i, b_j, c_k) . 即 $\exists(a_i, b_j, c_k) \in T - M$ 满足式 (9),其中 $b_j \succ_{a_i} M_{AB}(a_i)$ 意味着 M 或者满足 $M_{AB}(a_i) = \emptyset$,或者满足 $M_{AB}(a_i) \neq \emptyset$ 且 $b_j \succ_{a_i} M_{AB}(a_i)$,两者必居其一.

若 $M_{AB}(a_i) = \emptyset$,依据算法程序,此结果意味着:对 a_i 的寻优中,step 3 或 step 5 的历遍搜索结果为 $B' = \emptyset$ 或 $C' = \emptyset$. $B' = \emptyset$ 与式 (9) 中的条件 $\{b_j \succ_{a_i} M_{AB}(a_i)\}$ 产生矛盾, $C' = \emptyset$ 与式 (9) 中的条件 $\{c_k \succ_{b_j} M_{BC}(b_j)\} \wedge \{N(M, c_k \in P_{AC}(a_i)) = 0\}$ 产生矛盾.

若 $M_{AB}(a_i) \neq \emptyset$,则算法 step 3 中必有 $B' \neq \emptyset$,且 $\text{Head}(B', a_i) = M_{AB}(a_i) \succ_{a_i} b_j$,这与式 (9) 中的条件 $b_j \succ_{a_i} M_{AB}(a_i)$ 产生矛盾.

综上可得假设不成立,即搜索优选算法输出的匹配 M 不存在阻塞组,匹配 M 为稳定匹配. □

3 算例分析

某企业在项目开发上采用矩阵制管理模式,一个新产品开发项目需要选调来自商务、工艺设计、生产 3 个职能部门的人员,形成三方配合的项目开发团队,基于彼此间合作偏好的三边匹配方法,能为项目经理提供较好的组队策略. 根据部门之间的职能关系,商务部门的销售人员根据客户提供的新产品需求信息,选择具备相应能力的产品开发设计人员,并根据产品销售地域、数量规模、物流成本等情况选择试制生产线;产品设计人员根据工艺流程、技术标准、产品质量等技术要素来选择与设计密切相关的试制生产线. 产品销售人员、产品设计人员、试制生产线三方构成了三边非循环偏好结构. 将销售人员集合设为 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_5\}$,将产品设计人员集合设为 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$,将该企业试制生产线集合设为

$C = \{c_1, c_2, \dots, c_8\}$. 各方向偏好序信息见表 1 ~ 表 3.

表1 销售人员对设计人员的偏好序信息

a_i	$P_{AB}(a_i)$
a_1	$b_3 \succ b_4 \succ b_2 \succ b_5 \succ b_6 \succ b_7 \succ \emptyset$
a_2	$b_3 \succ b_4 \succ b_7 \succ b_8 \succ \emptyset$
a_3	$b_3 \succ b_4 \succ b_2 \succ b_5 \succ b_7 \succ b_6 \succ \emptyset$
a_4	$b_2 \succ b_6 \succ b_5 \succ b_7 \succ \emptyset$
a_5	$b_4 \succ b_1 \succ b_5 \succ b_6 \succ b_2 \succ \emptyset$

表2 销售人员对生产线的偏好序信息

a_i	$P_{AC}(a_i)$
a_1	$c_2 \sim c_3 \sim c_4 \succ \emptyset$
a_2	$c_1 \sim c_2 \sim c_5 \sim c_8 \succ \emptyset$
a_3	$c_3 \sim c_4 \sim c_6 \succ \emptyset$
a_4	$c_1 \sim c_5 \sim c_6 \sim c_7 \succ \emptyset$
a_5	$c_3 \sim c_4 \succ \emptyset$

表3 设计人员对生产线的偏好序信息

b_j	$P_{BC}(b_j)$
b_1	$c_1 \succ c_2 \succ c_3 \succ c_6 \succ c_4 \succ c_7 \succ \emptyset$
b_2	$c_7 \succ c_2 \succ c_3 \succ c_1 \succ c_4 \succ \emptyset$
b_3	$c_2 \succ c_7 \succ c_4 \succ c_5 \succ c_6 \succ \emptyset$
b_4	$c_5 \succ c_4 \succ c_6 \succ c_8 \succ \emptyset$
b_5	$c_8 \succ c_7 \succ c_5 \succ c_6 \succ c_3 \succ c_1 \succ \emptyset$
b_6	$c_7 \succ c_8 \succ c_5 \succ \emptyset$

借助 Matlab 软件,应用本文提出的搜索优选算法对该算例进行匹配.

首先,按照 step 1,输入三边主体 a_i 、 b_j 、 c_k 及主体偏好序信息 $P_{AB}(a_i)$ 、 $P_{BC}(b_j)$ 、 $P_{AC}(a_i)$. 其中: $i = 1, 2, \dots, 5$, $j = 1, 2, \dots, 6$, $k = 1, 2, \dots, 8$. 分别令初始迭代变量 $i = 1$,初始抵达变量 $t = 0$,初始匹配 $M = \emptyset$. 在历次迭代优选之前,按照 step 2,需随 i 值对 t 值作相应的更新. 然后,按照 step 3 和 step 4,遍历搜索 A 边主体 a_i 的备选集 B' ,得到优选主体 b_j . 进一步地,按照 step 5 和 step 6,搜索优选主体 b_j 的备选集 C' ,得到优选主体 c_k ,从而得到主体 a_i 的优选匹配组 (a_i, b_j, c_k) . 接下来,按照 step 7,对优选匹配组 (a_i, b_j, c_k) 进行检验. 根据检验结果,按照优选主体 b_j 是否已被占用,选择相应的 step 8 或 step 9,以对匹配 M 进行更新,并同步安排继续迭代或是返回重选. 最后,迭代结束输出最终的稳定匹配方案为 $M = \{(a_1, b_3, c_2), (a_2, b_4, c_5), (a_3, b_5, c_6), (a_4, b_2, c_7), (a_5, b_1, c_3)\}$.

4 结论

本文针对三边单向非循环匹配问题,给出了三边单向非循环匹配及其稳定性的定义,并构建了三边单向非循环匹配数学模型. 在此基础上,基于主体的不完全接受及有限妥协心理,提出了妥协条件下的搜索优选算法,并分别计算和证明了该算法的时间复杂度

和稳定性. 与以往的三边匹配模型研究相比,首次从单向非循环偏好的视域进行研究,并兼顾主体的心理行为特征和系统的稳定性要求,弥补了以往研究成果的不足,进一步完善了匹配决策理论与方法. 通过算例应用,表明本文提出的模型及其算法为解决现实中的三边单向非循环匹配问题提供了借鉴. 通过对算法稳定性的讨论,证明本文给出的搜索优选算法是稳定匹配算法. 但需要指出的是,该算法仅适用于本文提出的有限妥协条件下的匹配问题,对于一般情况下的三边单向非循环匹配问题,将作为今后继续研究的方向.

参考文献(References)

- [1] Gale D, Shapley L S. College admissions and the stability of marriage[J]. *American Mathematical Monthly*, 1962, 69(1): 9-15.
- [2] Roth A E. The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory[J]. *Journal of Political Economy*, 1984, 92(6): 991-1016.
- [3] Chen X, Fan Z P. Research on two-sided matching problem between employees and positions based on multiple format information[J]. *Operations Research and Management Science*, 2009, 18(6): 103-109.
- [4] Echenique F, Wilson A J, Yariv L. Clearinghouses for two-sided matching: An experimental study[J]. *Quantitative Economics*, 2016, 7(2): 449-482.
- [5] 张振华,汪定伟. 电子中介中的交易匹配研究[J]. *控制与决策*, 2005, 20(8): 917-920.
(Zhang Z H, Wang D W. Research on matching problem of electronic broker[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(8): 917-920.)
- [6] Azevedo E M, Leshno J D. A supply and demand framework for two-sided matching markets[J]. *Journal of Political Economy*, 2016, 124(5): 1235-1268.
- [7] Hellmann T, Puri M. Venture capital and the professionalization of start-up firms: Empirical evidence[J]. *Journal of Finance*, 2002, 57(1): 169-197.
- [8] Zhao X D, Zang Y Q, Sun W. Two-sided matching decision method with interval-valued hesitant fuzzy information based on bidirectional projection method[J]. *Operations Research and Management Science*, 2017, 26(7): 104-109.
- [9] 樊治平,乐琦. 基于完全偏好序信息的严格双边匹配方法[J]. *管理科学学报*, 2014, 17(1): 21-34.
(Fan Z P, Yue Q. Strict two-sided matching method based on complete preference ordinal information[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2014, 17(1): 21-34.)
- [10] 姜艳萍,袁铎宁. 岗位存在占有者条件下人岗双边匹配 I-ES 算法[J]. *系统工程理论与实践*, 2018, 38(5): 1193-1202.
(Jiang Y P, Yuan D N. The I-ES algorithm of two-sided matching between applicants and positions with tenants[J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2018, 38(5): 1193-1202.)
- [11] 乐琦. 直觉模糊环境下考虑匹配意愿的双边匹配决策[J]. *中国管理科学*, 2017, 25(6): 161-168.
(Yue Q. Two sided matching decision considering matching aspiration under the intuitionistic fuzzy circumstance[J]. *Chinese Journal of Management Science*, 2017, 25(6): 161-168.)
- [12] Wu B, Zhong X. Matching mechanisms and matching quality: Evidence from a top university in China[J]. *Games and Economic Behavior*, 2014, 84(1): 196-215.
- [13] 李建荣. 中国高考招生匹配市场中的算法设计及公平激励机制[J]. *运筹学学报*, 2019, 23(2): 75-85.
(Li J R. Algorithm design and the fair incentive mechanism in Chinese college admissions matching market[J]. *Operations Research Transactions*, 2019, 23(2): 75-85.)
- [14] Stuart J. The supplier-firm-buyer game and its m-sided generalization[J]. *Mathematical Social Sciences*, 1997, 34(1): 21-27.
- [15] Biró, Mcdermid E. Three-sided stable matchings with cyclic preferences[J]. *Algorithmica*, 2010, 58(1): 5-18.
- [16] Cui L, Jia W J. Cyclic stable matching for three-sided networking services[J]. *Computer Networks*, 2013, 57(1): 351-363.
- [17] Knuth D E. *Mariages stables*[M]. Montréal: Les Presses de L'Université de Montréal, 1976: 11-20.
- [18] Alkan A. Nonexistence of stable threesome matchings[J]. *Mathematical Social Sciences*, 1988, 16(2): 207-209.
- [19] Ng C, Hirschberg D S. Three-dimensional stable matching problems[J]. *Society for Industrial & Applied Mathematics*, 1991, 4(2): 245-252.
- [20] Boros E, Gurvich V, Jaslar S, et al. Stable matchings in three-sided systems with cyclic preferences[J]. *Discrete Mathematics*, 2004, 289(1/2/3): 1-10.
- [21] Eriksson K, Sjostrand J, Strimling P. Three-dimensional stable matching with cyclic preferences[J]. *Mathematical Social Sciences*, 2006, 52(1): 77-87.
- [22] Huang C C. Circular stable matching and 3-way kidney transplant[J]. *Algorithmica*, 2010, 58(1): 137-150.
- [23] Zhong L, Bai Y. Three-sided stable matching problem with two of them as cooperative partners[J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2019, 37(1): 286-292.
- [24] 张峰,钟力炜. 具有独立偏好的三方匹配问题[J]. *重庆师范大学学报: 自然科学版*, 2019, 36(2): 1-5.
(Zhang F, Zhong L W. Three-sided stable matching problem with independent preference[J]. *Journal of Chongqing Normal University: Natural Science*, 2019, 36(2): 1-5.)
- [25] Irving R W, Manlove D F, Scott S. The stable marriage problem with master preference lists[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2008, 156(15): 2959-2977.

作者简介

杨洋(1979—),女,副教授,博士生,从事匹配决策理论与方法等研究, E-mail: yangyang@ysu.edu.cn;

赵晓冬(1960—),男,教授,博士生导师,从事管理决策分析、组合分析理论等研究, E-mail: xdzhao@ysu.edu.cn.

(责任编辑:齐霖)