

控制与决策

Control and Decision

输入受限的多旋翼无人机轨迹跟踪鲁棒正定不变集设计

李志南, 李卫华, 王鹏, 曹越

引用本文:

李志南, 李卫华, 王鹏, 等. 输入受限的多旋翼无人机轨迹跟踪鲁棒正定不变集设计[J]. *控制与决策*, 2021, 36(4): 857–866.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0880>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

输出误差约束下四旋翼无人机预定性能反步控制

Prescribed performance backstepping control for quadrotor UAV with output error constraint

控制与决策. 2021, 36(5): 1059–1068 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1249>

多无人机协同直播场景下自适应任务卸载决策

Adaptive task offloading decision of multi-UAVs cooperation in live broadcasting scenario

控制与决策. 2021, 36(4): 974–982 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1104>

基于凸面体圆弧航路的无人机自主避障算法

Autonomous obstacle avoidance algorithm designed for UAV based on convex circular trajectory

控制与决策. 2021, 36(3): 653–660 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0768>

四旋翼无人机抗干扰轨迹跟踪控制

Anti-interference trajectory tracking control of quadrotor UAV

控制与决策. 2021, 36(2): 379–386 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0875>

微型无人机集群低时延组网规划方法

A low delay networking planning method for micro UAV swarm

控制与决策. 2020, 35(11): 2696–2706 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1549>

输入受限的多旋翼无人机轨迹跟踪鲁棒正定不变集设计

李志南, 李卫华, 王鹏[†], 曹越

(空军工程大学 信息与导航学院, 西安 710003)

摘要: 针对输入受限的多旋翼无人机轨迹跟踪问题设计了鲁棒正定不变集. 考虑多旋翼无人机的非线性动力学模型、外部不确定干扰以及输入饱和和约束等因素, 首先设计带有干扰抵消项的非线性控制律以保证无人机轨迹跟踪的稳定性, 进而基于线性矩阵不等式(LMIs)构造了鲁棒正定不变集. 在所设计的控制律作用下, 无人机轨迹跟踪误差一旦进入所构造的不变集则将始终处于该集合内, 并最终趋于零. 理论推导过程与仿真实验结果均验证了以上特性.

关键词: 多旋翼无人机; 外部干扰; 输入受限; 鲁棒正定不变集; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0880

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 李志南, 李卫华, 王鹏, 等. 输入受限的多旋翼无人机轨迹跟踪鲁棒正定不变集设计[J]. 控制与决策, 2021, 36(4): 857-866.

Design of robust positively invariant set for trajectory tracking of multi-rotor UAV with input saturation

LI Zhi-nan, LI Wei-hua, WANG Peng[†], CAO Yue

(Information and Navigation College, Air Force Engineering University, Xi'an 710003, China)

Abstract: A robust positively invariant (RPI) set is designed for the trajectory tracking problem of a multi-rotor unmanned aerial vehicles (UAVs) subject to external disturbance and input saturation. With considering the nonlinear dynamics, external disturbance and input saturation of the multi-rotor UAV, a nonlinear control law with disturbance offset is designed firstly to ensure the stability of tracking, and the RPI set is constructed based on linear matrix inequalities (LMIs). For the tracking error within the designed RPI set, the designed control law can always guarantee that the tracking error stays in the RPI set forever and eventually converges to zero. The above properties are verified by the theoretical derivation and simulation results.

Keywords: multi-rotor UAV; external disturbance; input saturation; RPI set; LMIs

0 引言

近年来,多旋翼无人机因其体积小、机动性强、垂直起降、自由悬停等优点被越来越广泛地应用于工业、农业、军事和民用等领域^[1-4],其研究涉及多个学科领域,是国内外许多重点实验室与研究院的重点研究对象.

众所周知,多旋翼无人机是一种多输入多输出、欠驱动、强耦合的非线性系统^[4],其飞行控制技术已成为影响其实际应用的关键技术. 轨迹跟踪控制作为无人机飞行控制中的基本问题,也已受到越来越

多的关注^[4-11]. 目前,针对多旋翼无人机的轨迹跟踪控制问题,相关学者已提出了多种有效的解决方法,如滑模控制^[3]、反步控制^[6,8,12]、预测控制^[13-14]、PID控制^[7,15]等. 考虑多旋翼无人机系统的非线性特性,现有文献多通过在平衡点附近线性化的方法来对其模型进行简化,进而设计出相应的线性反馈控制律^[16]. 由于在平衡点附近进行线性化的方法需要基于无人机状态位于平衡点附近的假设,无法适应无人机强机动的控制情况,因此设计相应的非线性控制律仍十分必要. 文献[7]即采用非线性PID控制方法为

收稿日期: 2019-06-20; 修回日期: 2019-11-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61773396, 61403414, 61403297, 61703423, 61771484, 61571458, 41601436, 71503260); 陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2016JQ6070, 2017JQ6043, 2018JM4029, 2016JM6050); 中国博士后科学基金项目(2016M603042, 2017T100817); 航空科学基金项目(20160196005); 国防科技创新特区项目.

责任编辑: 张国山.

[†]通讯作者. E-mail: blueking1985@hotmail.com.

多旋翼无人机的轨迹跟踪问题设计了相应的控制律,实现了对指定轨迹的稳定跟踪.文献[5]设计了终端滑动模型控制算法使得状态变量短时间内收敛到期望值,能够有效适应无人机欠驱动、强耦合的非线性特点.

由于无人机在实际飞行过程中会受到较多外部不确定因素的影响,为其设计相应的控制律时还需要考虑鲁棒抗干扰性.考虑无人机跟踪控制中的抗干扰问题,现有研究已提出了针对性的解决方案,如通过在控制器中引入干扰补偿^[6,8,17-18]等.文献[8]基于级联理论的思想,将完整的闭环系统分成两个降阶的子系统和一个耦合项,进而利用干扰观测器获得的干扰估计采用反步控制法设计了干扰补偿控制律,实现了对干扰的抑制.文献[17]首先通过干扰观测器对干扰进行了估计,进而基于干扰估计采用反步控制法设计了标称反馈控制律,最后通过设计弹性控制律对干扰估计误差进行处理,提升了控制的抗干扰性能.文献[18]则聚焦强机动情况下的多旋翼无人机姿态跟踪问题,将控制系统划分为四元数姿态控制与角速度控制两级,通过设计观测器对科里奥利项与干扰进行了估计,进而在控制律设计中进行了相应的补偿,实现了较好的抗干扰性能.文献[6]同样按照级联控制的思路采用反步控制法对无人机路径跟踪问题进行研究,通过姿态误差与位置误差的耦合合理地设计了干扰观测器,更好地抑制了干扰.以上文献所设计的控制律无法将干扰影响完全抵消,即不能实现无静差控制.本文针对带有外部干扰的多旋翼无人机轨迹跟踪控制问题,通过非线性反馈控制律设计中加入干扰抵消项,实现了对无人机轨迹跟踪的无静差控制.

由于电机功率上限、螺旋桨转速上限等物理限制的影响,导致多旋翼无人机在控制过程中的状态与输入(如升力、扭矩等)受到约束限制,如果控制律设计时不考虑输入约束,所求解的控制输入可能无法实现甚至会导致炸机的后果,因此在实际的控制律设计中应进一步考虑对输入约束的保证.针对输入饱和和约束,现有研究常通过饱和函数对控制律进行约束,如文献[11]通过在所设计的有限时间反步控制策略中加入饱和函数,在一定程度上抑制了输入饱和对系统状态收敛速度与无人机飞行性能的不良影响;文献[6]通过饱和函数对其所设计的干扰补偿反步控制律进行处理,实现了对多旋翼无人机的高精度路径跟踪控制.此外,预测控制作为一种滚动优化与滚动实施的先进控制策略,尤其适合于处理带约束的控制问

题^[19-22].然而,(鲁棒)预测控制的稳定性需要建立在(鲁棒)不变集的基础上^[19,21,23],为此本文在所设计非线性反馈控制律的基础上,进一步基于线性矩阵不等式(LMIs)为带有外部干扰的多旋翼无人机轨迹跟踪控制问题设计鲁棒正定不变集.容易验证,一旦无人机的轨迹跟踪误差进入该鲁棒正定不变集,则将始终处于该集合内,且最终收敛至零,从而为后续鲁棒预测控制器的设计与综合奠定了基础.

1 问题描述

多旋翼无人机在不同坐标系的表示如图1所示.

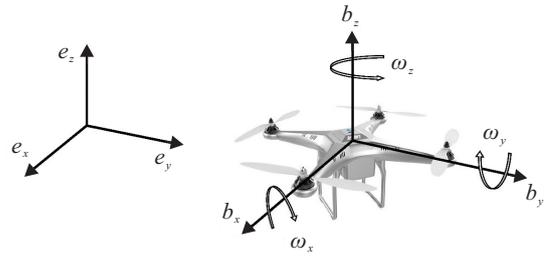


图1 多旋翼无人机的不同坐标系表示

考虑如下运动学与动力学模型所表示的多旋翼无人机:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}; \\ \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{R(\boldsymbol{q})T\boldsymbol{e}_z}{m} - g\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{d}_F; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}}_0 = -\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_v^T\boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{q}}_v = \frac{1}{2}(\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{I} + [\boldsymbol{q}_v]_{\times})\boldsymbol{\omega}; \\ \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -[\boldsymbol{\omega}]_{\times}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{d}_\Gamma. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\boldsymbol{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ 与 $\boldsymbol{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ 分别表示无人机在地球坐标系下的位置和速度;四元数 $\boldsymbol{q} = [q_0 \ \boldsymbol{q}_v]^T = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$, $R(\boldsymbol{q}) = (q_0^2 - \|\boldsymbol{q}_v\|^2)\boldsymbol{I}_{3 \times 3} + 2\boldsymbol{q}_v\boldsymbol{q}_v^T + 2q_0[\boldsymbol{q}_v]_{\times}$ 表示对应四元数 \boldsymbol{q} 的旋转算子; T 表示无人机螺旋桨提供的升力, $\boldsymbol{e}_z = [0 \ 0 \ 1]^T$ 表示地球坐标系下 z 方向的单位向量, m 表示无人机质量; g 表示重力加速度, $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ 表示无人机的角速度, \boldsymbol{I} 表示适维的单位矩阵, $\boldsymbol{J} = \text{diag}\{J_x, J_y, J_z\}$ 表示无人机转动惯量矩阵, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T$ 表示螺旋桨旋转产生的扭矩, $\boldsymbol{d}_F = [d_{Fx} \ d_{Fy} \ d_{Fz}]^T$ 与 $\boldsymbol{d}_\Gamma = [d_{\Gamma x} \ d_{\Gamma y} \ d_{\Gamma z}]^T$ 分别表示作用于升力与扭矩的外部不确定干扰, $[\cdot]_{\times}$ 表示相应向量的叉乘矩阵.

通常情况下,不确定干扰 \boldsymbol{d}_F 与 \boldsymbol{d}_Γ 均有界,即满足

$$\boldsymbol{d}_F \in \boldsymbol{D}_F \triangleq \{\boldsymbol{d}_F \mid |d_{Fs}| \leq d_{Fs}^{\max}, s = x, y, z\}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{d}_\Gamma \in \boldsymbol{D}_\Gamma \triangleq \{\boldsymbol{d}_\Gamma \mid |d_{\Gamma s}| \leq d_{\Gamma s}^{\max}, s = x, y, z\}, \quad (4)$$

其中 $d_{(\cdot)}^{\max}$ 为相应干扰分量的已知上界. 在飞行控制过程中, 无人机因物理限制导致其输入必须满足一定的约束, 即

$$\mathbf{u} = [T \quad \boldsymbol{\tau}^T]^T \in \mathbf{U} \triangleq \{\mathbf{u} \mid |T| \leq T_{\max}, |\tau_s| \leq \tau_s^{\max}\}. \quad (5)$$

其中: T_{\max} 表示无人机的升力上限, τ_s^{\max} ($s = x, y, z$) 分别为输入扭矩约束上界.

令 $\mathbf{p}_d, \mathbf{v}_d, \dot{\mathbf{v}}_d, \mathbf{q}_d, \boldsymbol{\omega}_d, \dot{\boldsymbol{\omega}}_d$ 分别表示指定轨迹的位置、速度、加速度、姿态四元数、角速度与角加速度, 定义跟踪误差状态分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_e &= \mathbf{p}_d - \mathbf{p}, \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_d - \mathbf{v}, \\ \mathbf{q}_e &= \mathbf{q}^* \circ \mathbf{q}_d = [q_{e0} \quad \mathbf{q}_{ev}^T]^T, \\ \boldsymbol{\omega}_e &= R(\mathbf{q}_e)\boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

其中: \mathbf{q}^* 表示四元数 \mathbf{q} 的共轭, 运算符 \circ 表示四元数乘法. 相应的跟踪误差状态模型可推导为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_e^o &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_e \\ \dot{\mathbf{v}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \dot{\mathbf{v}}_d - \frac{R(\mathbf{q})T\mathbf{e}_z}{m} + g\mathbf{e}_z - \mathbf{d}_F \end{bmatrix}, \quad (6) \\ \dot{\mathbf{z}}_e^i &= \begin{bmatrix} \dot{q}_{e0} \\ \dot{\mathbf{q}}_{ev} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mathbf{q}_{ev}^T\boldsymbol{\omega}_e \\ \frac{1}{2}(q_0\mathbf{I} + [\mathbf{q}_{ev}]_{\times})\boldsymbol{\omega}_e \\ \dot{R}(\mathbf{q}_e)\boldsymbol{\omega}_d + R(\mathbf{q}_e)\dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}_F) + \\ \mathbf{J}^{-1}[R(\mathbf{q}_e)\boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}_e]_{\times}\mathbf{J}[R(\mathbf{q}_e)\boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}_e] \end{bmatrix}, \quad (7) \end{aligned}$$

其中 $\dot{R}(\mathbf{q}_e) = -[\boldsymbol{\omega}_e]_{\times}R(\mathbf{q}_e)$. 本文的控制目的可描述为: 设计控制律 $\mathbf{u} = [T \quad \boldsymbol{\tau}^T]^T = [\kappa^o(\mathbf{z}_e^o, \dot{\mathbf{v}}_d) \quad \kappa^i(\mathbf{z}_e^i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_d)]^T \in \mathbf{U}$, 使得无人机跟随指定轨迹飞行, 即使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_e^o = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0}]^T$, $\mathbf{0}$ 为适维的零矩阵. 为便于鲁棒正定不变集的设计与描述, 本文首先给出以下定义.

定义 1^[24] 对于 t 时刻的任意误差状态 $\mathbf{z}_e^{(\cdot)}(t) \in \mathbf{S}$, 当且仅当下式对所有的 r 时刻干扰 $\mathbf{d}_{(\cdot)}(r) \in \mathbf{D}_{(\cdot)}$ 及 $r > t$ 均成立, 则集合可称为相应跟踪误差系统的鲁棒正定不变集:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_e^{(\cdot)}(r) \in \mathbf{S}, \\ \kappa^{(\cdot)}(\mathbf{z}_e^{(\cdot)}(r), \cdot) \in \mathbf{U}, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\kappa^{(\cdot)}(\mathbf{z}_e^{(\cdot)}(r), \cdot)$ 为待设计的反馈控制律.

2 控制律与鲁棒正定不变集的设计

根据多旋翼无人机姿态与位置的耦合关系, 将轨迹跟踪控制分为外环控制子系统(6)与内环控制子系统(7)进行级联控制. 综合考虑外部不确定干扰与输

入约束, 分别设计控制律与不变集.

2.1 外环控制的控制律与鲁棒正定不变集设计

外环控制系统(6)可改写为如下的线性干扰系统:

$$\dot{\mathbf{z}}_e^o = \mathbf{A}_1\mathbf{z}_e^o + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{d}_F. \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{u}_1 &= \dot{\mathbf{v}}_d - \frac{R(\mathbf{q})T\mathbf{e}_z}{m} + g\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

为外环系统的虚拟控制输入. 外环控制系统(6)的实际控制输入(即升力)可根据系统(9)的虚拟控制输入设计为

$$T = m\|\mathbf{u}_1 - \dot{\mathbf{v}}_d - g\mathbf{e}_z\|. \quad (10)$$

对于外环控制系统(6), 可借鉴常规思路^[22]来设计反馈控制律与鲁棒正定不变集.

定理 1 若存在标量 $\alpha > 0$, 矩阵 $\mathbf{P}_1 = \mathbf{W}^{-1} > 0$ 与 $\mathbf{F}_1 = \mathbf{Y}\mathbf{W}^{-1}$, 以及状态向量 \mathbf{z}_e^o 满足以下 LMIs:

$$\begin{bmatrix} -\alpha & \mathbf{z}_e^{oT} \\ \mathbf{z}_e^o & -\mathbf{W} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -\beta & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^T & -\mathbf{W} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (12)$$

$$\mathbf{W}\mathbf{A}_1^T + \mathbf{A}_1\mathbf{W} + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}_1^T + \mathbf{B}_1\mathbf{Y} \leq 0. \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \beta &= 2\left(\frac{T_{\max}}{m} - \|\mathbf{d}_F^{\max}\text{sign}\{\mathbf{B}_1^T\mathbf{P}_1\mathbf{z}_e^o\}\| - \|\dot{\mathbf{v}}_{d\max}\| - \|g\mathbf{e}_z\|\right) - \alpha, \\ \mathbf{d}_F^{\max} &= \text{diag}\{d_{F1}^{\max}, d_{F2}^{\max}, d_{F3}^{\max}\}, \end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{v}}_{d(\cdot)}^{\max}$ 为指定轨迹的加速度上限. 则采用反馈控制律

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{F}_1\mathbf{z}_e^o\mathbf{d}_F^{\max}\text{sign}\{\mathbf{B}_1^T\mathbf{P}_1\mathbf{z}_e^o\}, \quad (14)$$

可保证集合 $\mathbf{S}^o = \{\mathbf{z}_e^o \mid \mathbf{z}_e^{oT}\mathbf{P}_1\mathbf{z}_e^o \leq \alpha\}$ 为外环控制系统(9)的鲁棒正定不变集, 系统(9)在集合 \mathbf{S}^o 内鲁棒稳定, 且实际控制输入(10)始终满足 $|T| \leq T_{\max}$.

证明 根据 Shur 补引理可知, 不等式(11)与(12)分别等价于

$$\mathbf{z}_e^{oT}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{z}_e^o \leq \alpha, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{Y}^T &\leq 2\left(\frac{T_{\max}}{m} - \|\mathbf{d}_F^{\max}\text{sign}\{\mathbf{B}_1^T\mathbf{P}_1\mathbf{z}_e^o\}\| - \|\dot{\mathbf{v}}_{d\max}\| - \|g\mathbf{e}_z\|\right) - \alpha. \quad (16) \end{aligned}$$

进一步地, 式(15)与(16)使得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1\| &= \\ \|\mathbf{F}_1\mathbf{z}_e^o - \mathbf{d}_F^{\max}\text{sign}\{\mathbf{B}_1^T\mathbf{P}_1\mathbf{z}_e^o\}\| &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|F_1 z_e^o\| + \|d_F^{\max} \text{sign}\{B_1^T P_1 z_e^o\}\| = \\
& \|F_1 W^{\frac{1}{2}} W^{-\frac{1}{2}} z_e^o\| + \|d_F^{\max} \text{sign}\{B_1^T P_1 z_e^o\}\| \leq \\
& \|F_1 W^{\frac{1}{2}}\| \|W^{-\frac{1}{2}} z_e^o\| + \|d_F^{\max} \text{sign}\{B_1^T P_1 z_e^o\}\| \leq \\
& \sqrt{F_1 W F_1^T} \sqrt{\alpha} + \|d_F^{\max} \text{sign}\{B_1^T P_1 z_e^o\}\| \leq \\
& \frac{Y W^{-1} Y^T + \alpha}{2} + \|d_F^{\max} \text{sign}\{B_1^T P_1 z_e^o\}\| \leq \\
& \frac{T_{\max}}{m} - \|\dot{v}_d\| - \|g e_z\|, \quad (17)
\end{aligned}$$

则实际控制输入(10)满足

$$\begin{aligned}
|T| &= m \|u_1 - \dot{v}_d - g e_z\| \leq \\
& m (\|u_1\| + \|\dot{v}_d\| + \|g e_z\|) \leq \\
& T_{\max}. \quad (18)
\end{aligned}$$

可知,若不等式(11)与(12)成立,则式(18)成立,即输入约束得以保证.

选取李雅普诺夫函数为 $V_1 = z_e^{oT} P_1 z_e^o$,则在反馈控制律 $u_1 = F_1 z_e^o - d_F^{\max} \text{sign}\{B_1^T P_1 z_e^o\}$ 的作用下,不等式(13)使得

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \\
& z_e^{oT} P_1 z_e^o + z_e^{oT} P_1 \dot{z}_e^o = \\
& (A_1 z_e^o + B_1 u_1 - B_1 d_F)^T P_1 z_e^o + \\
& z_e^{oT} P_1 (A_1 z_e^o + B_1 u_1 - B_1 d_F) = \\
& z_e^{oT} (A_1^T P_1 + P_1 A_1) z_e^o + u_1^T B_1^T P_1 z_e^o + \\
& z_e^{oT} P_1 B_1 u_1 - d_F^T B_1^T P_1 z_e^o - z_e^{oT} P_1 B_1 d_F = \\
& z_e^{oT} (A_1^T P_1 + P_1 A_1 + F_1^T B_1^T P_1 + P_1 B_1 F_1) z_e^o - \\
& (d_F + d_F^{\max} \text{sign}\{B_1^T P_1 z_e^o\})^T B_1^T P_1 z_e^o - \\
& z_e^{oT} P_1 B_1 (d_F + d_F^{\max} \text{sign}\{B_1^T P_1 z_e^o\}) \leq \\
& z_e^{oT} (A_1^T P_1 + P_1 A_1 + F_1^T B_1^T P_1 + P_1 B_1 F_1) z_e^o \leq 0, \quad (19)
\end{aligned}$$

即式(15)始终成立,且外环控制系统(9)鲁棒稳定.

综上所述,若式(11)~(13)成立,则式(15)、(18)与(19)始终成立,即定理1得证. \square

对于外环控制系统(9),由于矩阵 (A_1, B_1) 为可控矩阵对,根据 Riccati 方程可知,必然存在矩阵 $P_1 = W^{-1} > 0$ 与 $F_1 = Y W^{-1}$ 使得不等式(13)成立. 而对于任意的 $\alpha > 0$ 与 $W > 0$,总是存在足够小的状态向量 z_e^o 使得不等式(11)成立. 对于适当的升力上限值 T_{\max} 与干扰上限 d_F^{\max} ,当参数 α 越小时,式(12)越容易满足. 因此,当输入约束上限与干扰上限适当时,可通过选择足够小的参数 α 使得条件不等式(11)~(13)同时成立,即为外环控制系统(9)构造出保证其稳定的鲁棒正定不变集 S^o . 在实际的控制问题中,通常需要集合 S^o 越大越好,因此本文通过求解以

下优化问题来获得最大的鲁棒正定不变集合 S^o :

$$\begin{aligned}
& \max_{\alpha, W, Y, z_e^o} \alpha; \\
& \text{s.t. 式(11) ~ (13)}. \quad (20)
\end{aligned}$$

2.2 外环控制的控制律与鲁棒正定不变集设计

对于内环控制系统(7),考虑其非线性特性,可借鉴文献[25]中的思路来设计反馈控制律,并在此基础上设计鲁棒正定不变集.

定理2 若存在标量 $\eta > 0$,矩阵 $P_2 > 0, K \leq 0$ 与 F_Γ ,以及状态向量 z_e^i 满足如下的LMIs:

$$\begin{bmatrix} -\eta & \hat{z}_e^{iT} \\ \hat{z}_e^i & -\eta P_2^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_s - \tau_s^{\max} & \eta & F_{\Gamma s} \\ \eta & -\left(C_s P_2^{-1} C_s^T + \frac{1}{2}\right)^{-1} & 0 \\ F_{\Gamma s}^T & 0 & -2P_2 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (22)$$

$$A(z_e^i)^T P_2 + P_2 A(z_e^i) + A_2^T F_\Gamma^T P_2 + P_2 A_2 F_\Gamma \leq 0. \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned}
\hat{z}_e^i &= [q_{ev}^T \quad \omega_e^T]^T, \\
F_\Gamma &= [\mu K \quad K] = [F_{\Gamma x}^T \quad F_{\Gamma y}^T \quad F_{\Gamma z}^T]^T, \\
A(z_e^i) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & q_{e0} I + [q_{ev}]_\times \\ \mu [\omega_e]_\times & -\mu q_{e0} I \end{bmatrix}, \\
A_2 &= [0 \quad J^{-1}]^T,
\end{aligned}$$

λ_s 与 $C_s (s = x, y, z)$ 为与指定轨迹有关的已知参数(见附录A式(A3)~(A23)),则采用反馈控制律

$$\begin{aligned}
\tau &= \\
& -K \hat{x} + d_F^{\max} \text{sign}\{\hat{x}\} + \frac{1}{2} \mu J (q_{e0} I + \\
& [q_{ev}]_\times) \omega_e + [R(q_e) \omega_d - \omega_e]_\times J [R(q_e) \omega_d - \\
& \omega_e] + J [\dot{R}(q_e) \omega_d + R(q_e) \dot{\omega}_d], \quad (24)
\end{aligned}$$

$\hat{x} = \omega_e + \mu q_{ev}, \mu > 0, d_F^{\max} = \text{diag}\{d_{F_x}^{\max}, d_{F_y}^{\max}, d_{F_z}^{\max}\}$,可保证集合 $S^i = \{\hat{z}_e^i | \hat{z}_e^i P_2 \hat{z}_e^{iT} \leq \eta^2\}$ 为内环控制系统(7)的鲁棒正定不变集,系统(7)在集合 S^i 内鲁棒稳定且实际控制输入始终满足 $|\tau_s| \leq \tau_s^{\max}, s = x, y, z$.

证明 根据 Shur 补引理可知,不等式(21)与(22)分别等价于

$$\hat{z}_e^i P_2 \hat{z}_e^{iT} \leq \eta^2, \quad (25)$$

$$\eta C_s P_2^{-1} C_s^T \eta + \lambda_s + \frac{\eta^2 + F_{\Gamma s} P_2^{-1} F_{\Gamma s}^T}{2} \leq \tau_s^{\max}. \quad (26)$$

根据指定轨迹参数与单位四元数约束,可对控制

律(24)界定如下(具体过程见附录A):

$$|\tau_s| \leq |\mathbf{F}_{\Gamma s} \hat{\mathbf{z}}_e^i| + |\mathbf{C}_s \hat{\mathbf{z}}_e^i|^2 + \lambda_s. \quad (27)$$

则式(25)与(26)使得

$$\begin{aligned} |\tau_s| &\leq \\ |\mathbf{F}_{\Gamma s} \hat{\mathbf{z}}_e^i| + |\mathbf{C}_s \hat{\mathbf{z}}_e^i|^2 + \lambda_s &= \\ |\mathbf{F}_{\Gamma s} \mathbf{P}_2^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_2^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{z}}_e^i| + |\mathbf{C}_s \mathbf{P}_2^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_2^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{z}}_e^i|^2 + \lambda_s &\leq \\ \eta \sqrt{\mathbf{F}_{\Gamma s} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{F}_{\Gamma s}^T} + \eta \mathbf{C}_s \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{C}_s^T \eta + \lambda_s &\leq \\ \frac{\eta^2 + \mathbf{F}_{\Gamma s} \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{F}_{\Gamma s}^T}{2} + \eta \mathbf{C}_s \mathbf{P}_2^{-1} \mathbf{C}_s^T \eta + \lambda_s &\leq \\ \tau_s^{\max}, \quad s = x, y, z. & \quad (28) \end{aligned}$$

可知,若不等式(21)与(22)成立,则式(28)成立,即输入约束 $|\tau_s| \leq \tau_s^{\max}(s = x, y, z)$ 得以保证。

选取正定函数

$$V_2 = \hat{\mathbf{z}}_e^{iT} \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{z}}_e^i, \quad (29)$$

在反馈控制律(24)的作用下,式(23)使得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \hat{\mathbf{z}}_e^{iT} [\mathbf{A}(\mathbf{z}_e^i)^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{F}_{\Gamma}^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}(\mathbf{z}_e^i) + \\ &\quad \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 \mathbf{F}_{\Gamma}] \hat{\mathbf{z}}_e^i + \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{z}}_e^i + \hat{\mathbf{z}}_e^{iT} \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_2 \leq \\ &\quad \hat{\mathbf{z}}_e^{iT} [\mathbf{A}(\mathbf{z}_e^i)^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{F}_{\Gamma}^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 + \\ &\quad \mathbf{P}_2 \mathbf{A}(\mathbf{z}_e^i) + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 \mathbf{F}_{\Gamma}] \hat{\mathbf{z}}_e^i \leq 0, \quad (30) \end{aligned}$$

即式(25)始终成立。其中

$$\mathbf{B}_2 = [\mathbf{0} \quad -(\mathbf{d}_{\Gamma} + \mathbf{d}_{\Gamma}^{\max} \text{sign}\{\hat{\mathbf{x}}\})^T \mathbf{J}^{-1}]^T.$$

因此,集合 $\mathcal{S}^i = \{\hat{\mathbf{z}}_e^i | \hat{\mathbf{z}}_e^i \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{z}}_e^{iT} \leq \eta^2\}$ 为内环控制系统(7)的鲁棒正定不变集。

选取李雅普诺夫函数

$$V_3 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}^T \hat{\mathbf{x}}, \quad (31)$$

则在反馈控制律(24)的作用下,有

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \hat{\mathbf{x}}^T (\dot{\boldsymbol{\omega}}_e + \mu \dot{\mathbf{q}}_{ev}) = \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}^T \left\{ \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{q}_e) \boldsymbol{\omega}_d + \mathbf{R}(\mathbf{q}_e) \dot{\boldsymbol{\omega}}_d - \mathbf{J}^{-1} (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}_{\Gamma}) + \right. \\ &\quad \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{R}(\mathbf{q}_e) \boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}_e] \times \mathbf{J} [\mathbf{R}(\mathbf{q}_e) \boldsymbol{\omega}_d - \boldsymbol{\omega}_e] + \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \mu (\mathbf{q}_{e0} \mathbf{I} + [\mathbf{q}_{ev}]_{\times}) \boldsymbol{\omega}_e \right\} = \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{J}^{-1} (\mathbf{K} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{d}_{\Gamma} - \mathbf{d}_{\Gamma}^{\max} \text{sign}\{\hat{\mathbf{x}}\}) \leq \\ &\quad \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}} \leq 0. \quad (32) \end{aligned}$$

可知,在有限时间内 t_0 后, $\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega}_e + \mu \mathbf{q}_{ev} \equiv 0$,即

$$\boldsymbol{\omega}_e \equiv -\mu \mathbf{q}_{ev}, \quad (33)$$

从而使得内环控制系统(7)等价变化为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_{e0} = \frac{1}{2} \mu \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{q}_{ev}, \\ \dot{\mathbf{q}}_{ev} = -\frac{1}{2} \mu \mathbf{q}_{e0} \mathbf{q}_{ev}. \end{cases} \quad (34)$$

进一步为以上等价系统选取李雅普诺夫函数

$$V_4 = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{q}_{ev} + \frac{1}{2} (1 - q_{e0})^2, \quad (35)$$

则有

$$\dot{V}_4 = -\frac{1}{2} \mu \mathbf{q}_{ev}^T \mathbf{q}_{ev} \leq 0. \quad (36)$$

由式(33)与(36)可知,内环控制系统(7)鲁棒稳定。

综上所述,一旦式(21)~(23)成立,则式(25)、(28)、(32)与(36)始终成立,即定理2得证。□

类似地,为使得集合 \mathcal{S}^i 最大,本文通过求解以下优化问题来获得最大的鲁棒正定不变集 \mathcal{S}^i :

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{F}_{\Gamma}, \eta, \mathbf{z}_e^i, \mathbf{K} \leq 0} \eta; \\ &\text{s.t. 式(21) ~ (23)}. \quad (37) \end{aligned}$$

3 仿真实验

本文使用Matlab软件进行仿真,具体参数^[6]选择如下: $m = 3 \text{ kg}$, $g = 9.8 \text{ m/s}$,转动惯量矩阵

$$\mathbf{J} = \text{diag}\{0.039, 0.039, 0.12\} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

指定轨迹位置为

$$\mathbf{p}_d = \left[2.5\pi \sin\left(\frac{t}{2\pi}\right) \quad 2.5\pi \cos\left(\frac{t}{2\pi}\right) \quad -0.5t \right]^T \text{ m}.$$

输入约束

$$\mathbf{U} \triangleq \{\mathbf{u} | |\mathbf{T}| \leq T_{\max}, |\tau_s| \leq \tau_s^{\max}, s = x, y, z\}.$$

其中: $T_{\max} = 36 \text{ N}$, $\tau_x^{\max} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$, $s = x, y, z$. 外部干扰

$$\mathbf{d}_F = [0.4 \sin t \quad 0.2 \sin t + 0.2 \quad 0.4 \cos t]^T \text{ m/s}^2,$$

$$\mathbf{d}_{\Gamma} = [0.49 \sin t \quad 0.49 \sin t \quad 0.49 \cos t]^T \text{ N} \cdot \text{m}.$$

3.1 控制律与鲁棒正定不变集的有效性验证

求解LMIs优化问题(20),可得出外环控制系统不变集的参数为

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0.0004 \mathbf{I} & 0.0052 \mathbf{I} \\ 0.0052 \mathbf{I} & 0.2972 \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1.5 \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\alpha = 21.5361, \mu = 1.$$

求解优化问题(37),可得出内环控制系统不变集的参数为 $\eta^2 = 1.0420$ 。根据以上求解出的不变集,选择一组不变集的边界点作为初始的跟踪误差状态,即

$$\mathbf{q}_e(0) = [0.7071 \quad 0.5 \quad 0.4 \quad 0.3]^T,$$

$$\boldsymbol{\omega}_e(0) = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1]^T \text{ rad/s},$$

$$\mathbf{p}_e(0) = [40 \quad 50 \quad 20]^T \text{ m},$$

$$\mathbf{v}_e(0) = [3 \quad 6 \quad 2]^T \text{ m/s}.$$

采用本文设计的外环控制律(14)与内环控制律(24)

进行控制,相应的仿真结果如图2~图9所示.

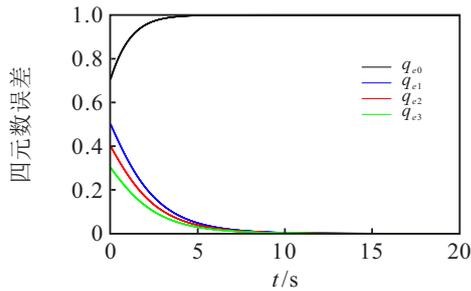


图2 姿态跟踪误差

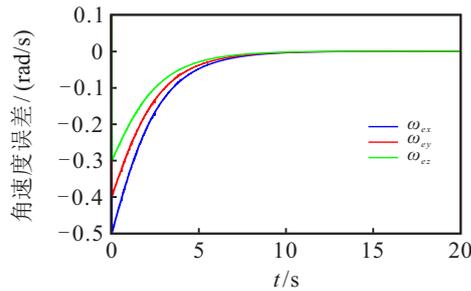


图3 角速度跟踪误差

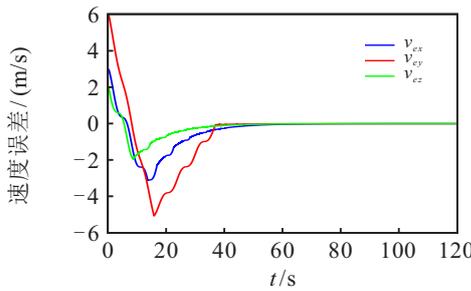


图4 速度跟踪误差

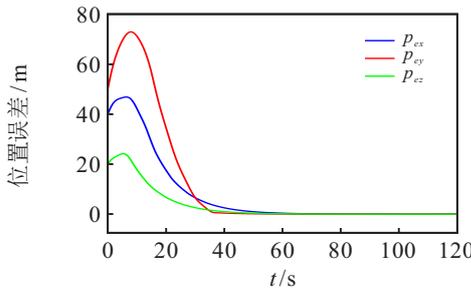


图5 位置跟踪误差

图2~图5分别展示了多旋翼无人机轨迹跟踪控制的姿态误差、角速度误差、位置误差与速度误差变化曲线,可以看出,随着内环控制系统状态快速收敛至平衡点后,外环控制系统状态也逐渐收敛至零,由此验证了内外环控制系统在本文所设计控制律作用下的稳定性.

图6与图7分别展示了 $z_e^{oT} P_1 z_e^o$ 与 $\hat{z}_e^{iT} P_2 \hat{z}_e^i$ 的变化曲线,可以看出, $z_e^{oT} P_1 z_e^o \leq \alpha$ 与 $\hat{z}_e^{iT} P_2 \hat{z}_e^i \leq \eta^2$ 始终满足,即外环控制系统状态与内环控制系统状态在本文所设计控制律的作用下始终处于相应的鲁棒正定不变集内.

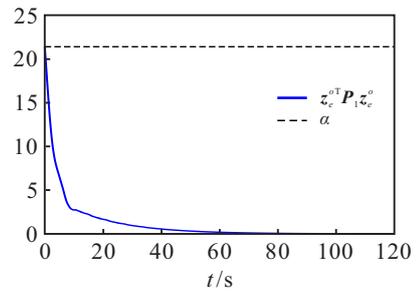


图6 $z_e^{oT} P_1 z_e^o$ 的变化

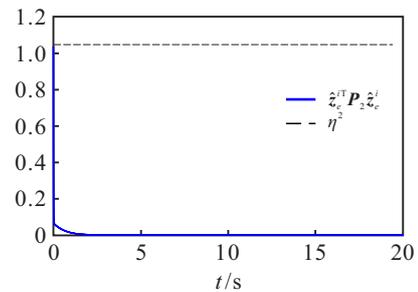


图7 $\hat{z}_e^{iT} P_2 \hat{z}_e^i$ 的变化

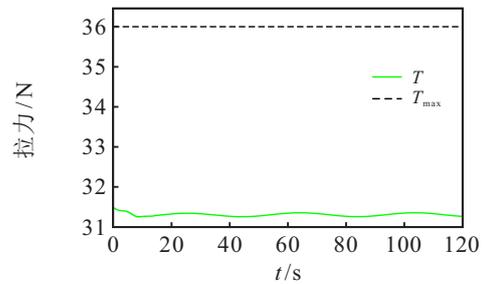


图8 拉力的变化

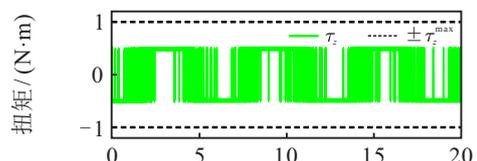
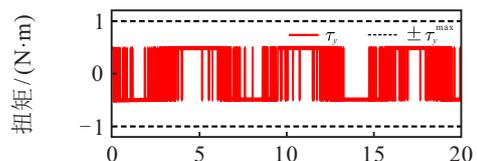
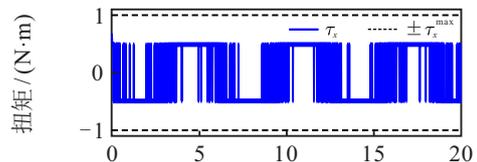


图9 扭矩的变化

图8与图9分别展示了无人机的升力与扭矩的变化曲线,可以看出,无人机的控制输入在整个控制过程中均未违反指定约束. 总体而言,当无人机跟踪误差状态位于本文所设计的鲁棒正定不变集内时,本文的控制律能够在满足指定控制输入约束的情况下保证该误差状态始终位于不变集内,且逐渐收敛至

零,由此验证了本文所设计的控制律与鲁棒正定不变集的有效性.

3.2 控制性能比较

为进一步验证本文方法的控制性能,本小节选择文献[6]中的方法为比较对象.选择初始跟踪误差状态为 $\mathbf{q}_e(0) = [0.6225 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.45]^T$, $\boldsymbol{\omega}_e(0) = [0 \ 0 \ 0]^T \text{rad/s}$, $\mathbf{p}_e(0) = [30 \ 50 \ -20]^T \text{m}$, $\mathbf{v}_e(0) = [2 \ 2 \ 2]^T \text{m/s}$.

采用本文所设计的控制律(14)和(24)与文献[6]所设计的控制律对无人机分别进行控制,仿真结果如图10~图17所示.图10~图13分别展示了无人机轨迹跟踪控制的姿态误差、角速度误差、位置误差与速度误差的变化曲线,可以看出,在同等条件下,本文所设计的控制律与文献[6]所设计的控制律均能够使得相应的误差状态收敛.值得注意的是,由图10~图13中的放大区域图可以看出,在保证误差状态收敛的前提下,文献[6]所设计的控制律只能保证误差趋于零附近的区域内,而本文所设计的控制律能够使得所有的误差均收敛至零(即实现了无静差控制效果),可见本文方法的跟踪控制精度更高.

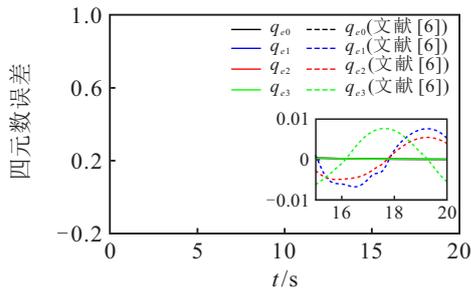


图10 姿态跟踪误差比较

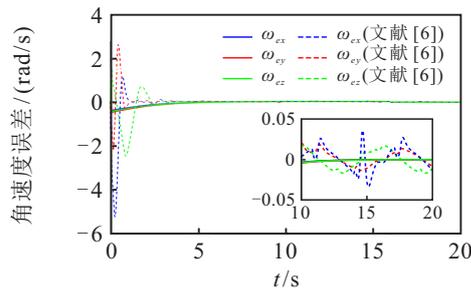


图11 角速度跟踪误差比较

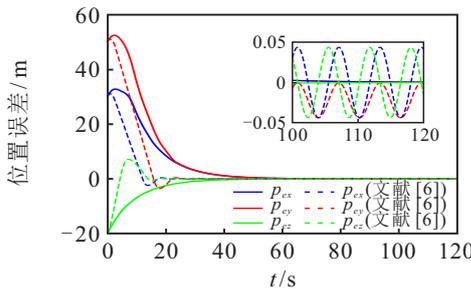


图12 位置跟踪误差比较

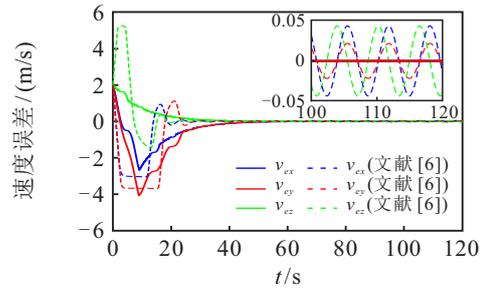


图13 速度跟踪误差比较

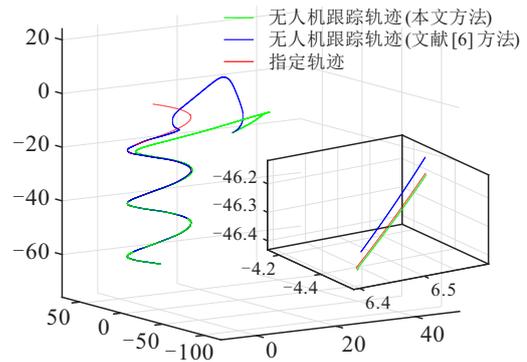


图14 轨迹跟踪比较

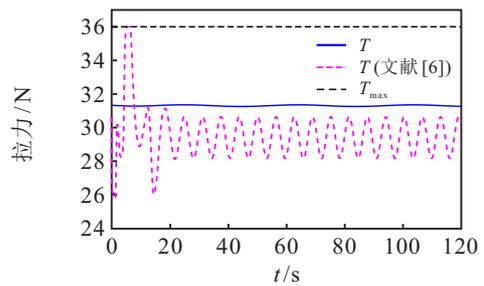


图15 拉力比较

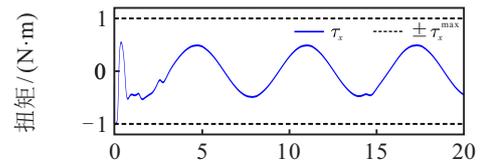


图16 文献[6] 扭矩变化

图14展示了无人机在轨迹跟踪过程中的运动轨迹,可以看出,本文所设计的控制律能够使无人机轨迹更接近于指定轨迹,即实现了更高精度的控制.

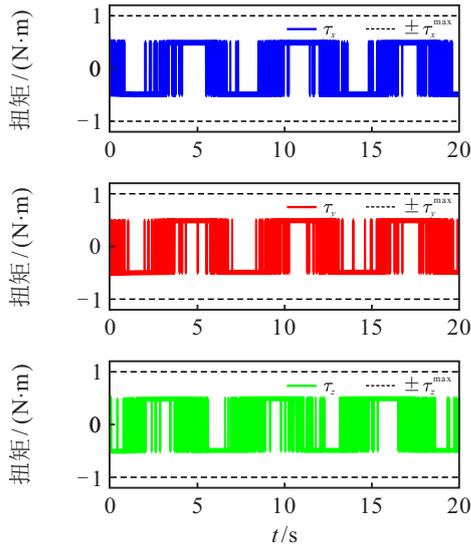


图17 本文扭矩变化

图15~图17分别展示了无人机的升力与扭矩变化曲线,可以看出,本文方法与文献[6]方法均能够保证无人机的控制输入满足相应的指定约束,而本文方法所要求的无人机升力波动更小.

4 结论

本文针对带有外部扰动且输入受限的多旋翼无人机轨迹跟踪问题,设计了非线性反馈控制律与鲁棒正定不变集,并给出了具体的LMIs优化问题来求解确定控制律与不变集参数.理论分析与仿真结果均可验证,当无人机跟踪误差状态位于所设计的不变集内时,在本文所设计的控制律作用下,该误差状态始终位于不变集内.此外,本文在控制设计过程中特别针对外部干扰进行了相应抵消,因此所设计的控制律能够实现轨迹跟踪的无静差控制.

附录A

根据指定的轨迹参数可确定出其最大角速度

$$\boldsymbol{\omega}_{d \max} = [\omega_{d1 \max} \quad \omega_{d2 \max} \quad \omega_{d3 \max}]^T, \quad (\text{A1})$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{d \max} = [\dot{\omega}_{d1 \max} \quad \dot{\omega}_{d2 \max} \quad \dot{\omega}_{d3 \max}]^T. \quad (\text{A2})$$

已知

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{q}_e) &= \\ & [(q_0^2 - \|\mathbf{q}_v\|^2)\mathbf{I}_{3 \times 3} + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^T + 2q_0[\mathbf{q}_v]_{\times}] = \\ & \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} &= \mathbf{R}(\mathbf{q}_e)\boldsymbol{\omega}_d = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{d1} \\ \omega_{d2} \\ \omega_{d3} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{12} \\ H_{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\mu\mathbf{J}(q_{e0}\mathbf{I} + [\mathbf{q}_{ev}]_{\times})\boldsymbol{\omega}_e =$$

$$\frac{1}{2}\mu\mathbf{J} \begin{bmatrix} q_{e0}\omega_{e1} - q_{e3}\omega_{e2} + q_{e2}\omega_{e3} \\ q_{e3}\omega_{e1} + q_{e0}\omega_{e2} - q_{e1}\omega_{e3} \\ -q_{e2}\omega_{e1} + q_{e1}\omega_{e2} + q_{e0}\omega_{e3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} H_{21} \\ H_{22} \\ H_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (J_z - J_y)(G_3G_2 + \omega_{e3}\omega_{e2}) + \\ (J_x - J_z + J_y)G_2\omega_{e3} \\ (J_x - J_z)(G_3G_1 + \omega_{e3}\omega_{e1}) + \\ (J_y - J_x + J_z)G_3\omega_{e1} \\ (J_y - J_x)(G_2G_1 + \omega_{e2}\omega_{e1}) + \\ (J_x - J_y + J_z)G_1\omega_{e2} \\ (J_y - J_z - J_x)G_3\omega_{e2} + \\ J_x(R_{11}\dot{\omega}_{d1} + R_{12}\dot{\omega}_{d2} + R_{13}\dot{\omega}_{d3}) \\ (J_z - J_y - J_x)G_1\omega_{e3} + \\ J_y(R_{21}\dot{\omega}_{d1} + R_{22}\dot{\omega}_{d2} + R_{23}\dot{\omega}_{d3}) \\ (J_x - J_y - J_z)G_2\omega_{e1} + \\ J_z(R_{31}\dot{\omega}_{d1} + R_{32}\dot{\omega}_{d2} + R_{33}\dot{\omega}_{d3}), \end{bmatrix} +$$

则控制律(24)可改写为

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}_T^{\max} \text{sign}\{\hat{\mathbf{x}}\} + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2.$$

根据单位四元数的范数约束、式(A1)与(A2)及基本不等式,有

$$\begin{aligned} |\tau_x| &= \\ & |\mathbf{F}_{\Gamma_x} \hat{\mathbf{z}}_e^i + d_{\Gamma_x}^{\max} \text{sign}\{\mu q_{e1} + \omega_{e1}\} + H_{11} + H_{21}| \leq \\ & |\mathbf{F}_{\Gamma_x} \hat{\mathbf{z}}_e^i| + d_{\Gamma_x}^{\max} + |H_{11}| + |H_{11}| = \\ & |\mathbf{F}_{\Gamma_x} \hat{\mathbf{z}}_e^i| + |\mathbf{C}_x \hat{\mathbf{z}}_e^i|^2 + \lambda_x, \\ |\tau_y| &= \\ & |\mathbf{F}_{\Gamma_y} \hat{\mathbf{z}}_e^i + d_{\Gamma_y}^{\max} \text{sign}\{\mu q_{e2} + \omega_{e2}\} + H_{12} + H_{22}| \leq \\ & |\mathbf{F}_{\Gamma_y} \hat{\mathbf{z}}_e^i| + d_{\Gamma_y}^{\max} + |H_{12}| + |H_{22}| = \\ & |\mathbf{F}_{\Gamma_y} \hat{\mathbf{z}}_e^i| + |\mathbf{C}_y \hat{\mathbf{z}}_e^i|^2 + \lambda_y, \\ |\tau_z| &= \\ & |\mathbf{F}_{\Gamma_z} \hat{\mathbf{z}}_e^i + d_{\Gamma_z}^{\max} \text{sign}\{\mu q_{e3} + \omega_{e3}\} + H_{13} + H_{23}| \leq \\ & |\mathbf{F}_{\Gamma_z} \hat{\mathbf{z}}_e^i| + d_{\Gamma_z}^{\max} + |H_{13}| + |H_{23}| = \\ & |\mathbf{F}_{\Gamma_z} \hat{\mathbf{z}}_e^i| + |\mathbf{C}_z \hat{\mathbf{z}}_e^i|^2 + \lambda_z. \end{aligned}$$

其中 C_s 与 $\lambda_s (s = x, y, z)$ 的具体参数如下:

$$c_{x1} = \left[|J_x - J_z + J_y| (\omega_{d1 \max} + \omega_{d3 \max}) + \frac{\mu J_x}{4} + |J_y - J_z - J_x| (\omega_{d1 \max} + \omega_{d2 \max}) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A3)$$

$$c_{x2} = \left[|J_x - J_z + J_y| \left(\frac{\omega_{d2 \max}}{2} + \omega_{d3 \max} \right) + \frac{\mu J_x}{4} + |J_y - J_z - J_x| \left(\omega_{d1 \max} + \frac{\omega_{d3 \max}}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A4)$$

$$c_{x3} = \left[|J_x - J_z + J_y| \omega_{d1 \max} + \frac{\mu J_x}{4} + |J_y - J_z - J_x| \omega_{d2 \max} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A5)$$

$$c_{x4} = \left[\frac{\mu J_x}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A6)$$

$$c_{x5} = \left[|J_y - J_z - J_x| \left(2\omega_{d1 \max} + 2\omega_{d2 \max} + \frac{\omega_{d3 \max} + 1}{2} \right) + \frac{|J_z - J_y|}{2} + \frac{\mu J_x}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A7)$$

$$c_{x6} = \left[|J_x - J_z + J_y| \left(2\omega_{d1 \max} + 2\omega_{d3 \max} + \frac{\omega_{d2 \max} + 1}{2} \right) + \frac{|J_z - J_y|}{2} + \frac{\mu J_x}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A8)$$

$$c_{y1} = \left[|J_y - J_x + J_z| (\omega_{d1 \max} + \omega_{d2 \max}) + \frac{\mu J_y}{4} + |J_z - J_y - J_x| \frac{\omega_{d1 \max}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A9)$$

$$c_{y2} = \left[|J_y - J_x + J_z| \left(\omega_{d1 \max} + \frac{\omega_{d3 \max}}{2} \right) + \frac{\mu J_y}{4} + |J_z - J_y - J_x| (\omega_{d2 \max} + \omega_{d3 \max}) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A10)$$

$$c_{y3} = \left[|J_y - J_x + J_z| \omega_{d2 \max} + \frac{\mu J_y}{4} + |J_z - J_y - J_x| (\omega_{d2 \max} + \omega_{d3 \max}) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A11)$$

$$c_{y4} = \left[|J_y - J_x + J_z| \left(2\omega_{d1 \max} + 2\omega_{d2 \max} + \frac{\omega_{d3 \max} + 1}{2} \right) + \frac{|J_x - J_z|}{2} + \frac{\mu J_y}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A12)$$

$$c_{y5} = \left[\frac{\mu J_y}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A13)$$

$$c_{y6} = \left[|J_z - J_y - J_x| \left(\frac{\omega_{d1 \max} + 1}{2} + 2\omega_{d2 \max} + 2\omega_{d3 \max} \right) + \frac{|J_x - J_z|}{2} + \frac{\mu J_y}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A14)$$

$$c_{z1} = \left[|J_x - J_y + J_z| \frac{\omega_{d1 \max}}{2} + \frac{\mu J_y}{4} + |J_x - J_y - J_z| (\omega_{d1 \max} + \omega_{d3 \max}) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A15)$$

$$c_{z2} = \left[|J_x - J_y + J_z| (\omega_{d2 \max} + \omega_{d3 \max}) + \frac{\mu J_y}{4} + |J_x - J_y + J_z| \left(\frac{\omega_{d2 \max}}{2} + \omega_{d3 \max} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A16)$$

$$c_{z3} = \left[|J_x - J_y + J_z| (\omega_{d2 \max} + \omega_{d3 \max}) + \frac{\mu J_z}{4} + |J_x - J_y - J_z| \omega_{d1 \max} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A17)$$

$$c_{z4} = \left[|J_x - J_y - J_z| \left(2\omega_{d1 \max} + \frac{\omega_{d2 \max} + 1}{2} + 2\omega_{d3 \max} \right) + \frac{|J_y - J_x|}{2} + \frac{\mu J_z}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A18)$$

$$c_{z5} = \left[|J_x - J_y + J_z| \left(\frac{\omega_{d1 \max} + 1}{2} + 2\omega_{d2 \max} + 2\omega_{d3 \max} \right) + \frac{|J_y - J_x|}{2} + \frac{\mu J_z}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A19)$$

$$c_{z6} = \left[\frac{\mu J_z}{4} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (A20)$$

$$\lambda_x = |J_z - J_y| \|\omega_{d \max}\|^2 + J_x \|\omega_{d \max}\| + d_{\Gamma x}^{\max} + |J_x - J_y + J_z| \frac{\omega_{d2 \max}^2}{2} + \frac{\mu J_x}{4} + |J_y - J_z - J_x| \frac{\omega_{d3 \max}^2}{2}, \quad (A21)$$

$$\lambda_y = |J_x - J_z| \|\omega_{d \max}\|^2 + J_y \|\omega_{d \max}\| + d_{\Gamma y}^{\max} + |J_y - J_x + J_z| \frac{\omega_{d3 \max}^2}{2} + \frac{\mu J_y}{4} + |J_z - J_y - J_x| \frac{\omega_{d1 \max}^2}{2}, \quad (A22)$$

$$\lambda_z = |J_y - J_x| \|\omega_{d \max}\|^2 + J_z \|\omega_{d \max}\| + \frac{\mu J_z}{4} + |J_x - J_y + J_z| \frac{\omega_{d1 \max}^2}{2} + d_{\Gamma z}^{\max} + |J_x - J_y - J_z| \frac{\omega_{d2 \max}^2}{2}. \quad (A23)$$

参考文献 (References)

- [1] Kalantar B, Mansor S B, Halin A A, et al. Multiple moving object detection from UAV videos using trajectories of matched regional adjacency graphs[J]. IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing, 2017, 5(99): 5198-5213.
- [2] Camci E, Kripalani D R, Ma L L, et al. An aerial robot for rice farm quality inspection with type-2 fuzzy neural networks tuned by particle swarm optimization-sliding mode control hybrid algorithm[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2018, 41: 1-8.
- [3] Bhola R, Krishna N H, Ramesh K N, et al. Detection of the power lines in UAV remote sensed images using spectral-spatial methods[J]. Journal of Environmental Management, 2018, 206: 1233-1242.
- [4] Wang J J, Liu G Y. Saturated control design of a quadrotor with heterogeneous comprehensive learning particle swarm optimization[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2019, 46: 84-96.
- [5] Xiong J J, Zheng E H. Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV[J]. ISA Transactions, 2014, 53(3): 725-731.
- [6] Wang R, Liu J K. Trajectory tracking control of a 6-DOF quadrotor UAV with input saturation via backstepping[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(7): 3288-3309.

- [7] Najm A A, Ibraheem I K. Nonlinear PID controller design for a 6-DOF UAV quadrotor system[J]. Engineering Science and Technology, 2019, 22(4): 1087-1097.
- [8] Wang L, Jia H M. The trajectory tracking problem of quadrotor UAV: Global stability analysis and control design based on the cascade theory[J]. Asian Journal of Control, 2014, 16(2): 574-588.
- [9] Lee T, Leok M, McClamroch N H. Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3)[C]. Conference on Decision and Control (CDC). Atlanta: IEEE, 2010: 5420-5425.
- [10] Invernizzi D, Lovera M. Trajectory tracking control of thrust-vectoring UAVs[J]. Automatica, 2018, 95: 180-186.
- [11] Fu C Y, Tian Y T, Huang H Y, et al. Finite-time trajectory tracking control for a 12-rotor unmanned aerial vehicle with input saturation[J]. ISA Transactions, 2018, 81: 52-62.
- [12] Altuğ E, Ostrowski J P, Mahony R. Control of a quadrotor helicopter using visual feedback[C]. Robotics & Automation. Washington DC: IEEE, 2002: 72-77.
- [13] Chikasha P N, Dube C. Adaptive model predictive control of a quadrotor[J]. IFAC-PapersOnLine, 2017, 50(2): 157-162.
- [14] Alexis K, Nikolakopoulos G, Tzes A. Switching model predictive attitude control for a quadrotor helicopter subject to atmospheric disturbances[J]. Control Engineering Practice, 2011, 19(10): 1195-1207.
- [15] Bouabdallah S, Noth A, Siegwart R. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor[C]. Intelligent Robots & Systems. Sendai: IEEE, 2004: 2451-2456.
- [16] Liu X T, Shi Y, Constantinescu D. Robust distributed model predictive control of constrained dynamically decoupled nonlinear systems: A contraction theory perspective[J]. Systems & Control Letters, 2017, 105: 84-91.
- [17] Chen F Y, Lei W, Zhang K K, et al. A novel nonlinear resilient control for a quadrotor UAV via backstepping control and nonlinear disturbance observer[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 85(2): 1281-1295.
- [18] Castillo A, Sanz R, Garcia P, et al. Disturbance observer-based quadrotor attitude tracking control for aggressive maneuvers[J]. Control Engineering Practice, 2019, 82: 14-23.
- [19] Wang P, Feng X X, Li W W, et al. Robust RHC for wheeled vehicles with bounded disturbances[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(7): 2063-2081.
- [20] Wang P, Feng X X, Li W H, et al. DRHC synthesis for simultaneous tracking and formation of nonhomogeneous multi-agents with time-varying communication topology[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2017, 14(3): 1-15.
- [21] Wang P, Ding B C. Distributed RHC for tracking and formation of nonholonomic multi-vehicle systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(6): 1439-1453.
- [22] Wang P, Ding B C. A synthesis approach of distributed model predictive control for homogeneous multi-agent system with collision avoidance[J]. International Journal of Control, 2014, 87(1): 52-63.
- [23] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. Automatica, 2000, 36(6): 789-814.
- [24] Wang P, Feng X X, Li W W. Design of robust positively invariant set for nonholonomic vehicle[C]. Chinese Control and Decision Conference. Yinchuan: IEEE, 2016: 814-819.
- [25] Zhang R, Quan Q, Cai K Y. Attitude control of a quadrotor aircraft subject to a class of time-varying disturbances[J]. IET Control Theory & Applications, 2011, 5(9): 1140-1146.

作者简介

李志南(1993—), 男, 博士生, 从事无人机控制、算法优化的研究, E-mail: 745749409@qq.com;

李卫华(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事信息处理与智能控制等研究, E-mail: lwh_kgd@163.com;

王鹏(1985—), 男, 副教授, 博士, 从事预测控制与信息处理等研究, E-mail: blueking1985@hotmail.com;

曹越(1997—), 男, 硕士生, 从事无人机控制的研究, E-mail: 1031714803@qq.com.

(责任编辑: 齐 霖)