

控制与决策

Control and Decision

输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化

陶洪峰, 李健, 杨慧中

引用本文:

陶洪峰, 李健, 杨慧中. 输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化[J]. *控制与决策*, 2021, 36(6): 1435–1441.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0908>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于数据驱动的非线性网络系统自适应迭代学习控制

Data driven adaptive learning control of nonlinear network system

控制与决策. 2021, 36(6): 1523–1528 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1182>

有限频域线性重复过程的动态迭代学习控制

Dynamic iterative learning control for linear repetitive processes over finite frequency ranges

控制与决策. 2021, 36(3): 599–608 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0873>

测量数据丢失的随机不确定系统滚动时域估计

Moving horizon estimation for stochastic uncertain system with missing measurements

控制与决策. 2021, 36(2): 450–456 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0648>

带有输出约束的柔性关节机械臂预设性能自适应控制

Prescribed performance adaptive control of flexible-joint manipulators with output constraints

控制与决策. 2021, 36(2): 387–394 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0974>

基于神经动态优化的非线性系统近似最优跟踪控制

Approximate optimal tracking control for nonlinear systems based on neurodynamic optimization

控制与决策. 2021, 36(1): 97–104 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0056>

输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化

陶洪峰[†], 李 健, 杨慧中

(江南大学 教育部轻工过程先进控制重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘要: 为解决工业过程中机械臂等特殊重复运行系统的输出在有限时间内无需实现全轨迹跟踪, 仅需跟踪期望轨迹上某些特殊关键点的控制问题, 针对线性时不变离散系统提出一种基于范数最优的点对点迭代学习控制算法. 通过输入输出时间序列矩阵模型变换构建综合性多目标点性能指标函数, 求解二次型最优解得到优化迭代学习控制律, 同时给出模型标称和不确定情形下最大奇异值形式鲁棒控制算法收敛的充分条件, 并进一步推广得到输入约束系统优化控制算法的收敛性结果, 最后在三轴龙门机器人模型上验证算法的有效性.

关键词: 迭代学习控制; 点对点跟踪; 范数最优; 不确定系统; 输入约束

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.0908

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 陶洪峰, 李健, 杨慧中. 输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化[J]. 控制与决策, 2021, 36(6): 1435-1441.

Point-to-point iterative learning control and optimization for uncertain systems with constrained input

TAO Hong-feng[†], LI Jian, YANG Hui-zhong

(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: In order to solve the problem that the output of special repetitive operation systems, like manipulators in industrial process, only needs to track some special key points on the desired trajectory rather than realize full trajectory tracking in limited time, a norm-optimal point-to-point iterative learning control algorithm is proposed for a linear time-invariant discrete system. By transforming the matrix model of the input and output time series, a comprehensive multi-objective point performance index function is constructed. Thus, the optimal iterative learning control law can be obtained through the quadratic optimal solution. At the same time, the sufficient conditions for convergence of the robust control algorithm in the form of largest singular value are given in the case of model nominal and uncertain. Moreover, the convergence results of the optimal control algorithm for systems with input signal constraints are further generalized. Finally, the effectiveness of the algorithm is verified on the three-axis gantry robot model.

Keywords: iterative learning control; point-to-point tracking; norm optimal; uncertain system; input constraints

0 引言

迭代学习控制(ILC)是一种广泛应用于执行重复任务的高性能控制方法,其直接根据之前批次的系统输入输出信息不断修正更新当前批次的控制输入信号,最终在有限时间内实现对期望轨迹的完全跟踪^[1]. 在传统的ILC算法设计中,要求控制系统的输出在整个工作周期内实现全轨迹跟踪. 然而,在实际的工业过程中,系统输出往往不需要跟踪完整的期望轨迹,只需要在某些特定时间点处跟踪上系统所给定的期望值. 例如机器人的“取”和“放”操作,只需要专注于拾取点和放置点的输出,其他时间点的输出往

往无需多加考虑,为此点对点ILC算法应运而生,其设计过程中的参考轨迹不是在整个批次周期上定义的,而是仅定义在少数有限的时间点处,控制算法可以利用这些时间点处的跟踪误差信息更新输入,进而消除不必要的非关键点跟踪约束,非关键点处的自由度给ILC算法设计增加自由度的同时,也增加了系统整体性能的提升空间^[2].

点对点跟踪问题最开始是针对终端点控制目标开展研究的. 文献[3]提出了一种应用于列车进站的终端ILC算法,只需要在终点时刻处满足跟踪性能要求. 虽然终端跟踪问题是点对点跟踪问题的一种特

收稿日期: 2019-06-26; 修回日期: 2019-12-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61773181, 61203092); 高等学校学科创新引智计划项目(B12018).

责任编辑: 虞文武.

[†]通讯作者. E-mail: taohongfeng@jiangnan.edu.cn.

殊形式,但是由于点对点跟踪问题中特定跟踪点的数量是任意的,终端跟踪问题并不能直接应用到一般的点对点跟踪问题.点对点跟踪问题的常用解决思路是设计一条经过特定跟踪点的任意轨迹,从而把该问题转化为一般的全轨迹跟踪问题^[4].固定参考跟踪轨迹算法可能是最简单的解决点对点跟踪问题的控制方法,但这一方法的局限性在于,控制系统的跟踪性能可能会随着参考轨迹的不同而改变,且需要充分的先验知识才能确定最优的固定参考轨迹,另外该方法并没有充分利用非跟踪时间点的自由度设计控制器.

为了克服固定参考轨迹点对点跟踪控制方法的不足,学者们陆续提出了参考轨迹更新的点对点跟踪控制方法.文献[5]提出了一种基于频域的参考轨迹更新的点对点跟踪算法,该算法把轨迹更新律分别拆分为实部和虚部两部分进行参考轨迹更新;文献[6]提出了一种基于时域的参考轨迹更新方法,通过当前参考轨迹与输出轨迹的误差建立轨迹更新函数得到下一次参考轨迹;文献[7]采用时域插值的参考轨迹更新算法,并结合二次型优化迭代学习控制算法验证了算法在有过程干扰情况下的鲁棒性;文献[8]将更新参考轨迹与综合预测迭代学习控制相结合,提出了约束输入下的点对点迭代学习方法,并基于2D模型验证了该算法比基于梯度的点对点跟踪控制算法具有更快的收敛速度.虽然参考轨迹更新的点对点跟踪算法充分利用了非跟踪时间点的自由度对参考轨迹进行更新,比固定参考轨迹算法收敛速度快,但它本质上还是全轨迹跟踪问题.因此有学者提出在不引入参考轨迹的情形下,直接通过优化算法得到最优输入的方法.文献[9]提出了一种范数最优ILC方案,通过最小化目标函数直接获取迭代学习控制律;文献[10]提出了一种多点跟踪ILC优化算法,在无约束的情况下求解所选取的优化目标函数解,进而得到迭代学习控制律;文献[11]将范数最优迭代学习控制(NOILC)应用于连续空间模型,分析了不同权重矩阵参数选择对系统跟踪性能的影响;文献[12]提出了一种基于数据驱动的最优点对点迭代学习控制算法,该算法不依赖于模型信息,对系统先验知识的要求变低;文献[13]进一步对上述算法进行改进,利用当前迭代过程中的时间子区间设计额外输入信号,再对控制输入进行时间子区间优化,提高了系统的整体性能.梯度下降算法是优化问题中常用的方法.文献[14]基于提升模型设定系统优化目标,采用梯度下降算法以及牛顿法求解该优化问题,并分析了受约束情况下的优化算法;文献[15]采用连续映射算法求解优化问题,将输入输出以及误差描述成Hilbert

空间中的点,然后将跟踪误差要求和输入输出之间的关系描述成空间中的集合,在这两个集合中进行连续映射,从而得到约束条件下点对点跟踪控制的最优输入.但是,上述点对点迭代学习跟踪控制算法没有考虑系统建模过程中的不确定性,而且并未完整讨论输入约束条件下的点对点鲁棒性能目标函数优化问题.因此本文基于范数最优迭代学习框架,引入输入约束情形下的多点多目标性能函数,通过求解目标函数的二次型最优解得到迭代学习控制律,同时在系统模型存在不确定性的情形下分析鲁棒迭代学习算法的收敛条件,保证系统稳态跟踪输出误差在有限个期望时间点处的有界收敛,最后通过三轴龙门机器人模型验证控制算法的有效性.

1 问题描述

考虑如下类在有限时间 $[0, T]$ 内运行的线性离散系统,其状态空间模型如下:

$$\begin{cases} x_k(t+1) = Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ y_k(t) = Cx_k(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: t 和 k 分别为采样时间和批次,批次过程在时间 $t \in [0, T]$ 范围内含有 N 个采样点; $x_k(t) \in R^n$ 、 $u_k(t) \in R$ 和 $y_k(t) \in R$ 分别为第 k 批次 t 时刻的系统状态、输入和输出, $x_k(0)$ 为系统第 k 批次运行时的初始状态值; A 、 B 和 C 分别为相应维数的系统参数矩阵,并且满足 $CB \neq 0$.假设不同批次的初始状态值相同且为 x_0 ,即对 $\forall k, x_k(0) = x_0$.

针对式(1)形式的线性离散系统,可将其状态空间表达式转换为时间序列的输入输出矩阵模型

$$y_k = Gu_k + d. \quad (2)$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{N-1}B & CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \dots & CB \end{bmatrix},$$

$$d = [CA, CA^2, CA^3, \dots, CA^N]^T x_0,$$

且输入时间序列 u_k 与输出时间序列 y_k 分别为

$$u_k = [u_k(0), u_k(1), \dots, u_k(N-1)]^T,$$

$$y_k = [y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(N)]^T.$$

在传统迭代学习控制算法设计中,参考轨迹通常是固定的,轨迹跟踪目标要求系统输出在各个时刻随着批次过程的不断运行逐渐靠近所设定的期望输出值,即 $y_k(t) \rightarrow y_d(t)$.其中: $t \in \{0, 1, \dots, N\}$, $y_k(t)$

为第 k 批次 t 时刻的系统实际输出, $y_d(t)$ 为第 k 批次 t 时刻的系统期望输出. 对于点对点跟踪问题, 只需要跟踪一些指定的关键时间点的期望值, 即 $y_k(t_i) = y_d(t_i), i = 1, 2, \dots, M$, 并且有 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_M \leq N$. 假设这 M 个跟踪点的期望值为

$$\mathbf{y}_{dM} = [y_d(t_1), y_d(t_2), \dots, y_d(t_M)]^T, \quad (3)$$

同时定义矩阵 Ψ 为 M 行 N 列的选择矩阵, 从而可得 $\Psi \mathbf{y}_k$ 为整个轨迹 N 个采样时间点所选取的 M 个跟踪时间点的实际输出值. Ψ 的具体表达形式^[16]为

$$\Psi = \begin{cases} \psi_{ij} = 1, j = t_i, t_i \in \{t_1, t_2, \dots, t_M\}; \\ \psi_{ij} = 0, j \neq t_i. \end{cases} \quad (4)$$

由此可得 M 个跟踪点处的跟踪误差表达式为

$$\mathbf{e}_{kM} = \mathbf{y}_{dM} - \Psi \mathbf{y}_k, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{e}_{kM} = [e_k(t_1), e_k(t_2), \dots, e_k(t_M)]^T$.

点对点迭代学习控制的任务为设计各个批次的输入序列 \mathbf{u}_k , 使得系统在有限工作周期 T 内, 有限个跟踪点处的误差随着批次运行最终收敛到 0, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_{kM}\| = 0.$$

2 点对点优化迭代学习控制

2.1 优化控制律设计

在实际应用中, 跟踪误差 $e_{(k+1)M}$ 和系统输入 \mathbf{u}_{k+1} 通常反映系统各个运行批次的收敛性能和能量消耗, 较小的跟踪误差、控制能量及其控制振荡对控制系统的整体性能及其实际执行器的损耗至关重要, 因此在迭代学习控制优化过程中需考虑同时对误差和控制量进行优化. 定义如下性能指标函数:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}_{k+1}} \{J_{k+1} \triangleq \|\mathbf{e}_{(k+1)M}\|_Q^2 + \|\Delta \mathbf{u}_{k+1}\|_R^2 + \|\mathbf{u}_{k+1}\|_S^2\}. \quad (6)$$

其中: Q 为对称正定权阵, R 和 S 为相应的非负定对称权阵. 定义 $\Delta \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k$ 及 $\|x\|_Q^2 = x^T Q x$. 将式(2)、(5)代入性能指标函数(6), 通过求解其二次型最优解获得优化迭代学习控制律

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{L}_u \mathbf{u}_k + \mathbf{L}_e \mathbf{e}_{kM}. \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_u &= \\ &[(\Psi G)^T Q (\Psi G) + \mathbf{R} + \mathbf{S}]^{-1} [(\Psi G)^T Q (\Psi G) + \mathbf{R}], \\ \mathbf{L}_e &= [(\Psi G)^T Q (\Psi G) + \mathbf{R} + \mathbf{S}]^{-1} (\Psi G)^T Q. \end{aligned}$$

2.2 收敛性分析

引理 1^[9] 若线性离散系统(1)各批次的迭代初值 $x_k(0)$ 严格一致, 在性能指标函数(6)约束的优化迭代学习控制律(7)的作用下满足以下条件: 1) $\eta =$

$\|\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_e(\Psi G)\|_{i_2} < 1, \|\cdot\|_{i_2}$ 为矩阵的最大奇异值; 2) 权矩阵 Q 为正定对称矩阵, R, S 为非负定对称矩阵. 则当迭代批次 $k \rightarrow \infty$ 时, 系统在 M 个期望跟踪点处的跟踪输出误差收敛.

证明 根据系统(1)的输入输出矩阵模型(2), 以及式(7)可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{L}_u \mathbf{u}_k + \mathbf{L}_e \mathbf{e}_{kM} = \\ &(\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_e(\Psi G)) \mathbf{u}_k + \mathbf{L}_e(\mathbf{y}_{dM} - \Psi \mathbf{d}). \end{aligned} \quad (8)$$

为了使系统(8)渐近稳定, 需满足谱半径 $\rho(\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_e(\Psi G)) < 1$. 更严格地, 系统单调收敛条件为 $\eta = \|\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_e(\Psi G)\|_{i_2} < 1$, 根据矩阵性质显然有 $\rho(\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_e(\Psi G)) \leq \|\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_e(\Psi G)\|_{i_2} = \eta$. 定义系统稳态控制输入 $\mathbf{u}_\infty \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k$, 并令式(8)中的 $k \rightarrow \infty$, 可以得到 $\mathbf{u}_\infty = (\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_e(\Psi G)) \mathbf{u}_\infty + \mathbf{L}_e(\mathbf{y}_{dM} - \Psi \mathbf{d})$, 其中 $\mathbf{L}_e(\mathbf{y}_{dM} - \Psi \mathbf{d})$ 为一常值. 进一步根据式(8)和 \mathbf{u}_∞ 的表达式可得

$$\mathbf{u}_\infty - \mathbf{u}_{k+1} = (\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_e(\Psi G))(\mathbf{u}_\infty - \mathbf{u}_k). \quad (9)$$

然后对式(9)两边同时取 2-范数并根据范数性质可得 $\|\mathbf{u}_\infty - \mathbf{u}_{k+1}\| \leq \eta \|\mathbf{u}_\infty - \mathbf{u}_k\|$ 成立. 既而若引理 1 的条件 1) 满足, 即 $\eta < 1$, 则控制输入在范数意义下单调收敛.

在此基础上, 进一步可得

$$\begin{aligned} I - \mathbf{L}_u + \mathbf{L}_e(\Psi G) &= \\ &[(\Psi G)^T Q (\Psi G) + \mathbf{R} + \mathbf{S}]^{-1} [(\Psi G)^T Q (\Psi G) + \mathbf{S}], \end{aligned}$$

此处 $I \in R^{N \times N}$. 若引理 1 的条件 2) 满足, 即 Q 为正定对称矩阵, R 和 S 为非负定对称矩阵, 则矩阵 $I - \mathbf{L}_u + \mathbf{L}_e(\Psi G)$ 可逆, 然后根据式(2)、(8)可得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}_{kM} &= \mathbf{y}_{dM} - \Psi \mathbf{d} - \lim_{k \rightarrow \infty} (\Psi G) \mathbf{u}_k = \\ &\mathbf{y}_{dM} - \Psi \mathbf{d} - (\Psi G) \mathbf{u}_\infty = \\ &\mathbf{y}_{dM} - \Psi \mathbf{d} - (\Psi G)(I - \mathbf{L}_u + \\ &\mathbf{L}_e(\Psi G))^{-1} \mathbf{L}_e(\mathbf{y}_{dM} - \Psi \mathbf{d}) = \\ &(I - (\Psi G)((\Psi G)^T Q (\Psi G) + \\ &\mathbf{S})^{-1} (\Psi G)^T Q)(\mathbf{y}_{dM} - \Psi \mathbf{d}). \end{aligned} \quad (10)$$

当各权重矩阵参数确定时, 从式(10)可以得出, 稳态误差范数最终将收敛到常值

$$P = \|(I - (\Psi G)((\Psi G)^T Q (\Psi G) + \mathbf{S})^{-1} (\Psi G)^T Q)(\mathbf{y}_{dM} - \Psi \mathbf{d})\|. \quad \square$$

显然该值与性能指标(6)中的 S 相关. S 越小, 在控制律(7)作用下系统跟踪点处的输出误差范数越小; 特别地, 当 S 取为零矩阵时, 系统跟踪点处的输出误差范数可以收敛到零.

3 鲁棒性分析

在实际工艺生产过程中,被控系统在建模时可能会有偏差.在这一节中,考虑在原有标称被控系统(2)的传递矩阵 \mathbf{G} 上附加一个在时间域上变化的不确定因子 $\Delta_{\mathbf{G}}$,进而得到不确定被控系统的传递矩阵表达式为 $\mathbf{G}_{\theta} = \mathbf{G}(I + \Delta_{\mathbf{G}})$,同时定义不确定因子 $\Delta_{\mathbf{G}} = \mathbf{W}\Delta$.其中: Δ 是与时间序列矩阵 \mathbf{G} 对应的未知矩阵,但是满足 $\|\Delta\|_{i2} \leq 1$.为简化运算,令 $\mathbf{Z} = (\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G}) + \mathbf{R} + \mathbf{S}$,则不确定被控系统鲁棒收敛的充分条件为

$$\|\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_e((\Psi\mathbf{G}_{\theta}))\|_{i2} < 1 \Rightarrow \max_{\Delta} \|\mathbf{Z}^{-1}[\mathbf{R} - (\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G})\Delta_{\mathbf{G}}]\|_{i2} < 1. \quad (11)$$

定理1 当性能指标函数(6)和式(11)中的加权矩阵 $\mathbf{R} = 0$ 时,在优化迭代学习控制律(7)的作用下,不确定被控系统鲁棒收敛的充分条件为 $\|((\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G}) + \mathbf{S})^{-1}(\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G})\mathbf{W}\|_{i2} < 1$.

证明 根据矩阵奇异值不等式可得

$$\|(\mathbf{Z} - \mathbf{R})^{-1}(\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G})\mathbf{W}\Delta\|_{i2} \leq \|(\mathbf{Z} - \mathbf{R})^{-1}(\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G})\mathbf{W}\|_{i2}\|\Delta\|_{i2}. \quad (12)$$

从表达式(12)可以得到:当加权矩阵 $\mathbf{R} = 0$ 并且 $\|((\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G}) + \mathbf{S})^{-1}(\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G})\mathbf{W}\|_{i2} < 1$ 时,根据式(11)和引理1可知,不确定被控系统鲁棒收敛. \square

定理2 当性能指标(6)和式(11)中的加权矩阵 $\mathbf{R} = rI$ 并且满足 $r \geq 0$ 时,定理1中的充分条件 $\|((\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G}) + \mathbf{S})^{-1}(\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G})\mathbf{W}\|_{i2} < 1$ 依然可保证不确定被控系统在优化迭代学习控制律(7)作用下鲁棒收敛.

证明 因为 $(\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G}) + \mathbf{S}$ 为对称正定矩阵,对其进行奇异值分解得到 $(\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G}) + \mathbf{S} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^T$.其中: \mathbf{U} 为酉矩阵; Σ 是对角元素为 σ_i 的满秩对角矩阵,记 $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_i\}$.

为简化运算,令

$$\mathbf{H} \triangleq (\mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^T)^{-1}(\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G})\mathbf{W}.$$

根据定理1可以得到

$$\|(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^T)^{-1}(\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G})\mathbf{W}\|_{i2} \triangleq \alpha < 1,$$

从而可以推出 $\|\mathbf{H}\|_{i2} = \alpha < 1$,因此得到下列表达式成立:

$$\begin{aligned} \max_{\Delta} \|\mathbf{Z}^{-1}[\mathbf{R} - (\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G})\Delta_{\mathbf{G}}]\|_{i2} &= \\ \max_{\Delta} \|(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^T + rI)^{-1}[rI + \mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^T\mathbf{H}(-\Delta)]\|_{i2} &\leq \\ \|(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^T + rI)^{-1}(rI + \alpha\mathbf{U}\Sigma\mathbf{U}^T)\|_{i2} &= \\ \|\mathbf{U}(\Sigma + rI)^{-1}(rI + \alpha\Sigma)\mathbf{U}^T\|_{i2} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(\Sigma + rI)^{-1}(rI + \alpha\Sigma)\|_{i2} &= \\ \max_i \frac{\alpha\sigma_i + r}{\sigma_i + r} < 1, \forall r \in R \geq 0. & \quad (13) \end{aligned}$$

定理2得证. \square

从定理2可知,权阵 $\mathbf{R} = rI$ 的设计不会影响被控系统的鲁棒收敛性,但同时权阵 \mathbf{S} 仍然需要满足定理1的条件.

4 输入约束下的点对点迭代学习控制

为确保实际工业过程安全、顺利地运行,需要对输入信号施加一定的约束.输入信号约束常以不等式的形式表示.接下来将针对被控系统在输入信号约束的情况下分析式(7)点对点优化迭代学习控制算法的一些性质.

4.1 约束形式

输入信号幅值约束可表示为

$$\mathbf{u}^{\text{low}} \leq \mathbf{u}_{k+1} \leq \mathbf{u}^{\text{hi}}, \quad (14)$$

其中 \mathbf{u}^{low} 、 \mathbf{u}^{hi} 分别为输入信号 \mathbf{u}_{k+1} 的下界和上界.

输入信号在两个相邻采样时间之间变化幅度约束可表示为

$$\delta\mathbf{u}^{\text{low}} \leq \delta\mathbf{u}_{k+1} \leq \delta\mathbf{u}^{\text{hi}}. \quad (15)$$

其中: $\delta\mathbf{u}^{\text{low}}$ 、 $\delta\mathbf{u}^{\text{hi}}$ 分别为输入变量 $\delta\mathbf{u}_{k+1}$ 沿时间轴变化的下界和上界,且 $\delta\mathbf{u}_{k+1}(t) = \mathbf{u}_{k+1}(t) - \mathbf{u}_{k+1}(t-1)$.

两个相邻批次之间输入变化约束可表示为

$$\Delta\mathbf{u}^{\text{low}} \leq \Delta\mathbf{u}_{k+1} \leq \Delta\mathbf{u}^{\text{hi}}. \quad (16)$$

其中: $\Delta\mathbf{u}^{\text{low}}$ 、 $\Delta\mathbf{u}^{\text{hi}}$ 分别为输入变量 $\Delta\mathbf{u}_{k+1}$ 沿迭代轴变化的下界和上界, $\Delta\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k$.

注意到式(14)~(16)表示的输入约束变量并不统一,为便于后续分析,将所有上述输入约束方程都转化为 $\Delta\mathbf{u}_{k+1}$ 的形式.

输入信号幅值约束(14)可以转化为

$$\mathbf{u}^{\text{low}} - \mathbf{u}_k \leq \Delta\mathbf{u}_{k+1} \leq \mathbf{u}^{\text{hi}} - \mathbf{u}_k. \quad (17)$$

不妨假设 $\delta\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$,则 $\delta\mathbf{u}_{k+1}$ 可以表示为

$$\delta\mathbf{u}_{k+1} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{u}_{k+1}, \quad (18)$$

其中

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

另外,两个相邻采样时间之间的输入变化幅度约束(15)可以转化为

$$\delta\mathbf{u}^{\text{low}} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{u}_k \leq \boldsymbol{\mu}\Delta\mathbf{u}_{k+1} \leq \delta\mathbf{u}^{\text{hi}} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{u}_k. \quad (19)$$

则式(14)~(16)的约束形式可以由线性不等式统一表示为

$$\zeta^u \Delta \mathbf{u}_{k+1} \geq \zeta_{k+1}. \quad (20)$$

其中

$$\zeta^u = \begin{bmatrix} I \\ -I \\ \boldsymbol{\mu} \\ -\boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}, \quad \zeta_{k+1} = \begin{bmatrix} \max(\mathbf{u}^{\text{low}} - \mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}^{\text{low}}) \\ -\min(\mathbf{u}^{\text{hi}} - \mathbf{u}_k, \Delta \mathbf{u}^{\text{hi}}) \\ \delta \mathbf{u}^{\text{low}} - \boldsymbol{\mu} \mathbf{u}_k \\ -\delta \mathbf{u}^{\text{hi}} + \boldsymbol{\mu} \mathbf{u}_k \end{bmatrix},$$

此处 $I \in R^{N \times N}$. 注意到式(20)描述的输入信号 $\Delta \mathbf{u}_{k+1}$ 的约束是一个凸集, 这里用 Ω 表示. 由式(5)以及第3节中系统不确定模型 \mathbf{G}_θ 可得, 模型不确定系统的误差方程可表示为

$$\mathbf{e}_{(k+1)M} = \mathbf{e}_{kM} - \boldsymbol{\Psi} \mathbf{G}_\theta \Delta \mathbf{u}_{k+1}. \quad (21)$$

将式(21)代入性能指标函数(6)可得

$$\begin{aligned} J_{k+1} = & \mathbf{e}_{kM}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{kM} + \Delta \mathbf{u}_{k+1}^T [(\boldsymbol{\Psi} \mathbf{G}_\theta)^T \mathbf{Q} (\boldsymbol{\Psi} \mathbf{G}_\theta) + \\ & \mathbf{R}] \Delta \mathbf{u}_{k+1} - 2 \mathbf{e}_{kM}^T \mathbf{Q} (\boldsymbol{\Psi} \mathbf{G}_\theta) \Delta \mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{S} \mathbf{u}_{k+1}. \end{aligned} \quad (22)$$

4.2 收敛性证明

定理3 在输入约束条件(20)限定下, 若满足: 1) 存在一个可行的期望输入 \mathbf{u}^∞ 和对应的期望误差 $\mathbf{e}_\infty = 0$, 满足条件 $\mathbf{u}^{\text{low}} \leq \mathbf{u}^\infty \leq \mathbf{u}^{\text{hi}}, \delta \mathbf{u}^{\text{low}} \leq \delta \mathbf{u}^\infty \leq \delta \mathbf{u}^{\text{hi}}$, 且 $\Delta \mathbf{u}^{\text{low}} < 0, \Delta \mathbf{u}^{\text{hi}} > 0$; 2) \mathbf{Q} 为正定对称矩阵, \mathbf{R}, \mathbf{S} 为非负定对称矩阵. 则系统(21)在优化迭代学习控制律(7)作用下收敛. 特别地, 当 \mathbf{S} 取零矩阵时, 系统稳态误差将收敛到0, 即 $k \rightarrow \infty$ 时, $\Delta \mathbf{u}_k \rightarrow 0, \mathbf{e}_{kM} \rightarrow 0$.

证明 定义第 $k+1$ 批次的最优性能指标函数为

$$\begin{aligned} J(\mathbf{e}_{kM}, \mathbf{u}_k) = & \min_{(\mathbf{e}_{(k+1)M}, \Delta \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) \in \Omega} [J_{k+1} \triangleq \\ & \mathbf{e}_{kM}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{kM} + \Delta \mathbf{u}_{k+1}^T [(\boldsymbol{\Psi} \mathbf{G}_\theta)^T \mathbf{Q} (\boldsymbol{\Psi} \mathbf{G}_\theta) + \\ & \mathbf{R}] \Delta \mathbf{u}_{k+1} - 2 \mathbf{e}_{kM}^T \mathbf{Q} (\boldsymbol{\Psi} \mathbf{G}_\theta) \Delta \mathbf{u}_{k+1} + \\ & \mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{S} \mathbf{u}_{k+1}] \geq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

其中: Ω 为由输入信号约束条件构成的一个凸集, 并且满足线性不等式条件(20).

首先考虑 $\Delta \mathbf{u}_{k+1} = 0$ 的情况, 此时 $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k$, $\mathbf{e}_{(k+1)M} = \mathbf{e}_{kM}$, $(\mathbf{e}_{kM}, 0, \mathbf{u}_k) \in \Omega$. 因为性能指标函数(23)在点 $(\mathbf{e}_{kM}, 0, \mathbf{u}_k)$ 处的值总是要大于或等于最优值, 所以可以得到如下关系式:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{e}_{kM}, \mathbf{u}_k) \leq J_{k+1}|_{(\mathbf{e}_{kM}, 0, \mathbf{u}_k)} = \\ J(\mathbf{e}_{(k-1)M}, \mathbf{u}_{k-1}) - \Delta \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_k. \end{aligned} \quad (24)$$

依此类推, 最终得到

$$\begin{aligned} 0 \leq J(\mathbf{e}_{kM}, \mathbf{u}_k) + \sum_i^k \Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_i \leq \\ J(\mathbf{e}_{0M}, \mathbf{u}_0) < \infty. \end{aligned} \quad (25)$$

由式(25)可知, 当 $k \rightarrow \infty$ 时 $\Delta \mathbf{u}_k \rightarrow 0$. 因为当 k 足够大时, $\Delta \mathbf{u}_k \rightarrow 0$, 且满足条件 $\Delta \mathbf{u}^{\text{low}} < 0, \Delta \mathbf{u}^{\text{hi}} > 0$, 所以约束条件 $\Delta \mathbf{u}^{\text{low}} \leq \Delta \mathbf{u}_{k+1} \leq \Delta \mathbf{u}^{\text{hi}}$ 同样满足. 根据定理3的条件1)可知, 当 $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}^\infty$ 时, $\mathbf{e}_{(k+1)M} = 0$, 则 $(0, \Delta \mathbf{u}_k^\infty, \mathbf{u}^\infty)$ 也是一个约束区域内的可行点, 其中 $\Delta \mathbf{u}_k^\infty = \mathbf{u}^\infty - \mathbf{u}_k$. 显然, $(\mathbf{e}_{(k+1)M}, \Delta \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})$ 也是约束区域内的一个可行点. 因为 Ω 是一凸集, 可以推出 Ω 内任意两个可行点之间的点都是可行点^[17].

同时, 求解性能指标函数 J_{k+1} 从 $(\mathbf{e}_{(k+1)M}, \Delta \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})$ 到 $(0, \Delta \mathbf{u}_k^\infty, \mathbf{u}^\infty)$ 的方向导数

$$\begin{aligned} \nabla J_{k+1}^T |_{(\mathbf{e}_{(k+1)M}, \Delta \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})} \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_{(k+1)M} \\ \Delta \mathbf{u}_k^\infty - \Delta \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}^\infty - \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} = \\ (\mathbf{e}_{(k+1)M}^T \mathbf{Q}, \Delta \mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{R}, \mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{S}) \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_{(k+1)M} \\ \Delta \mathbf{u}_k^\infty - \Delta \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}^\infty - \mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix} = \\ -\mathbf{e}_{(k+1)M}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{(k+1)M} + \mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{S} (\mathbf{u}^\infty - \mathbf{u}_{k+1}) + \\ \Delta \mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{R} (\Delta \mathbf{u}_k^\infty - \Delta \mathbf{u}_{k+1}) \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

由式(26)可以得到

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_k^\infty + \mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{S} \mathbf{u}^\infty \geq \\ \mathbf{e}_{(k+1)M}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{(k+1)M} + \\ \mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{S} \mathbf{u}_{k+1} + \Delta \mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u}_{k+1} \geq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

由于 $k \rightarrow \infty$ 时 $\Delta \mathbf{u}_k \rightarrow 0$, 式(27)可以化简为

$$\mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{S} (\mathbf{u}^\infty - \mathbf{u}_{k+1}) \geq \mathbf{e}_{(k+1)M}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}_{(k+1)M} \geq 0. \quad (28)$$

由式(28)以及定理3的条件2)可知, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 系统稳态输出误差收敛到某一有界值, 特别地, 当 \mathbf{S} 取零矩阵时, 稳态输出误差到达最小且为0. \square

上述结果表明, 在定理3条件下, 输入约束模型不确定系统(21)在优化迭代学习控制律(7)作用下依然可以收敛. 特别地, 当系统(21)为标称系统, 即 $\mathbf{G}_\theta = \mathbf{G}$ 时, 定理3结论同样成立, 此处不再赘述.

5 仿真分析

为验证本文算法的有效性, 在文献[18]三轴龙门机器人模型上进行控制仿真. 该模型的3个轴正交, 可视为3个可以独立控制的系统. 限于篇幅, 本文仅给出 z 轴的控制结果, 其传递函数模型为

$$G_z(s) = \frac{15.8869(s + 850.3)}{s(s^2 + 707.6s + 3.377 \times 10^5)}. \quad (29)$$

闭环增益 K 取 300, 假设 z 轴系统的重复运行周期 $T = 2s$, 各运行批次内的采样点个数 $N = 200$. 不失一般性, 选取其中的 5 个点 ($M = 5$) 进行点对点跟踪控制, 指定目标点所对应的时刻为 $t_i \in \{20, 60, 100, 140, 180\}$, 跟踪点处的期望值为

$$\mathbf{y}_{dM} = [0.0048, 0.0029, -0.0029, -0.0048, 0]^T.$$

系统离散化后如式(1)形式的参数矩阵分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.0214 & 0.0451 & 0.0124 \\ -0.0515 & -0.0497 & -0.1771 \\ 0.0916 & 0.1202 & 0.9081 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5.03 \times 10^{-5} \\ 7.16 \times 10^{-4} \\ 3.71 \times 10^{-4} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [0, 0.0621, 0.8245],$$

然后分别选取性能指标函数(6)中的权重矩阵 $\mathbf{S} = 0.01\mathbf{I}$, $\mathbf{Q} = 1000000\mathbf{I}$, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, 此时 $\eta = \|\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_e(\Psi\mathbf{G})\|_{i2} = 0.99 < 1$. 系统初始状态取为 $x_k(0) = [-0.01; 0.01; 0.005]$, 运行迭代批次 k 为 40 时, 仿真结果如图 1 和图 2 所示, 表明系统经过一定的迭代批次, 系统实际输出轨迹能够在跟踪点处跟踪上给定的期望值, 实现点对点跟踪任务, 且性能指标迅速下降并最终达到稳定状态. 这验证了系统若满足定理 1 的收敛条件, 则由性能指标函数(6)得到的优化迭代学习控制律(7)可以使被控的标称系统收敛.

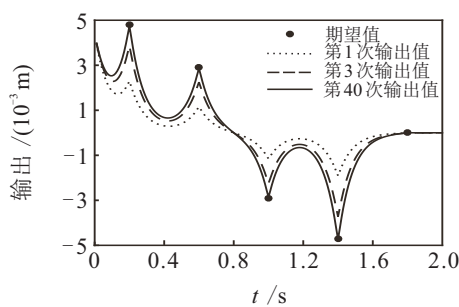


图 1 系统实际输出与参考点跟踪

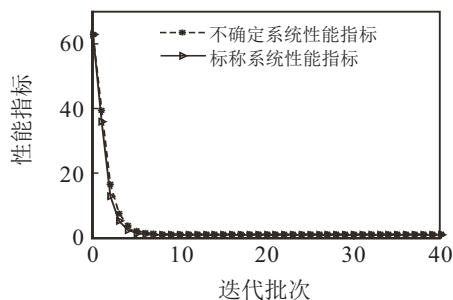


图 2 无输入约束下的系统性能指标比较

进一步考虑系统模型不确定性的影响, 引入不确定模型 $\mathbf{G}_\theta = \mathbf{G}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{G})$. 不妨取 Δ 为一个时间域上变化的下三角随机数矩阵, 随机数的范围为 $[-0.8, 0.2]$ 并取 $\mathbf{W} = 0.35$. 首先当 $r = 0$ 时, 满足定理 1 中的条件 $\|((\Psi\mathbf{G})^T\mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G}) + \mathbf{S})^{-1}(\Psi\mathbf{G})^T \times \mathbf{Q}(\Psi\mathbf{G})\mathbf{W}\|_{i2} = 0.35 < 1$, 表明系统在优化迭代学习控制律(7)作用下鲁棒收敛, 且由定理 1 得到的收敛条件在 $r = 1$ 时也满足定理 2 中给出的系统鲁棒收敛条件. 将系统的初始状态同样取为 $x_k(0) = [-0.01; 0.01; 0.005]$, 标称系统与不确定系统性能指标的比较曲线如图 2 所示, 表明优化迭代学习控制律(7)在系统模型存在不确定性时, 若满足定理 2 条件, 则依然可使得不确定系统收敛. 同时可知, 标称系统性能指标的收敛速度比不确定系统更快, 验证了算法的合理性和有效性.

最后考虑对标称系统与不确定系统施加输入约束情况下的系统性能, 并且比较标称系统在输入约束与无输入约束情形下以及标称系统与不确定系统同时施加输入约束情形下的系统性能指标. 系统的输入约束为 $-1.8 \leq u(t) \leq 1.8$. 此时系统的控制

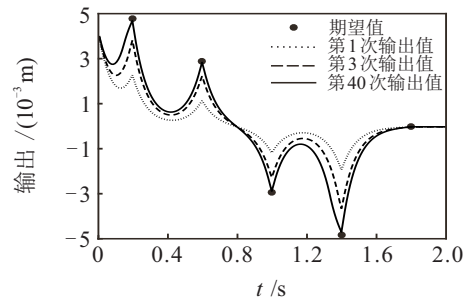


图 3 输入约束系统的实际输出与参考点跟踪

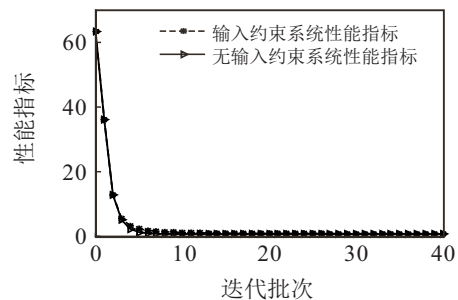


图 4 标称系统的性能指标比较

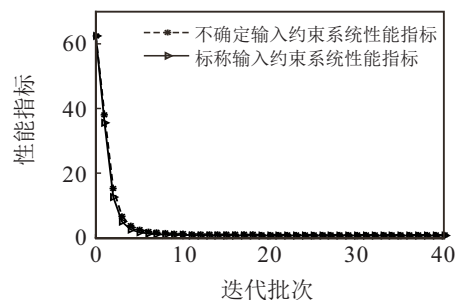


图 5 输入约束下的系统性能指标比较

器结构和各仿真参数与上文一致,同时满足定理3条件. 具体仿真结果如图3~图5所示,表明系统的输入信号在加以一定的约束条件后依然能够完成点对点跟踪任务,只是系统的性能指标曲线收敛速度比无约束时候慢一些,但最终还是收敛的,这也进一步验证了算法的合理性和有效性.

6 结论

本文以典型的线性离散系统为研究对象,提出了基于范数最优的点到点迭代学习控制律并讨论了其收敛性;同时考虑了系统模型存在不确定性下的鲁棒性及系统输入受到约束情况下的系统性能. 最后将算法应用到三轴龙门机器人的 z 轴控制系统上验证了算法的有效性和合理性. 沿时间和迭代方向都存在随机不确定性的系统,以及输出约束和系统存在外部扰动情形下的点对点迭代学习控制方法将是后续的研究重点.

参考文献(References)

- [1] Bristow D A, Tharayil M, Alleyne A G. A survey of iterative learning control[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2006, 26(3): 96-114.
- [2] Freeman C T. Constrained point-to-point iterative learning control with experimental verification[J]. Control Engineering Practice, 2012, 20(5): 489-498.
- [3] Wang Y, Hou Z. Terminal iterative learning control based station stop control of a train[J]. International Journal of Control, 2011, 84(7): 1263-1277.
- [4] 洪英东, 熊智华, 江永亨, 等. 基于2D理论的点对点综合预测迭代学习控制[J]. 控制与决策, 2018, 33(3): 431-438.
(Hong Y D, Xiong Z H, Jiang Y H, et al. Point-to-point integrated predictive iterative learning control based on two-dimensional theory[J]. Control and Decision, 2018, 33(3): 431-438.)
- [5] Freeman C T, Cai Z, Rogers E, et al. Iterative learning control for multiple point-to-point tracking application[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 19(3): 590-600.
- [6] Son T D, Ahn H S, Moore K L. Iterative learning control in optimal tracking problems with specified data points[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1465-1472.
- [7] 陶洪峰, 董晓齐, 杨慧中. 参考轨迹更新的点到点迭代学习控制算法优化及应用[J]. 控制理论与应用, 2016, 33(9): 1207-1213.
(Tao H F, Dong X Q, Yang H Z. Optimal algorithm and application for point to point iterative learning control via updating reference trajectory[J]. Control Theory & Applications, 2016, 33(9): 1207-1213.)
- [8] Shen X F, Xiong Z H, Hong Y D. Point-to-point iterative learning control based on updating reference trajectory with constrained Input[C]. Proceeding of the 7th IEEE Conference on Data Driven Control and Learning Systems. Enshi: IEEE, 2018: 788-793.
- [9] Barton K L, Alleyne A G. A norm optimal approach to timevarying ILC with application to a multi-axis robotic testbed[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 19(1): 166-180.
- [10] Son T D, Nguyen D H, Ahn H S. Iterative learning control for optimal multiple-point tracking[C]. Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference. Orlando: IEEE, 2011: 6025-6030.
- [11] Owens D H, Freeman C T, Van Dinh. Norm-optimal iterative learning control with intermediate point weighting: Theory, algorithms, and experimental evaluation[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2013, 21(3): 999-1007.
- [12] Chi R H, Hou Z S, Huang B, et al. A unified data-driven design framework of optimality-based generalized iterative learning control[J]. Computers & Chemical Engineering, 2015, 77: 10-23.
- [13] Chi R H, Hou Z S, Jin S T. An improved data-driven point-to-point ILC using additional on-line control inputs with experimental verification[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(4): 687-696.
- [14] Freeman C T, Tan Y. Iterative learning control with mixed constraints for point-to-point tracking[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2013, 21(3): 604-616.
- [15] Chu B, Freeman C T, Owens D H. A novel design framework for point-to-point ILC using successive projection[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2015, 23(3): 1156-1163.
- [16] 洪英东. 轨迹更新的点对点2D综合预测迭代学习控制研究[D]. 北京: 清华大学信息科学技术学院, 2017.
(Hong Y D. Research on updating trajectory point-to-point integrated 2D model predictive iterative learning control[D]. Beijing: School of Information Science and Technology, Tsinghua University, 2017.)
- [17] Lee J H, Lee K S, Kim W C. Model-based iterative learning control with a quadratic criterion for time-varying linear systems[J]. Automatica, 2000, 36(5): 641-657.
- [18] Hladowski L, Galkowski K, Cai Z, et al. A 2D systems approach to iterative learning control for discrete linear processes with zero markov parameters[J]. International Journal of Control, 2011, 84(7): 1246-1262.

作者简介

陶洪峰(1979—), 男, 教授, 博士生导师, 从事故障检测与容错控制等研究, E-mail: taohongfeng@jiangnan.edu.cn;
李健(1996—), 男, 硕士生, 从事迭代学习控制理论及应用的研究, E-mail: 6181905032@stu.jiangnan.edu.cn;
杨慧中(1955—), 女, 教授, 博士生导师, 从事过程控制理论及应用等研究, E-mail: yhz@jiangnan.edu.cn.