乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系

何霞，刘卫锋，常娟

引用本文:
何霞, 刘卫锋, 常娟. 乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系[J]. 控制与决策, 2021, 36(4): 1010-1016.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0967

乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系

何 霞[†], 刘卫锋, 常 娟

(郑州航空工业管理学院 数学学院，郑州 450046)

摘 要: 毕达哥拉斯模糊偏好关系(PFPR)是直觉模糊偏好关系的推广,也是毕达哥拉斯模糊集的重要研究领域. 相对于其他模糊偏好关系而言,毕达哥拉斯模糊偏好关系在表达决策者的模糊偏好时更加灵活有力. 在乘型一致性区间模糊偏好关系和乘型一致性直觉模糊偏好关系研究成果的启发下,定义毕达哥拉斯模糊偏好关系的乘型一致性,并提出利用毕达哥拉斯模糊权重向量构造乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系的公式. 以给定的毕达哥拉斯模糊偏好关系与构造的乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系的偏差最小为目标函数建立并求解优化模型,从而获取毕达哥拉斯模糊偏好关系的标准化权重向量,为方案排序提供一种可行的方法. 计算实例分析表明,所提出方法是可行有效的.

关键词: 毕达哥拉斯模糊集；毕达哥拉斯模糊偏好关系；乘型一致性；优化模型；权重向量；决策

中图分类号: O223；C934　　**文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0967　　**开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

引用格式: 何霞,刘卫锋,常娟. 乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系[J]. 控制与决策, 2021, 36(4): 1010-1016.

Multiplicative consistent Pythagorean fuzzy preference relation

HE Xia[†], *LIU Wei-feng*, *CHANG Juan*

(School of Mathematics，Zhengzhou University of Aeronautic，Zhengzhou 450046，China)

Abstract: As an expansion of the intuitionistic fuzzy preference relation, the Pythagorean fuzzy preference relation (PFPR) is an important research direction of Pythagorean fuzzy set. The Pythagorean fuzzy preference relation, which expresses fuzzy preference information of a decision maker, is more powerful than the other fuzzy preference relations. Inspired by the multiplicative consistent interval fuzzy preference relation and the multiplicative consistent intuitionistic fuzzy preference relation, the multiplicative consistency of Pythagorean fuzzy preference relation is defined, and a formula, which involves the underlying Pythagorean fuzzy weights of the PFPR, is proposed to construct such a multiplicative consistent PFPR. Then, the normalized weight vector of the PFPR is obtained by building and solving an optimization model, whose objective function is the deviation between the original PFPR and the multiplicative consistent PFPR constructed. An example is used to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Keywords: Pythagorean fuzzy set；Pythagorean fuzzy preference relation；multiplicative consistency；programming model；weighted vector；decision making

0 引 言

偏好关系[1]又称成对比较判断矩阵,是由专家通过对备选方案进行两两比较而得到的一个矩阵结构,其元素表示一个方案相对于另一个方案的偏好程度,其优点[2]是专家不再需要确定方案在每个指标上的精确值,而是能够根据认知来主观地表达自己的评估和判断. 但是需要注意的是,专家的主观评估和判断,是在其收集到充分足够的数据,以及对决策方案和决策问题进行了深入、细致和充分了解的基础上作出的,因此是可靠的和可信的. 传统的偏好关系[1]使用Saaty定义的1/9-9标度表示方案间的偏好程度,但是当涉及不确定性的复杂问题时,就会出现专家难以利用1/9-9标度来表示偏好程度的情况. 于是,模糊偏好关系[3-4]、区间模糊偏好关系[5-6]应运而生,这两种偏好关系分别借助于隶属度和区间隶属度合理地表达专家的偏好. 随着决策问题的日益复杂化,当决策者对评价方案认知不足时,决策者可能更加倾向于使用肯定、否定和犹豫3方面来表示其对方案的偏好[7],

收稿日期: 2019-07-10；**修回日期:** 2019-12-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11501525)；河南省杰出青年基金项目(2018JQ0004)；河南省高等学校重点科研项目(20A110035)；河南省高等学校重点科研项目计划基础研究专项项目(20zx003).

责任编委: 梁樑.

[†]通讯作者. E-mail: hexia0723@163.com.

此时使用模糊偏好关系和区间模糊偏好关系表达就会出现力不从心的现象,而直觉模糊偏好关系[8]正好可以从隶属度、非隶属度和犹豫度3方面反映决策者的肯定、否定和犹豫偏好.为此,许多学者对直觉模糊偏好关系进行了深入地研究,并取得了一系列成果[8-13],为直觉模糊偏好关系的决策应用奠定了基础.

最近几年,作为直觉模糊集的一种推广,文献[14-15]提出的毕达哥拉斯模糊集引起了学者们的关注.毕达哥拉斯模糊集不仅保持了直觉模糊集考虑隶属度和非隶属的优势,而且可以刻画隶属度与非隶属度之和超过1,而其平方和不超过1的现象,即其将直觉模糊集隶属度μ和非隶属度ν构成的取值区域由三角形($\mu+\nu\leqslant 1$)扩充到四分之一圆($\mu^2+\nu^2\leqslant 1$),区域扩充使得毕达哥拉斯模糊集的信息量约为直觉模糊集的1.57倍,并保证了任意直觉模糊集均为毕达哥拉斯模糊集,故而毕达哥拉斯模糊集在描述客观世界的模糊性现象时比直觉模糊集更加灵活和有力,因此研究毕达哥拉斯模糊集及其应用具有重要的理论和现实意义.目前,关于毕达哥拉斯模糊集的研究已经取得了初步的研究成果,且主要集中在决策领域[14-36],涉及各种集成算子[14-23]、经典决策方法推广[25-26]、距离测度[25,27]、相关系数[28]以及各种毕达哥拉斯模糊杂合集合[29-35].

最近,文献[36]考虑到毕达哥拉斯模糊集的优势特征,通过研究区间模糊偏好关系和直觉模糊偏好关系以及标准化区间模糊权重向量[6]和标准化直觉模糊权重向量[9],定义了毕达哥拉斯模糊偏好关系、毕达哥拉斯模糊加型一致性偏好关系以及标准化毕达哥拉斯模糊权重向量,并给出使用标准化毕达哥拉斯模糊权重向量构造毕达哥拉斯模糊加型一致性偏好关系的优化模型方法,开辟了毕达哥拉斯模糊集研究的新方向.但是,该研究仅仅考虑了毕达哥拉斯模糊偏好关系的加型一致性,从模糊偏好关系、区间模糊偏好关系以及直觉模糊偏好关系的研究成果可知,乘型一致性也是各种偏好关系研究的重要内容.因此,本文在上述研究基础上,研究毕达哥拉斯模糊偏好关系的乘型一致性.首先,回顾毕达哥拉斯模糊集、毕达哥拉斯模糊偏好关系、毕达哥拉斯模糊加型一致性偏好关系以及标准化毕达哥拉斯模糊权重向量等内容;其次,定义毕达哥拉斯模糊偏好关系的乘型一致性,提出利用毕达哥拉斯模糊权重向量构造乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系的公式;然后,考虑到决策者给出的毕达哥拉斯模糊偏好关系并非总是满足乘型一致性,故而通过最小化专家给出的毕达哥拉斯模糊偏好关系与相应的乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系的离差,建立并求解一个优化模型,得到毕达哥拉斯模糊权重向量;最后,通过算例说明所提出方法的可行性.

1　相关概念

定义1[14-15]　设X为论域,则称$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\}$为$X$上的一个毕达哥拉斯模糊集.其中:$\mu_A:X\rightarrow[0,1],\nu_A:X\rightarrow[0,1]$是$X$上的模糊集,$\mu_A(x)$、$\nu_A(x)$分别表示$X$上元素$x$属于$A$的隶属度和非隶属度,且$\forall x\in X,\mu_A(x)$、$\nu_A(x)\in[0,1]$,有$\mu_A^2(x)+\nu_A^2(x)\leqslant 1$.

称$\alpha=\langle\mu_\alpha,\nu_\alpha\rangle$为毕达哥拉斯模糊数[25].

定义2[25]　设$\alpha=\langle\mu_\alpha,\nu_\alpha\rangle$, $\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle(i=1,2)$为毕达哥拉斯模糊数,定义:

1) $\alpha_1\bigoplus\alpha_2=\langle\sqrt{\mu_{\alpha_1}^2+\mu_{\alpha_2}^2-\mu_{\alpha_1}^2\mu_{\alpha_2}^2},\nu_{\alpha_1}\nu_{\alpha_1}\rangle$;

2) $\alpha_1\bigotimes\alpha_2=\langle\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_1},\sqrt{\nu_{\alpha_1}^2+\nu_{\alpha_2}^2-\nu_{\alpha_1}^2\nu_{\alpha_2}^2}\rangle$;

3) $\lambda\alpha=\langle\sqrt{1-(1-\mu_\alpha^2)^\lambda},\nu_\alpha^\lambda\rangle$;

4) $\alpha^\lambda=\langle\mu_\alpha^\lambda,\sqrt{1-(1-\nu_\alpha^2)^\lambda}\rangle$.

定义3[25]　设$\alpha=\langle\mu_\alpha,\nu_\alpha\rangle$为毕达哥拉斯模糊数,定义$s(\alpha)=\mu_\alpha^2-\nu_\alpha^2$为$\alpha$的得分函数.

定义4[25]　设$\alpha_i=\langle\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i}\rangle(i=1,2)$为毕达哥拉斯模糊数,定义:

1) 若$s(\alpha_1)<s(\alpha_2)$,则$\alpha_1\prec\alpha_2$;

2) 若$s(\alpha_1)=s(\alpha_2)$,则$\alpha_1\approx\alpha_2$.

定义5[36]　设X为论域,若$P=(p_{ij})_{nn}=(\langle\mu_{ij},\nu_{ij}\rangle)_{nn}$,则称$P$为定义在$X$上的毕达哥拉斯模糊偏好关系.其中:$\mu_{ii}=\nu_{ii}=\sqrt{2}/2,\mu_{ij}=\nu_{ji},\nu_{ij}=\mu_{ji},i,j=1,2,\ldots,n,\mu_{ij}$表示方案$x_i$相对于$x_j$的偏好程度,$\nu_{ij}$表示方案$x_j$相对于$x_i$的偏好程度,$\pi_{ij}=\sqrt{1-\mu_{ij}^2-\nu_{ij}^2}$表示不确定程度.

定义6[36]　设$P=(p_{ij})_{mn}=(\langle\mu_{ij},\nu_{ij}\rangle)_{nn}$为论域$X$上的毕达哥拉斯模糊偏好关系,若$\mu_{ij}^2+\mu_{jk}^2+\mu_{ki}^2=\mu_{kj}^2+\mu_{ji}^2+\mu_{ik}^2,\ i,j,k=1,2,\ldots,n$,则称$P$为毕达哥拉斯模糊加型一致性偏好关系.

定义7[36]　设权重向量$w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)^{\mathrm{T}}$,其中$w_i=(w_i^\mu,w_i^\nu)(i=1,2,\ldots,n)$为毕达哥拉斯模糊数,若$\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}(w_j^\mu)^2\leqslant(w_i^\nu)^2,\ \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}(w_j^\nu)^2\leqslant n-2+(w_i^\mu)^2$,则称$w$为标准化毕达哥拉斯模糊权重向量.

2　乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系

文献[3-4]定义了模糊偏好关系,文献[4]定义了模糊偏好关系的加型和乘型一致性,文献[4,10]对偏好关系和模糊偏好关系进行了研究,并分别从差和商

两个角度对它们作出合理的解释,然后结合已有的直觉模糊偏好关系的一致性[8-9,11-12],提出了乘型一致性直觉模糊偏好关系. 在文献[10]的启发下,定义乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系.

定义8 设 $P=(p_{ij})_{nn}=(\langle\mu_{ij},\nu_{ij}\rangle)_{nn}$ 为论域 X 上的毕达哥拉斯模糊偏好关系,若 $\mu_{ij}\mu_{jk}\mu_{ki}=\mu_{ji}\mu_{ik}\mu_{kj}$, $i,j,k=1,2,\ldots,n$,则称 P 为乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系.

注1 由于毕达哥拉斯模糊偏好关系中 $\mu_{ij}=\nu_{ji},\nu_{ij}=\mu_{ji}$,则上面的条件可以改写为 $\nu_{ji}\nu_{kj}\nu_{ik}=\nu_{ij}\nu_{ki}\nu_{jk}$, $i,j,k=1,2,\ldots,n$. 因此,该式也可以作为毕达哥拉斯模糊偏好关系的乘型一致性的条件.

注2 若毕达哥拉斯模糊集退化为模糊集(即仅考虑隶属度),则有 $\mu_{ij}\mu_{jk}\mu_{ki}=\mu_{ji}\mu_{ik}\mu_{kj}$,此式正是乘型一致性模糊偏好关系的定义,因此定义8可以被看作是乘型一致性模糊偏好关系的推广.

由于直觉模糊集是毕达哥拉斯模糊集的特列,该定义自然也可以被看作是乘型一致性直觉模糊偏好关系的推广.

注3 参考文献[4,10]中对乘型一致性模糊偏好关系的解释,可以对乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系进行类似解释.

定理1 设权重向量 $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为标准化毕达哥拉斯模糊权重向量,令 $p_{ij}=\langle\mu_{ij},\nu_{ij}\rangle$. 其中:当 $i=j$ 时,有

$$\mu_{ij}=\nu_{ij}=\sqrt{2}/2;$$

当 $i\neq j$ 时,有

$$\mu_{ij}=\sqrt{\frac{2(w_i^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2-(w_i^\nu)^2+(w_j^\mu)^2-(w_j^\nu)^2+2}},$$

$$\nu_{ij}=\sqrt{\frac{2(w_j^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2-(w_i^\nu)^2+(w_j^\mu)^2-(w_j^\nu)^2+2}}.$$

则 $P=(p_{ij})_{nn}$ 为乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系.

证明 首先,证明 $P=(p_{ij})_{nn}$ 为毕达哥拉斯模糊偏好关系.

1) $\forall i,j=1,2,\ldots,n$,有 $\mu_{ij}=\nu_{ji},\nu_{ij}=\mu_{ji}$.

2) 注意到不等式 $1-(w_i^\nu)^2\geqslant(w_i^\mu)^2$,则有

$$0\leqslant\sqrt{\frac{2(w_i^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2-(w_i^\nu)^2+(w_j^\mu)^2-(w_j^\nu)^2+2}}=$$

$$\sqrt{\frac{2(w_i^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2+(1-(w_i^\nu)^2)+(w_j^\mu)^2+(1-(w_j^\nu)^2)}}\leqslant$$

$$\sqrt{\frac{2(w_i^\mu)^2}{2(w_i^\mu)^2+2(w_j^\mu)^2}}=\sqrt{\frac{(w_i^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2+(w_j^\mu)^2}}\leqslant 1,$$

$$0\leqslant\sqrt{\frac{2(w_j^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2-(w_i^\nu)^2+(w_j^\mu)^2-(w_j^\nu)^2+2}}=$$

$$\sqrt{\frac{2(w_j^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2+(1-(w_i^\nu)^2)+(w_j^\mu)^2+(1-(w_j^\nu)^2)}}\leqslant$$

$$\sqrt{\frac{2(w_j^\mu)^2}{2(w_i^\mu)^2+2(w_j^\mu)^2}}=\sqrt{\frac{(w_j^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2+(w_j^\mu)^2}}\leqslant 1,$$

且有

$$\Big(\sqrt{\frac{2(w_i^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2-(w_i^\nu)^2+(w_j^\mu)^2-(w_j^\nu)^2+2}}\Big)^2+$$

$$\Big(\sqrt{\frac{2(w_j^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2-(w_i^\nu)^2+(w_j^\mu)^2-(w_j^\nu)^2+2}}\Big)^2=$$

$$\frac{2(w_i^\mu)^2+2(w_j^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2-(w_i^\nu)^2+(w_j^\mu)^2-(w_j^\nu)^2+2}=$$

$$\frac{2(w_i^\mu)^2+2(w_j^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2+(1-(w_i^\nu)^2)+(w_j^\mu)^2+(1-(w_j^\nu)^2)}\leqslant$$

$$\frac{2(w_i^\mu)^2+2(w_j^\mu)^2}{2(w_i^\mu)^2+2(w_j^\mu)^2}=1.$$

其次,容易验证 $\mu_{ij}\mu_{jk}\mu_{ki}=\mu_{ji}\mu_{ik}\mu_{kj}$,故 $P=(p_{ij})_{nn}$ 满足乘型一致性. 所以, $P=(p_{ij})_{nn}$ 为乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系. □

推论1 设 $P=(p_{ij})_{nn}$ 为乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系,且有:

当 $i=j$ 时,有 $\mu_{ij}=\nu_{ij}=\sqrt{2}/2$;

当 $i\neq j$ 时,有

$$\mu_{ij}=\sqrt{\frac{2(w_i^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2-(w_i^\nu)^2+(w_j^\mu)^2-(w_j^\nu)^2+2}},$$

$$\nu_{ij}=\sqrt{\frac{2(w_j^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2-(w_i^\nu)^2+(w_j^\mu)^2-(w_j^\nu)^2+2}}.$$

其中 $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为标准化毕达哥拉斯模糊权重向量.

若设 $r_{ij}^\mu=\mu_{ij}^2,r_{ij}^\nu=\nu_{ij}^2$,则得到 $r_{ij}=\langle r_{ij}^\mu,r_{ij}^\nu\rangle$,其中:

当 $i=j$ 时,有 $r_{ij}^\mu=r_{ij}^\nu=\sqrt{2}/2$;

当 $i\neq j$ 时,有

$$r_{ij}^\mu=\frac{2(w_i^\mu)^2}{(w_i^\mu)^2-(w_i^\nu)^2+(w_j^\mu)^2-(w_j^\nu)^2+2},$$

$$r_{ij}^{\nu} = \frac{2(w_j^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2+2}.$$

在此基础上,如果令 $\tilde{w}_i = (w_i^-, w_i^+) = ((w_i^{\mu})^2, (w_i^{\nu})^2)$, $i=1,2,\ldots,n$,则得到:

当 $i=j$ 时,有 $r_{ij} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$;

当 $i \neq j$ 时,有

$$r_{ij}^{\mu} = \frac{2w_i^-}{w_i^- - w_i^+ + w_j^- - w_j^+ + 2},$$

$$r_{ij}^{\nu} = \frac{2w_j^-}{w_i^- - w_i^+ + w_j^- - w_j^+ + 2}.$$

即有 $R=(r_{ij})_{nn}$.

进一步,若 $w_i^- + w_i^+ = 1$,则 $r_{ij} = \frac{w_i^-}{w_i^- + w_j^-}$.此时 $P=(p_{ij})_{nn}$ 退化为乘型一致性模糊偏好关系.

3 毕达哥拉斯模糊权重向量

文献[10]在研究直觉模糊偏好关系的乘型一致性时,考虑到专家往往很难直接给出积型一致性,于是只能期望专家给出的直觉模糊偏好关系与其相应的积型一致性直觉模糊偏好关系的离差尽可能地小,为此引入相关的离差变量,并建立规划模型,从而求出直觉模糊权重向量.

考虑到实际决策过程中,决策者给出的毕达哥拉斯模糊偏好关系并非总是满足乘型一致性,故而也总是期望专家给出的毕达哥拉斯模糊偏好关系与相应的乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系的离差尽可能地小,为此引入离差变量

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2(w_i^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2} - \mu_{ij}^2,$$

$$\xi_{ij} = \frac{2(w_j^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2} - \nu_{ij}^2.$$

其中: $i,j=1,2,\ldots,n, i\neq j$. 显然, $|\varepsilon_{ij}|$、$|\xi_{ij}|$ 越小越好,为此建立如下规划模型:

$$\begin{aligned}
&\min\ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(|\varepsilon_{ij}|+|\xi_{ij}|).\\
&\text{s.t.}\ \varepsilon_{ij} = \frac{2(w_i^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2} - \mu_{ij}^2,\\
&\qquad \xi_{ij} = \frac{2(w_j^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2} - \nu_{ij}^2,\\
&\qquad i,j=1,2,\ldots,n,\ i\neq j;\\
&\qquad w_i^{\mu}, w_i^{\nu} \in [0,1],\ (w_i^{\mu})^2+(w_i^{\nu})^2 \leqslant 1,\\
&\qquad \sum_{j=1,j\neq i}^{n}(w_j^{\mu})^2 \leqslant (w_i^{\nu})^2,\\
&\qquad \sum_{j=1,j\neq i}^{n}(w_j^{\nu})^2 \leqslant n-2+(w_i^{\mu})^2,\\
&\qquad i=1,2,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{1}$$

考虑到 $\mu_{ij}=\nu_{ji}, \mu_{ji}=\nu_{ij}$,故而仅需考虑上三角形或者下三角形的离差总和即可,因此如下规划模型与模型(1)等价:

$$\begin{aligned}
&\min\ z = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(|\varepsilon_{ij}|, |\xi_{ij}|).\\
&\text{s.t.}\ \varepsilon_{ij} = \frac{2(w_i^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2} - \mu_{ij}^2,\\
&\qquad \xi_{ij} = \frac{2(w_j^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2} - \nu_{ij}^2,\\
&\qquad i=1,2,\ldots,n-1,\ j=i+1,i+2,\ldots,n;\\
&\qquad w_i^{\mu},\ w_i^{\nu} \in [0,1],\ (w_i^{\mu})^2+(w_i^{\nu})^2 \leqslant 1,\\
&\qquad \sum_{j=1,j\neq i}^{n}(w_j^{\mu})^2 \leqslant (w_i^{\nu})^2,\\
&\qquad \sum_{j=1,j\neq i}^{n}(w_j^{\nu})^2 \leqslant n-2+(w_i^{\mu})^2,\\
&\qquad i=1,2,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{2}$$

采用下述方法可以消除目标函数中的绝对值符号. 为此令 $\varepsilon_{ij}^+ = \frac{|\varepsilon_{ij}|+\varepsilon_{ij}}{2}$, $\varepsilon_{ij}^- = \frac{|\varepsilon_{ij}|-\varepsilon_{ij}}{2}$,则有 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^+ - \varepsilon_{ij}^-$, $|\varepsilon_{ij}| = \varepsilon_{ij}^+ + \varepsilon_{ij}^-$, $\varepsilon_{ij}^+ \geqslant 0$, $\varepsilon_{ij}^- \geqslant 0$, $\varepsilon_{ij}^+\varepsilon_{ij}^- = 0$.

类似地,令 $\xi_{ij}^+ = \frac{|\xi_{ij}|+\xi_{ij}}{2}$, $\xi_{ij}^- = \frac{|\xi_{ij}|-\xi_{ij}}{2}$,则有 $\xi_{ij} = \xi_{ij}^+ - \xi_{ij}^-$, $|\xi_{ij}| = \xi_{ij}^+ + \xi_{ij}^-$, $\xi_{ij}^+ \geqslant 0$, $\xi_{ij}^- \geqslant 0$, $\xi_{ij}^+\xi_{ij}^- = 0$.

于是,模型(2)可以转化为

$$\begin{aligned}
&\min\ z = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\varepsilon_{ij}^+ + \varepsilon_{ij}^- + \xi_{ij}^+ + \xi_{ij}^-).\\
&\text{s.t.}\ \frac{2(w_i^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2} -\\
&\qquad \mu_{ij}^2 - \varepsilon_{ij}^+ - \varepsilon_{ij}^- = 0,\\
&\qquad \frac{2(w_j^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2} -\\
&\qquad \nu_{ij}^2 - \xi_{ij}^+ - \xi_{ij}^- = 0,\\
&\qquad i=1,2,\ldots,n-1,\ j=i+1,i+2\ldots,n;\\
&\qquad w_i^{\mu}, w_i^{\nu} \in [0,1],\ (w_i^{\mu})^2+(w_i^{\nu})^2 \leqslant 1,
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(w_j^{\mu})^2 \leqslant (w_i^{\nu})^2,$$

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(w_j^{\nu})^2 \leqslant n-2+(w_i^{\mu})^2,\ i=1,2,\dots,n;$$

$$\varepsilon_{ij}^{+}\geqslant 0,\ \varepsilon_{ij}^{-}\geqslant 0,\ \varepsilon_{ij}^{+}\varepsilon_{ij}^{-}=0,$$

$$\xi_{ij}^{+}\geqslant 0,\ \xi_{ij}^{-}\geqslant 0,\ \xi_{ij}^{+}\xi_{ij}^{-}=0,$$

$$i=1,2,\dots,n-1,\ j=i+1,i+2\dots,n. \quad (3)$$

通过求解模型(3)可以得到毕达哥拉斯模糊权重向量$w^*=(w_1^*,w_2^*,\dots,w_n^*)^{\mathrm{T}}$, $w_i^*=\langle w_i^{\mu *},w_i^{\nu *}\rangle$, $i=1,2,\dots,n$. 若目标函数$z=0$,则有$\varepsilon_{ij}^{+}=\varepsilon_{ij}^{-}=\xi_{ij}^{+}=\xi_{ij}^{-}=0$,即$P=(p_{ij})_{nn}$为毕达哥拉斯模糊乘型一致性偏好关系.

定理2 毕达哥拉斯模糊偏好关系$P=(p_{ij})_{nn}$具有乘型一致性当且仅当$z^*=0$,其中z^*为模型(3)中目标函数z的最优值.

证明 必要性:若毕达哥拉斯模糊偏好关系$P=(p_{ij})_{nn}$是乘型一致性的,则隶属度和非隶属度的离差都是0,故而$z^*=0$.

充分性:若已知$z^*=0$,则可知$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(\varepsilon_{ij}^{+}+\varepsilon_{ij}^{-}+\xi_{ij}^{+}+\xi_{ij}^{-})=0$,而又已知$\varepsilon_{ij}^{+}\geqslant 0,\varepsilon_{ij}^{-}\geqslant 0$以及$\xi_{ij}^{+}\geqslant 0,\xi_{ij}^{-}\geqslant 0,i,j=1,2,\dots,n$,即有

$$\mu_{ij}^2=\frac{2(w_i^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2},$$

$$\nu_{ij}^2=\frac{2(w_j^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2},$$

所以$P=(p_{ij})_{nn}$具有乘型一致性. □

由于模型(1)$\sim$模型(3)是等价的,求解这3个模型均可以得到毕达哥拉斯模糊偏好关系的标准化毕达哥拉斯模糊排序向量,从而为方案排序提供一种可行的方法.

4 数值例子

下面通过数值例子说明所提方法的有效性.

例1[36] 在个体决策问题中,设$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$为4个备选方案集合,决策者提供的毕达哥拉斯模糊偏好关系为$P=(p_{ij})_{44}$,其中

$$P=\begin{bmatrix} \left\langle\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle & \langle 0.60,0.70\rangle & \langle 0.70,0.60\rangle & \langle 0.65,0.70\rangle \\ \langle 0.70,0.60\rangle & \left\langle\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle & \langle 0.80,0.30\rangle & \langle 0.75,0.45\rangle \\ \langle 0.60,0.70\rangle & \langle 0.30,0.80\rangle & \left\langle\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle & \langle 0.75,0.60\rangle \\ \langle 0.70,0.65\rangle & \langle 0.45,0.75\rangle & \langle 0.60,0.75\rangle & \left\langle\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle \end{bmatrix}.$$

可以验证偏好关系$P=(p_{ij})_{44}$不满足乘型一致性. 为此,利用模型(3)建立优化模型如下:

$$\min\ z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}(\varepsilon_{ij}^{+}+\varepsilon_{ij}^{-}+\xi_{ij}^{+}+\xi_{ij}^{-}).$$

$$\text{s.t.}\ \frac{2(w_i^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2}-$$

$$\mu_{ij}^2-\varepsilon_{ij}^{+}-\varepsilon_{ij}^{-}=0,$$

$$\frac{2(w_j^{\mu})^2}{(w_i^{\mu})^2-(w_i^{\nu})^2+(w_j^{\mu})^2-(w_j^{\nu})^2}-$$

$$\nu_{ij}^2-\xi_{ij}^{+}-\xi_{ij}^{-}=0,$$

$$i=1,2,3,\ j=i+1,i+2,\dots,4;$$

$$w_i^{\mu},w_i^{\nu}\in[0,1],(w_i^{\mu})^2+(w_i^{\nu})^2\leqslant 1,$$

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(w_j^{\mu})^2\leqslant(w_i^{\nu})^2,$$

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(w_j^{\nu})^2\leqslant n-2+(w_i^{\mu})^2,\ i=1,2,3,4;$$

$$\varepsilon_{ij}^{+}\geqslant 0,\ \varepsilon_{ij}^{-}\geqslant 0,\ \varepsilon_{ij}^{+}\varepsilon_{ij}^{-}=0,$$

$$\xi_{ij}^{+}\geqslant 0,\ \xi_{ij}^{-}\geqslant 0,\ \xi_{ij}^{+}\xi_{ij}^{-}=0,$$

$$i=1,2,3,\ j=i+1,i+2,\dots,4.$$

使用LINGO软件,可以求出标准化毕达哥拉斯模糊排序向量为

$$w_1^*=\langle 0.440\,9,0.828\,6\rangle,\ w_2^*=\langle 0.560\,5,0.734\,7\rangle,$$
$$w_3^*=\langle 0.377\,9,0.925\,8\rangle,\ w_4^*=\langle 0.336\,3,0.877\,8\rangle.$$

每个分量的得分函数值为

$$s(w_1^*)=-0.492\,2,\ s(w_2^*)=-0.225\,6,$$
$$s(w_3^*)=-0.714\,3,\ s(w_4^*)=-0.657\,4.$$

于是由$s(w_2^*)\geqslant s(w_1^*)\geqslant s(w_4^*)\geqslant s(w_3^*)$可得,方案排序为$x_2\succ x_1\succ x_4\succ x_3$.

5 结论

在毕达哥拉斯模糊加型一致性偏好关系基础上,结合区间模糊偏好关系和直觉模糊偏好关系等研究结论,探索了毕达哥拉斯模糊偏好关系的乘型一致

性. 首先,定义了毕达哥拉斯模糊偏好关系的乘型一致性,给出已知标准化毕达哥拉斯模糊权重向量如何构造乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系的方法;然后,通过构造并求解相关优化模型,可以求出不满足乘型一致性的毕达哥拉斯模糊偏好关系的排序向量,从而为方案排序提供了可行的方法;最后,通过一个实例表明了方法的可行性.接下来,将继续探索毕达哥拉斯模糊偏好关系,主要包括:毕达哥拉斯模糊偏好关系的传递性,毕达哥拉斯模糊偏好关系的一致性检验,不一致毕达哥拉斯模糊偏好关系的修正等等.

参考文献(References)

[1] Saaty T L. Axiomatic foundation of the analytic hierarchy process[J]. Management Science, 1986, 32(7): 841-845.

[2] Bustince H, Pagola M, Mesiar R, et al. Grouping, overlap, and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparison fuzzy systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2012, 20(3): 405-415.

[3] Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(3): 155-167.

[4] Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12(2): 117-131.

[5] Xu Z S. On compatibility of interval fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2004, 3(3): 217-225.

[6] Wang Z J, Li K W. Goal programming approaches to deriving interval weights based on interval fuzzy preference relations[J]. Information Sciences, 2012, 193: 180-198.

[7] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[8] Xu Z S. Intuitionistic preference relations and their application in group decision making[J]. Information Sciences, 2007, 117(11): 2363-2379.

[9] Wang Z J. Derivation of intuitionistic fuzzy weights based on intuitionistic fuzzy preference relations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(9): 6377-6388.

[10] Liao H C, Xu Z S. Priorities of intuitionistic fuzzy preference relation based on multiplicative consistency[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, 22(6): 1669-1681.

[11] Gong Z W, Li L S, Forrest J, et al. The optimal priority models of the intuitionistic fuzzy preference relation and their application in selecting industries with higher meteorological sensitivity[J]. Expert Systems with Application, 2011, 38(4): 4394-4402.

[12] Gong Z W, Li L S, Zhou F X, et al. Goal programming approaches to obtain the priority vectors from the intuitionistic fuzzy preference relations[J]. Expert Systems with Application, Computers and Industrial Engineering, 2009, 57(4): 1187-1193.

[13] Xu Z S, Xia M M. Iterative algorithms for improving consistency of intuitionistic preference relations[J]. Journal of the Operational Research Society, 2014, 65(5): 708-722.

[14] Yager R R, Abbasov A M. Pythagorean membership grades, complex numbers and decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2013, 28(5): 436-452.

[15] Yager R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2014, 22(4): 958-965.

[16] 刘卫锋, 常娟, 何霞. 广义毕达哥拉斯模糊集成算子及其决策应用[J]. 控制与决策, 2016, 31(12): 2280-2286.
(Liu W F, Chang J, He X. Generalized Pythagorean fuzzy aggregation operators and applications in decision making[J]. Control and Decision, 2016, 31(12): 2280-2286.)

[17] 刘卫锋, 杜迎雪, 常娟. 毕达哥拉斯模糊交叉影响集成算子及其决策应用[J]. 控制与决策, 2017, 32(6): 1033-1040.
(Liu W F, Du Y X, Chang J. Pythagorean fuzzy interaction aggregation operators and applications in decision making[J]. Control and Decison, 2017, 32(6): 1033-1040.)

[18] 何霞, 杜迎雪, 刘卫锋. 毕达哥拉斯模糊幂平均算子[J]. 模糊系统与数学, 2016, 30(6): 116-124.
(He X, Du Y X, Liu W F. Pythagorean fuzzy power average operators[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2016, 30(6): 116-124.)

[19] Garg H. A new generalized Pythagorean fuzzy information aggregation using Einstein operations and its application to decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(9): 886-920.

[20] Garg H. Generalized Pythagorean fuzzy geometric aggregation operators using Einstein t-norm and t-conorm for multicriteria decision-making process[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2017, 32(6): 597-630.

[21] Wu S J, Wei G W. Pythagorean fuzzy Hamacher aggregation operators and their application to multiple attribute decision making[J]. International Journal of Knowledge-Based and Intelligent Eingineering Systems, 2017, 97(3): 189-201.

[22] 李娜, 高雷阜, 王磊. 诱导型广义Pythagorean模糊Choquet积分算子及群决策应用[J]. 模糊系统与数学, 2018, 32(2): 65-74.

(Li N, Gao L F, Wang L. Induced generalized Pythagorean fuzzy Choquet integral aggregation operators and applications in group decision making[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2018, 32(2): 65-74.)

[23] 杨艺, 李延来, 丁恒, 等. 基于同构Frank t-模与s-模的勾股模糊Frank集成算子及其应用[J]. 控制与决策, 2018, 33(8): 1471-1480.
(Yang Y, Li Y L, Ding H, et al. The Pythagorean fuzzy Frank aggregation operators based on isomorphism Frank t-norm and s-norm and their application[J]. Control and Decison, 2018, 33(8): 1471-1480.)

[24] Zhang X L, Xu Z S. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2014, 29(12): 1061-1078.

[25] Ren P J, Xu Z S, Gou X J. Pythagorean fuzzy TODIM approach to multi-criteria decision making[J]. Applied Soft Computing, 2016, 42: 246-259.

[26] Peng X D, Yang Y. Pythagorean fuzzy Choquet integral based MABAC method for multiple attribute group decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(10): 989-1020.

[27] 李德清, 曾文艺, 尹乾. 勾股模糊集的距离测度及其在多属性决策中的应用[J]. 控制与决策, 2017, 32(10): 1817-1823.
(Li D Q, Zeng W Y, Yin Q. Distance measures of Pythagorean fuzzy sets and their applications in multiattribute decision making[J]. Control and Decision, 2017, 32(10): 1817-1823.)

[28] Garg H. A novel correlation coefficients between Pythagorean fuzzy sets and its applications to decision-making processes[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(12): 1234-1252.

[29] 彭新东, 杨勇, 宋娟萍, 等. 毕达哥拉斯模糊软集及其应用[J]. 计算机工程, 2015, 41(7): 224-229.
(Peng X D, Yang Y, Song J P, et al. Pythagorean fuzzy soft set and its application[J]. Computer Engineering, 2015, 41(7): 224-229.)

[30] 张超, 李德玉. 勾股模糊粗糙集及其在多属性决策中的应用[J]. 小型微型计算机系统, 2016, 37(7): 1531-1535.
(Zhang C, Li D Y. Pythagorean fuzzy rough sets and its applications in multi-attribute decision making[J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2016, 37(7): 1531-1535.)

[31] 彭新东, 杨勇. 基于Pythagorean模糊语言集多属性群决策方法[J]. 计算机工程与应用, 2016, 52(23): 50-54.
(Peng X D, Yang Y. Multiple attribute group decision making methods based on Pythagorean fuzzy linguistic set[J]. Computer Engineering and Applications, 2016, 52(23): 50-54.)

[32] 刘卫锋, 何霞. 毕达哥拉斯犹豫模糊集[J]. 模糊系统与数学, 2016, 30(4): 107-115.
(Liu W F, He X. Pythagorean hesitant fuzzy set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2016, 30(4): 107-115.)

[33] 刘政敏, 刘培德, 刘位龙. 基于Pythagorean不确定语言的扩展VIKOR多属性群决策方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(12): 2145-2152.
(Liu Z M, Liu P D, Liu W L. Extended VIKOR method for multi-attribute group decision making based on Pythagorean uncertain linguistic information[J]. Control and Decision, 2017, 32(12): 2145-2152.)

[34] 杜玉琴, 侯福均, 翟玉冰, 等. Pythagorean三角模糊语言Hamacher集结算子及其应用[J]. 运筹与管理, 2018, 27(3): 104-112.
(Du Y Q, Hou F J, Zhai Y B, et al. Pythagorean triangular fuzzy linguistic hamacher aggregation operators and their application[J]. Operations Research and Management Science, 2018, 27(3): 104-112.)

[35] 何霞, 刘卫锋, 杜迎雪. 毕达哥拉斯三角模糊数集成算子及其决策应用[J]. 模糊系统与数学，2019, 33(2): 128-138.
(He X, Liu W F, Du Y X. Pythagorean triangular fuzzy numbers aggregation operators and application to decision making[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2019, 33(2): 128-138.)

[36] 杨艺, 钱桂生, 丁恒, 等. 勾股模糊偏好关系及其在群体决策中的应用[J]. 控制与决策, 2019, 34(2): 287-297.
(Yang Y, Qian G S, Ding H, et al. Pythagorean fuzzy preference relations and its application to group decision making[J]. Control and Decision, 2019, 34(2): 287-297.)

作者简介

何霞 (1976−), 女, 副教授, 从事决策理论与方法等研究, E-mail: hexia0723@163.com;

刘卫锋 (1976−), 男, 副教授, 从事模糊数学等研究, E-mail: lwf0519@163.com;

常娟 (1979−), 女, 讲师, 从事决策理论与方法的研究, E-mail: changjuan@zua.edu.cn.

(责任编辑：闫 妍)