

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于向量角分解的高维多目标进化算法

赵玉亮, 宋业新, 康丽文

引用本文:

赵玉亮, 宋业新, 康丽文. 基于向量角分解的高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2021, 36(3): 761–768.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0925>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### [基于分解的多目标多因子进化算法](#)

A multiobjective multifactorial evolutionary algorithm based on decomposition  
*控制与决策*. 2021, 36(3): 637–644 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0525>

### [基于复杂昂贵仿真的体系效能多目标优化](#)

Complex and expensive simulation based multi-objective optimization to system-of-system effectiveness  
*控制与决策*. 2021, 36(3): 589–598 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0844>

### [基于动态行为选择的和声搜索算法](#)

Harmony search algorithm based on dynamic behavior selection  
*控制与决策*. 2021, 36(3): 577–588 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0597>

### [基于树形结构无界存档的多目标粒子群算法](#)

Multi-objective particle swarm optimization algorithm based on tree-structured unbounded archive  
*控制与决策*. 2020, 35(11): 2675–2686 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0276>

### [基于搜索空间划分与Canopy K-means聚类的种群初始化方法](#)

Population initialization based on search space partition and Canopy K-means clustering  
*控制与决策*. 2020, 35(11): 2767–2772 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0358>

# 基于向量角分解的高维多目标进化算法

赵玉亮<sup>1†</sup>, 宋业新<sup>1</sup>, 康丽文<sup>2</sup>

(1. 海军工程大学 基础部, 武汉 430000; 2. 海图信息中心, 天津 300450)

**摘要:** 选择是进化的主要驱动力,也是多目标进化算法的关键特征,然而,在处理高维多目标问题时,随着目标维数的增加种群的收敛性和分布性的冲突加剧,传统多目标进化算法中的选择算子已难以有效地维持种群的收敛性与分布性之间的平衡. 针对该问题,提出一种基于向量角分解的高维多目标进化算法. 首先,将个体本身作为参考向量,利用目标向量之间的夹角作为个体的相似度量度估计种群分布性,以减轻算法预先指定权重向量的负担;然后,利用成绩标量函数作为个体的收敛性测度,该收敛测度在引导种群走向 Pareto 最优前沿方面发挥着重要作用;最后,提出一种基于向量角分解的精英选择策略,其在环境选择过程中利用向量角信息将目标空间动态分解,并利用成绩标量函数从分布性较好的区域中挑选较好的个体进入下一代,能够动态地平衡种群的收敛性和分布性. 对比实验结果表明,所提出算法具有较强的竞争力,其在保持种群分布性的同时具有足够的选择压力,能够有效地引导高维目标空间的搜索.

**关键词:** 高维多目标进化; 向量角; 成绩标量函数; 动态分解; 精英选择策略

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyj.2019.0925

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 赵玉亮,宋业新,康丽文. 基于向量角分解的高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2021, 36(3): 761-768.

## Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition

ZHAO Yu-liang<sup>1†</sup>, SONG Ye-xin<sup>1</sup>, KANG Li-wen<sup>2</sup>

(1. Department of Basic, Naval University of Engineering, Wuhan 430000, China; 2. Marine Map Information Center, Tianjin 300450, China)

**Abstract:** Selection is the main driving force of evolution and is a key feature of multi-objective evolutionary algorithms. However, when dealing with many-objective optimization problems, with the increase of objective dimensions, the conflicts between convergence and distribution will intensify, and the selection operators in the traditional multi-objective evolutionary algorithms is difficult to effectively maintain the balance between the convergence and distribution of population. To solve this problem, this paper proposes a many-objective evolution algorithm based on vector angle decomposition (VAD). Firstly, the individuals themselves are used as a reference vector, and the angles between the target vectors are used as the similarity measure to estimate the population distribution, which reduces the burden of the algorithm pre-specifying the weight vectors. Then, the achievement scalarizing function is used as the convergence measure of the individual, which plays an important role in guiding the population towards the Pareto optimal front. Finally, an elite selection strategy based on vector angle decomposition is proposed, which uses vector angle information to dynamically decompose the objective space in the process of environment selection, and then uses the achievement scalarizing function to select better individuals from better distributed regions into the next generation, so as to dynamically balance the convergence and distribution of population. Comparative experiments results indicate a highly competitive performance of the proposed approach. And it has sufficient selection pressure while maintaining the diversity of the population, which can effectively guide the search of high-dimensional objective space.

**Keywords:** many-objective evolutionary; vector angle; achievement scalarizing function; dynamic decomposition; elite selection strategy

收稿日期: 2019-06-29; 修回日期: 2019-10-18.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71171198, 41631072, 41771487).

责任编辑: 李少远.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: yl.zhao0811@gmail.com.

## 0 引言

在现实生活中,有各种各样的问题涉及到不止一个相互冲突的目标,这些问题被称为多目标优化问题(multi-objective optimization problems, MOPs). 如果一个优化问题包含4个及以上目标,则该问题称为高维多目标优化问题(many-objective optimization problems, MaOPs). MaOPs 广泛应用于轮机系统优化<sup>[1]</sup>、无人机任务规划<sup>[2]</sup>、项目施工调度<sup>[3]</sup>等问题,具有较高的理论和实际应用价值.

多目标进化算法(multi-objective evolution algorithms, MOEAs)作为一类启发式搜索算法被广泛应用于多目标优化问题的求解. 研究表明,MOEAs 能够有效地求解2维或3维多目标优化问题. 然而,由于高维多目标问题的冲突目标数量较多,非支配解的数量急剧增加,使得传统基于Pareto占优关系的进化算法的选择压力迅速下降;与此同时,逼近高维空间Pareto前沿所需的个体数量也呈指数增长,导致计算复杂度和搜索难度增大;此外,目标数量的增加会提高目标空间的复杂度,解集难以收敛,其分布性也更加难以维持,因此,高维多目标问题成为国内外进化领域最难解决和备受关注的问题之一.

为了提高MOEAs对MaOPs的可扩展性,人们对基于Pareto<sup>[4-5]</sup>、基于分解<sup>[6-8]</sup>和基于指标方法<sup>[9-10]</sup>的MOEAs进行了大量改进. 近期开展的研究发现,个体向量角信息可以在一定程度上刻画个体在目标空间中的相似性,并能很好地融合收敛信息,维持种群收敛性与分布性之间的平衡<sup>[11]</sup>. 文献[12]每次从种群中找出一对向量角最小的个体,如果这两个最相似个体的欧氏距离之差大于一个预定义的阈值,则将与理想点欧氏距离较大的个体删除,否则,删除与其他个体向量角较小的个体,继续删除直到个体数量等于 $N$ . 刘元等<sup>[13]</sup>首先将各目标之和作为个体的收敛性估计,然后计算当前个体与收敛性最好的个体之间的向量角,并将其作为当前个体的邻域估计,最后通过邻域竞赛将问题划分为若干个相互关联的子问题并逐步优化. AnD算法<sup>[14]</sup>首先找到一对向量角最小的个体,然后利用基于位移的密度估计策略考察其分布性和收敛性,并删除较差的一个,继续删除直到个体的数目等于 $N$ . 与AnD算法类似,毕晓君等<sup>[15]</sup>提出的MaOEA-APD算法在环境选择阶段寻找种群中向量角最小的一对个体,然后通过角度惩罚距离APD选取较劣个体进行删除,能同时提高种群的收敛性和分布性. VaEA算法<sup>[16]</sup>将个体本身看作参考向量,使用了最大向量角优先原则保持种群之间的良好分布,而

在收敛性方面采用了劣解消除法代替适应度较差的个体,以提高收敛性.

以上算法将角度信息应用到MOEAs中,其共同特点是将个体本身作为参考向量,通过向量角度量个体的相似性,并利用范数距离作为收敛性评价算子度量个体的收敛性,然后删除其中较差的个体. 此外,算法中往往需要预先设定角度阈值参数. 本文在以上研究的启发下,提出一种基于向量角的高维多目标进化算法. 与以上研究不同,该算法采用成绩标量函数评价个体的收敛性,相较于范数距离,成绩标量函数更能客观反映个体的收敛性. 不再采用劣解消除策略,而是设计一种基于向量角分解的精英选择策略,能动态地平衡种群的分布性和收敛性. 算法结构简单,没有复杂的操作算子,也无需预先设定阈值参数,计算时间复杂度低. 其中,基于向量角分解的精英选择策略设计思路如下:首先,从临界层的剩余个体中挑选出与已选个体集合之间向量角最大的个体;然后将目标空间划分为与该个体之间向量角较小以及已选个体集合之间向量角较小两个区域,易知与该个体之间向量角较小的区域分布性较好;最后从位于分布性较好区域的临界层剩余个体中挑选收敛性较好的个体保留到下一代,重复以上步骤,直到已选个体集合符合种群规模要求. 实验表明,所提出策略能够在高维目标空间中有效地筛选出分布较为均匀且收敛性良好的个体进入下一代,有效提高算法的分布性、收敛性维持能力,为求解高维约束多目标优化问题提供一种新的思路.

## 1 概念及定义

不失一般性,以最小化为例,高维多目标优化问题的数学表达式为

$$\min_{x \in \Omega} F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x))^T. \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbf{R}^n$ 称为决策向量, $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x))^T \in \mathbf{R}^M$ 称为目标向量, $\mathbf{R}^n$ 为 $n$ 维决策空间, $\mathbf{R}^M$ 为 $M$ 维目标空间.

1) 归一化. 目标归一化是将目标值从尺度目标空间映射到归一化目标空间的一种变换. 当某些个体的分布过于密集或过于稀疏,导致个体之间的向量角极小或较大时,这种归一化过程是有意义的. 设在MOEAs进化过程中的当前种群为 $P = \{x_1, \dots, x_N\}$ ,种群规模为 $N, \forall x_j \in P$ 的第 $i$ 维目标向量的归一化过程计算如下:

$$\tilde{f}_i(x_j) = \frac{f_i(x_j) - z_i^{\min}}{z_i^{\max} - z_i^{\min}}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (2)$$

其中:  $z_i^{\min} = \min_{j=1}^N f_i(x_j)$ ,  $z_i^{\max} = \max_{j=1}^N f_i(x_j)$ . 则  $\forall x_j \in P$  的归一化目标向量为  $\tilde{F}(x_j) = (\tilde{f}_1(x_j), \tilde{f}_2(x_j), \dots, \tilde{f}_M(x_j))^T$ .

2) 向量角. 两个个体的相似性可以通过两个个体间的向量角度量, 归一化目标空间中两个个体之间的向量角计算如下:

$$\text{angle}(x_i, x_j) = \arccos\left(\frac{(\tilde{F}(x_i))^T \cdot \tilde{F}(x_j)}{\|\tilde{F}(x_i)\| \cdot \|\tilde{F}(x_j)\|}\right). \quad (3)$$

其中:  $\|\cdot\|$  为向量的2-范数,  $\forall x_i, x_j \in P$ ,  $\text{angle}(x_i, x_j) \in [0, \pi/2]$ .

3) 成绩标量函数 ASF. 成绩标量函数大体反映了个体的收敛性, 虽然范数距离也能对个体的收敛性进行评价, 但其易受 Pareto 前沿面形状的影响, 而 ASF 是基于自身权重向量方向上的收敛程度, 能客观反映个体的收敛性<sup>[15]</sup>.  $\forall x_j \in P$  的 ASF 值计算如下:

$$\text{ASF}(x_j, z^{\min}, w) = \max_{i=1}^M \left\{ \frac{\tilde{f}_i(x_j) - z_i^{\min}}{w_i} \right\}. \quad (4)$$

其中:  $z_i^{\min} = \min_{j=1}^N f_i(x_j)$ ;  $w$  为个体  $x_j$  对应的偏好权重向量, 其  $i$  维计算公式如下:

$$w_i = \frac{\tilde{f}_i(x_j)}{\sum_{k=1}^M \tilde{f}_k(x_j)}. \quad (5)$$

## 2 提出方法

### 2.1 整体框架

基于向量角分解的高维多目标进化算法的整体框架与 NSGA III<sup>[6]</sup> 和 VaEA 类似, 如算法1所示. 首先, 在决策空间  $\Omega$  中随机产生一个个体数量为  $N$  的初始种群  $P$ ; 然后, 依据个体的 ASF 值, 利用二元锦标赛算法选择优秀的个体加入匹配池  $P'$ ; 接着, 采用模拟二进制交叉 SBX 和多项式变异产生子种群  $Q$ ; 最后, 利用环境选择机制从  $P$  和  $Q$  的并集中挑选  $N$  个收敛性和分布性较好的个体进入下一代. 重复上述过程, 直到满足停止条件为止. 该框架结构简单, 可以方便地与目标向量的角度信息相结合.

#### 算法1 VAD 框架.

```

1: initialization the population  $P$  containing  $N$  solutions
2:  $t = 1$ 
3: while  $t \leq T_{\max}$ 
4:    $P' = \text{mating\_selection}(P)$ 
5:    $Q = \text{variation}(P')$ 
6:    $S = P \cup Q$ 
7:    $P = \text{environmental\_selection}(S)$ 

```

```

8:    $t = t + 1$ 
9: end while
10: return  $P$ 

```

### 2.2 环境选择机制

算法1中的环境选择机制如算法2所示. 假定种群规模为  $N$ , 当前种群  $P$  通过选择和遗传(交叉和变异)算子产生子种群  $Q$ , 合并父子两代种群得到  $S = P \cup Q$ , 大小为  $2N$ . 为了从  $S$  挑选  $N$  个优秀个体进入下一代, 首先采用基于 Pareto 非支配排序方法, 将  $S$  中的个体划分为不同的层次, 即  $F_1, F_2, \dots$ ; 然后依次将每一层的个体加入到一个临时集合  $S_t$  中, 直到  $|S_t| \geq N$ . 假设最后加入的等级层为  $l$ , 则称  $F_l$  为临界层. 如果  $|S_t| = N$ , 则将集合  $S_t$  直接作为下一代种群  $P$ , 如果  $|S_t| > N$ , 则将  $S_t/F_l$  中的个体加入下一代种群  $P$ . 另外, 由于在高维目标空间中可能存在基于 Pareto 非支配排序无法有效分层的情况, 即  $F_l = F_1, F_1 > N$ , 此时需要首先从  $F_1$  中挑选  $M$  个极值解加入  $P$ , 然后根据 ASF 值挑选前  $M$  个收敛性的最好个体加入  $P$ . 利用下文将要介绍的基于向量角分解的精英选择策略再从  $F_l/P$  中挑选  $K = N - |P|$  个个体保留到下一代. 在该环境选择机制中, 基于 Pareto 非支配排序方法能有效降低算法的计算时间复杂度, 而对于基于 Pareto 非支配排序无法有效分层的情况, 该机制依然能够有效应对.

#### 算法2 environmental selection( $S$ ).

```

input:  $S$ ;
output:  $P$ .
1: normalization( $S$ )
2: angle( $S$ )
3: ASF( $S$ )
4:  $P = \phi, i = 1$ 
5:  $(F_1, F_2, \dots) = \text{NDSort}(S)$ 
6: while  $|P| + |F_i| \leq N$  do
7:    $P = P \cup F_i$ 
8:    $i = i + 1$ 
9: end while
10: the last front to be included  $F_l = F_i$ 
11: if  $|P| = N$ 
12:   return  $P$ 
13: else if
14:   sort  $K = N - |P|$  solutions from  $F_l/P$  to  $P$  by  $\text{AD}(F_l/P)$ 
15: end if
16: return  $P$ 

```

### 2.3 基于向量角分解的精英选择策略

与VAEA的最大向量角优先策略类似,基于向量角分解精英选择策略首先由下式从 $F_l/P$ 中找到与 $P$ 的向量角最大的个体 $\alpha$ :

$$\alpha = \arg(\max_{x_i \in F_l/P} (\min_{x_j \in P} \text{angle}(x_i, x_j))), \quad (6)$$

不同之处在于,本文策略不急于直接将 $\alpha$ 加入 $P$ 中,而是先由下式确定集合 $F_l/P$ 中与 $\alpha$ 向量角小于与 $P$ 的向量角的个体:

$$A = \{x | x \in F_l/P, \text{angle}(x, \alpha) < \text{angle}(x, P)\}, \quad (7)$$

即集合 $F_l/P$ 中相比 $P$ 更靠近 $\alpha$ 的个体,组成集合 $A$ ;然后,根据ASF值判断出收敛性最佳的个体,将其加入 $P$ ;继续操作 $K$ 次,直到 $|P| = N$ . 易知, VaEA中的最大角优先原则只考虑个体的分布性,注重提升种群的分布性,而忽略了个体的收敛性,不利于种群的快速进化,而基于角度将 $F_l/P$ 分解为两部分,从分布性较好的集合 $A$ 中挑选出收敛性能最好的个体加入 $P$ ,较好地兼顾了种群的分布性和收敛性. 基于向量角分解的精英选择策略如算法3所示.

**算法3** AD( $F_l/P$ ).

input:  $P, F_l, K$ ;

output:  $P$ .

1: for  $k = 1$  to  $K$

//find the index with the maximum angle  
from  $F_l/P$  to  $P$

2:  $\alpha = \arg(\max_{x_i \in F_l/P} (\min_{x_j \in P} \text{angle}(x_i, x_j)))$

//find the candidate solutions close to  $\alpha$

3:  $A = \{x | x \in F_l/P, \text{angle}(x, \alpha) < \text{angle}(x, P)\}$

//find the best solution from  $A$  based on ASF

4: for  $i = 1$  to  $\text{length}(A)$

5: if  $\text{ASF}(x_i) < \text{ASF}(\alpha)$

$$\alpha = x_i$$

6: while  $|P| + |F_i| \leq N$  do

7: end if

8: end for

9: add  $\alpha$  to  $P$ , delete  $\alpha$  from  $F_l$

10:  $k = k + 1$

11: end for

12: return  $P$

如图1所示,假设 $x_1$ 和 $x_8$ 已位于 $P$ 中,根据式(6)和(7)可知 $\alpha = x_4$ ,  $A = \{x_3, x_4, x_5\}$ ,根据ASF定义可知 $x_5$ 收敛性最好,故将其加入 $P$ . 如果采用最大向量角优先原则,则选择将 $\alpha = x_4$ 加入 $P$ , $x_4$ 的加入固然

有利于维护种群分布性,但影响算法的收敛性能,而 $x_5$ 的加入则兼顾了种群的分布性和收敛性.

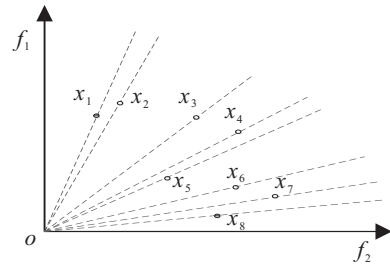


图1 基于向量角分解的精英选择策略示意图

### 2.4 计算时间复杂度

VAD的计算时间复杂度主要取决于其环境选择过程.对于具有 $M$ 个目标 $2N$ 个个体的种群进行归一化(算法2第1行)计算的时间复杂度为 $O(MN)$ .因为向量角是在 $2N$ 个个体两两之间计算,所以时间复杂度为 $O(MN^2)$ (算法2第2行).小生境计算的时间复杂度为 $O(MN^2)$ (算法2第3行).适应度计算的时间复杂度为 $O(MN)$ (算法2第4行).非支配排序的时间复杂度为 $O(N \log^{M-2} N)$ <sup>[17]</sup>(算法2第5行).算法3中基于角度的分解策略的最坏情况计算时间复杂度为 $O(MN^2)$ .因此,VAD在进化每一代的计算时间复杂度的最坏情况为 $\max\{O(N \log^{M-2} N), O(MN^2)\}$ .

### 2.5 讨论

VAD与VaEA结构类似,但不同之处在于:1)在优解选择方面,VaEA采用最大向量角优先原则,而VAD采用基于向量角的分解策略,相比VaEA在该阶段只关注种群分布性,VAD同时兼顾了种群的分布性和收敛性;2)VAD仅利用个体本身进行进化,不需要引入额外参数,而VaEA在劣解消除过程中需要预设角度阈值,取值难以确定,且易受Pareto前沿面的影响.

总体而言,VAD具有以下优点:1)不受一组给定的参考点或参考向量的约束;2)结构简单,没有复杂的操作算子,主要依靠向量角和ASF值进行比较;3)易扩展,在解决高维约束多目标问题时不增加算法的复杂度;4)能根据向量角动态平衡种群的分布性和收敛性.

## 3 仿真实验

本节旨在通过实验研究验证VAD的性能.将所提出算法与NSGAIII<sup>[6]</sup>、MOEA/DD<sup>[7]</sup>、RVEA<sup>[8]</sup>和VaEA<sup>[16]</sup>等具有代表性的多目标进化算法在一组WFG系列基准测试集<sup>[18]</sup>上进行对比实验.所有实验在硬件配置为Intel Core, CPU: i3-2350, 4 GB内存、主

频2.3 GHz的计算机上进行,程序采用 Matlab 2015b编写,并在多目标进化算法开源平台 PlatEMO-2.1<sup>[19]</sup>上运行.

### 3.1 性能指标

为了定量评估算法的求解性能,采用通用的反转世代距离 (inverted generational distance, IGD) 进行测试衡量.

IGD: 对于任一算法,设  $P$  为该算法在目标空间获得的一个近似解集,  $P^*$  为真实 Pareto 前沿上的一组均匀分布的点集,则 IGD 的计算公式为

$$IGD(P) = \frac{1}{|P^*|} \sum_{z^* \in P^*} d(z^*, P). \quad (8)$$

其中:  $d(z^*, P)$  为真实 Pareto 前沿上的点  $z^* \in P^*$  与  $P$  的最小欧氏距离,  $|P^*|$  为  $P^*$  的基数,即真实 Pareto 前沿上点的总数. 由定义可知,IGD 既可以表示收敛性,也可以表示分布性,其值越小,表示算法的综合性能越好.

### 3.2 实验参数设置

本实验为了保证算法的公平性,均采用实数编码,实验其余参数设置如下:

1) 种群大小. NSGA-III 和 RVEA 的种群大小与均匀分布的权重向量规模有关,这里采用文献 [6] 的双层分布法,设置为比参考点  $H$  大的 4 的最小公倍数. 对于 MOEA/DD,使用文献 [7] 推荐的种群大小  $N = H$ ,其中  $H$  为权重向量个数. VAD、VaEA 与 NSGAIII 的种群规模相同. 表 1 为不同目标数量的种群规模.

表 1 目标个数不同时的参考点数量和种群规模

$M$	$H$	NSGAIII	MOEA/DD
3	91	92	91
8	156	156	156
15	135	136	135

2) 进化算子参数设置. 所有算法均采用 SBX 和多项式变异产生子种群. 交叉概率  $p_c = 1.0$ , 突变概率  $p_m = 1/D$ , 其中  $D$  为决策空间的维数. SBX 和多项式突变的分布指标分别设为  $\eta_c = 30, \eta_m = 20$ .

3) 算法参数设置. MOEA/DD 的邻域规模设置为  $T = 20$ , 惩罚参数设置为  $\theta = 5$ , 邻域个体选择概率设置为  $\delta = 0.9$ . 由文献 [8], RVEA 的惩罚因子变化率  $\beta = 2$ , 参考点调整频率  $f_r = 0.1$ . 由文献 [16], VaEA 中角度阈值设置为  $\omega = (\pi/2)/(N + 1)$ .

4) 运行次数和终止条件. 所有算法在 PlatEMO 中编程,各算法对每个测试实例独立运行 30 次,当目标函数评价次数达到 20 000 次(最大函数评价次数, MFE)时算法终止.

### 3.3 实验结果分析

VAD 与 NSGAIII、MOEA/DD、RVEA 和 VaEA 在 9 个 WFG 系列测试函数问题上的 IGD 比较统计结果如表 2~表 4 所示,分别为 30 次独立运行结果的平均值和标准差,表现最好的结果用粗体标识. 此外,本文采用 Wilcoxon 秩和检验对实验数据进行显著性比较,显著性水平设置为 0.05,表中“+”“-”“=”分别表示其他算法显著优于、显著劣于和无差别于 VAD.

表 2 5 种算法在 3 目标 WFG 测试问题上获得的 IGD 平均值与标准差

problem	$M$	NSGAIII	MOEA/DD	RVEA	VaEA	VAD
WFG1	3	5.975 4e-1 (8.32e-2) =	1.374 40e+0 (1.44e-1) -	7.308 43e-1 (1.22e-1) -	6.778 44e-1 (1.06e-1) -	<b>5.462 43e-1 (8.78e-2)</b>
WFG2	3	<b>1.627 46e-1 (1.12e-3) +</b>	1.790 44e-1 (3.24e-3) -	1.910 43e-1 (5.71e-3) -	1.634 46e-1 (3.12e-3) +	1.669 44e-1 (4.23e-3)
WFG3	3	1.222 49e-1 (1.14e-2) -	3.322 42e-1 (1.24e-1) -	2.442 45e-1 (2.18e-2) -	1.433 42e-1 (1.39e-2) -	<b>9.213 42e-2 (5.79e-3)</b>
WFG4	3	<b>2.235 42e-1 (1.01e-3) =</b>	2.431 48e-1 (1.95e-3) -	2.510 45e-1 (7.36e-3) -	2.254 414e-1 (4.50e-3) =	2.238 45e-1 (3.61e-3)
WFG5	3	<b>2.313 48e-1 (1.03e-3) =</b>	2.480 45e-1 (1.89e-3) -	2.408 40e-1 (3.26e-3) -	2.338 41e-1 (3.57e-3) =	2.320 42e-1 (3.90e-3)
WFG6	3	2.560 49e-1 (1.38e-2) =	2.858 45e-1 (3.87e-2) -	2.909 48e-1 (2.11e-2) -	2.658 46e-1 (1.49e-2) -	<b>2.511 46e-1 (1.49e-2)</b>
WFG7	3	2.241 47e-1 (8.01e-4) =	2.490 42e-1 (4.72e-3) -	2.430 47e-1 (5.36e-3) -	2.226 42e-1 (4.10e-3) =	<b>2.217 45e-1 (3.07e-3)</b>
WFG8	3	3.006 45e-1 (5.18e-3) =	3.123 45e-1 (6.70e-3) -	3.425 40e-1 (1.02e-2) -	3.094 40e-1 (5.46e-3) -	<b>2.989 41e-1 (4.94e-3)</b>
WFG9	3	2.274 44e-1 (1.95e-3) -	2.688 44e-1 (4.90e-2) -	2.354 40e-1 (6.50e-3) -	<b>2.234 46e-1 (5.17e-3) =</b>	2.244 48e-1 (4.46e-3)
		+ / - / =	1 / 2 / 6	0 / 9 / 0	0 / 9 / 0	1 / 4 / 4

表3 5种算法在8目标WFG测试问题上获得的IGD平均值与标准差

Problem	M	NSGAIII	MOEA/DD	RVEA	VaEA	VAD
WFG1	8	1.908 0e+0 (1.63e-1) =	2.245 7e+0 (1.67e-1) -	1.873 7e+0 (1.74e-1) =	2.391 2e+0 (8.09e-2) -	<b>1.795 3e+0 (1.56e-1)</b>
WFG2	8	1.254 2e+0 (2.35e-1) =	1.317 1e+0 (6.59e-2) -	1.236 7e+0 (1.01e-1) =	1.198 9e+0 (4.62e-2) -	<b>1.027 0e+0 (2.30e-2)</b>
WFG3	8	1.756 9e+0 (4.42e-1) =	2.783 7e+0 (9.45e-2) -	2.651 7e+0 (5.91e-1) -	1.566 3e+0 (8.87e-2) =	<b>1.393 1e+0 (2.28e-1)</b>
WFG4	8	3.619 9e+0 (8.80e-2) -	3.935 9e+0 (1.32e-1) -	3.559 8e+0 (5.38e-2) -	3.424 7e+0 (3.90e-2) -	<b>3.337 8e+0 (3.23e-2)</b>
WFG5	8	3.529 6e+0 (1.65e-2) -	3.932 5e+0 (1.37e-1) -	3.550 8e+0 (4.82e-2) -	<b>3.401 6e+0 (3.74e-2) +</b>	3.517 1e+0 (2.93e-2)
WFG6	8	3.812 6e+0 (6.49e-1) -	4.164 3e+0 (2.28e-1) -	3.964 7e+0 (2.75e-1) -	3.652 8e+0 (5.11e-2) -	<b>3.563 8e+0 (4.43e-2)</b>
WFG7	8	3.655 4e+0 (1.55e-1) -	3.769 8e+0 (1.46e-1) -	3.676 6e+0 (9.24e-2) -	<b>3.501 2e+0 (4.69e-2) +</b>	3.584 1e+0 (3.83e-2)
WFG8	8	3.848 9e+0 (1.80e-1) -	4.167 1e+0 (2.22e-1) -	3.934 0e+0 (1.20e-1) -	3.580 5e+0 (3.81e-2) =	<b>3.574 7e+0 (3.15e-2)</b>
WFG9	8	3.583 1e+0 (4.34e-2) -	3.986 3e+0 (9.53e-2) -	3.516 9e+0 (4.17e-2) -	<b>3.374 5e+0 (3.12e-2) =</b>	3.384 3e+0 (4.08e-2)
+/-/=		0/6/3	0/9/0	0/7/2	2/4/3	

表4 5种算法在15目标WFG测试问题上获得的IGD平均值与标准差

Problem	M	NSGAIII	MOEA/DD	RVEA	VaEA	VAD
WFG1	15	2.558 6e+0 (2.19e-1) +	2.727 6e+0 (3.97e-1) +	<b>2.437 4e+0 (2.12e-1) +</b>	3.560 1e+0 (1.18e-1) -	3.133 1e+0 (2.15e-1)
WFG2	15	2.945 4e+0 (1.07e+0) -	2.215 8e+0 (7.68e-2) -	2.346 8e+0 (9.35e-2) -	<b>1.846 6e+0 (6.44e-2) +</b>	2.040 1e+0 (6.17e-2)
WFG3	15	5.049 4e+0 (7.88e-1) -	7.147 1e+0 (1.14e-1) -	8.543 0e+0 (1.96e+0) -	2.963 3e+0 (7.88e-1) -	<b>2.076 9e+0 (6.53e-1)</b>
WFG4	15	1.190 3e+1 (3.44e-1) -	1.296 6e+1 (2.67e-1) -	1.242 8e+1 (1.43e+0) -	8.925 8e+0 (1.60e-1) -	<b>8.788 2e+0 (9.60e-2)</b>
WFG5	15	1.187 8e+1 (3.02e-1) -	1.208 9e+1 (1.10e-1) -	1.263 8e+1 (5.54e-1) -	8.704 5e+0 (8.42e-2) -	<b>8.460 6e+0 (7.90e-2)</b>
WFG6	15	1.243 7e+1 (6.23e-1) -	1.436 0e+1 (6.68e-1) -	1.537 4e+1 (2.70e+0) -	8.744 7e+0 (1.34e-1) -	<b>8.521 0e+0 (6.75e-2)</b>
WFG7	15	1.172 0e+1 (3.14e-1) -	1.202 9e+1 (2.81e-1) -	1.287 4e+1 (2.05e+0) -	8.377 7e+0 (1.28e-1) -	<b>7.997 8e+0 (8.87e-2)</b>
WFG8	15	1.216 5e+1 (1.85e-1) -	1.362 7e+1 (7.62e-1) -	1.483 8e+1 (2.50e+0) -	8.292 9e+0 (1.20e-1) =	<b>8.288 8e+0 (6.52e-2)</b>
WFG9	15	1.137 3e+1 (3.47e-1) -	1.169 6e+1 (7.94e-1) -	1.161 7e+1 (2.00e+0) -	8.456 0e+0 (7.20e-2) -	<b>8.116 9e+0 (1.26e-1)</b>
+/-/=		1/8/0	1/8/0	1/8/0	1/7/1	

从整体看, VAD和VaEA在大多数测试实例中表现优异, 尤其是在高维空间中VAD和VaEA相较其他算法具有明显的优势, 表明基于向量角的分布性度量方法结合其他收敛性度量能在分布性和收敛性上取得较好的平衡. MOEA/DD和RVEA在5种算法中整体表现最差, 主要是因为两种算法都是基于预设的权重向量定向进化, 不能随前沿面特性自适应调整, 对于具有不规则、不连续或多模态Pareto前沿的WFG测试问题有些权重向量的引导能力可能是失效的. 下面针对不同目标维数进行详细讨论.

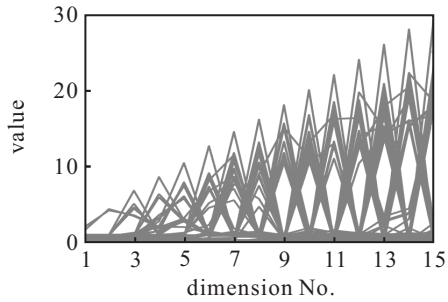
表2显示了5种比较算法在3目标WFG上的IGD平均值和标准差. 由表2可见, VAD分别在WFG1、WFG3、WFG6、WFG7和WFG8取得了最佳结果, 这表明VAD在以上问题中所求得的近似Pareto最优解集的分布性和收敛性均最优. 尤其是在WFG3

问题上, VAD明显优于其他算法, 表明VAD处理退化问题的能力较强. NSGAIII在WFG2、WFG4和WFG5上表现较好, 但根据Wilcoxon秩和检验结果可知, NSGAIII仅在WFG2上明显优于VAD.

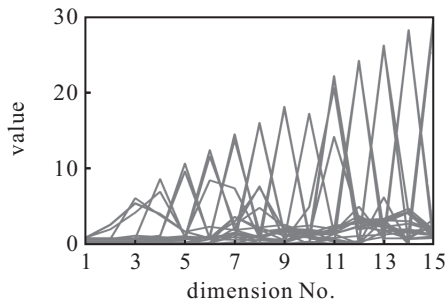
由表3可见, VAD和VaEA几乎在所有问题上的表现均优于NSGA-III、MOEA/DD和RVEA. 从Wilcoxon秩和检验结果看, VAD在WFG1、WFG2、WFG4和WFG6上明显优于VaEA, 表明VAD在高维空间中的收敛能力强于VaEA, 这是因为基于向量角分解的精英选择策略兼顾了种群的收敛性和分布性, 而且VAD采用的ASF相较于VaEA中使用的适应度值更能客观地表现个体的收敛性. 此外, 在WFG3、WFG8和WFG9上两者性能相当, 而在WFG5和WFG7上VaEA优于VAD, 表明在偏好问题上, 基于向量角分解的精英选择策略更有利于提升种群的分布

布性.

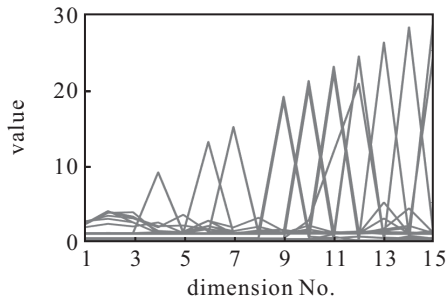
由表4可见,对于15维WFG系列测试问题,VAD在WFG3~WFG9上均明显优于其他4种算法,仅在WFG1上表现差于RVEA,在WFG2上表现差于



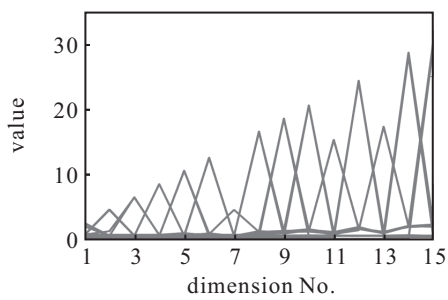
(a) VAD



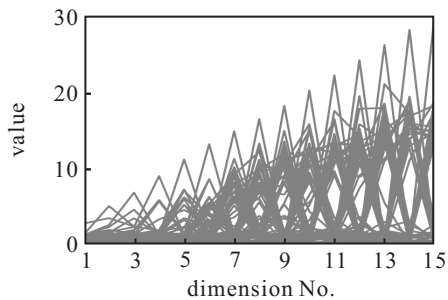
(b) NSGA-III



(c) MOEA/DD



(d) RVEA



(e) VaEA

图2 基于向量角分解的精英选择策略

VaEA,但在WFG2上的表现仅次于VaEA.表明VAD在高维空间中维持收敛性和分布性的能力较强.

此外,为了直观地反映5种算法所得到的最终解集在高维目标空间中的分布情况,本文采用平行坐标实现高维空间最终解集的可视化.图2为5种算法在具有代表性的15目标WFG8上独立运行30次后,最终解集的IGD最接近平均值的那一组数据.平行坐标图中每条折线代表高维空间中的一个点.由图2可见,VAD算法表现优异,收敛性和分布性均达到了理想状态.除了RVEA,其他算法均处于收敛状态,但NSGAIII、RVEA存在目标点缺失的情况.

## 4 结论

针对高维多目标优化问题的求解,为了获得具有更好收敛性和分布性的近似Pareto最优解集,本文提出了一种新的进化多目标优化选择方案.该算法将个体本身作为参考向量,基于目标向量之间的向量角,采用相似度测度估计种群分布性,引入成绩标量函数,客观评价个体的收敛性.具体地,该算法在环境选择过程中利用向量角信息将目标空间动态分割,在分布性较好的区域利用成绩标量函数挑选收敛性较好的个体进入下一代,以平衡种群的收敛性和分布性.本文算法与另4种优秀算法一同在WFG系列测试函数集上进行性能比较,实验结果表明,所提出算法具有一定的优势.

以后的研究会将本文提出的基于向量角分解的精英选择策略应用扩展到高维约束多目标优化问题中,使该策略可以很方便地在进化初期选择一部分收敛性和分布性较好的不可行解来更好地引导种群进化.

## 参考文献(References)

- [1] Ganesan T, Aris M S, Vasant P. Extreme value metaheuristics for optimizing a many-objective gas turbine system[J]. *International Journal of Energy Optimization and Engineering*, 2018, 7(2): 76-96.
- [2] Atencia C R, Del Ser J, Camacho D. Weighted strategies to guide a multi-objective evolutionary algorithm for multi-UAV mission planning[J]. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, 44: 480-495.
- [3] Panwar A, Jha K N. A many-objective optimization model for construction scheduling[J]. *Construction Management and Economics*, 2019, 37(12): 727-739.
- [4] He Z, Yen G G, Zhang J. Fuzzy-based Pareto optimality for many-objective evolutionary algorithms[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(2):

- 269-285.
- [5] Li M, Yang S, Liu X. Shift-based density estimation for Pareto-based algorithms in many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(3): 348-365.
- [6] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 577-601.
- [7] Li K, Deb K, Zhang Q F, et al. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2015, 19(5): 694-716.
- [8] Cheng R, Jin Y, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773-791.
- [9] Russo L M S, Francisco A P. Quick hypervolume[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 481-502.
- [10] Trautmann H, Wagner T, Brockhoff D. R2-EMOA: Focused multiobjective search using R2-indicator-based selection[J]. *Learning and Intelligent Optimization*, 2013, 7997: 70-74.
- [11] 陈振兴, 严宣辉, 吴坤安, 等. 融合张角拥挤控制策略的高维多目标优化[J]. *自动化学报*, 2015, 41(6): 1145-1158.  
(Chen Z X, Yan X H, Wu K A, et al. Many-objective optimization integrating open angle based congestion control strategy[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2015, 41(6): 1145-1158.)
- [12] He Z N, Yen G G. Many-objective evolutionary algorithms based on coordinated selection strategy[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(2): 220-233.
- [13] 刘元, 郑金华, 邹娟, 等. 基于邻域竞赛的多目标优化算法[J]. *自动化学报*, 2018, 44(7): 1304-1320.  
(Liu Y, Zheng J H, Zou J, et al. An evolutionary algorithm through neighborhood competition for multi-objective optimization[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(7): 1304-1320.)
- [14] Liu Z Z, Wang Y, Huang P Q. A many-objective evolutionary algorithm with angle-based selection and shift-based density estimation[J]. *Information Sciences*, 2020, 509: 400-419.
- [15] 毕晓君, 王朝. 一种基于角度惩罚距离的高维多目标进化算法[J]. *电子与信息学报*, 2018, 40(2): 314-322.  
(Bi X J, Wang C. A Many-objective evolutionary algorithm based on angle penalized distance[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(2): 314-322.)
- [16] Xiang Y, Zhou Y R, Li M Q, et al. A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(1): 131-152.
- [17] Jensen M T. Reducing the run-time complexity of multiobjective EAs: The NSGA-II and other algorithms[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2003, 7(5): 503-515.
- [18] Huband S, Hingston P, Barone L, et al. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(5): 477-506.
- [19] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. PlatEMO: A Matlab platform for evolutionary multi-objective optimization[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, 12(4): 73-87.

### 作者简介

赵玉亮(1991—), 男, 博士生, 从事多目标优化、无人机任务规划的研究, E-mail: yl.zhao0811@gmail.com;

宋业新(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 从事优化决策、对策理论等研究, E-mail: yxsong@21cn.com;

康丽文(1991—), 女, 工程师, 硕士, 从事智能优化算法的研究, E-mail: kanglw0599@163.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)