

控制与决策

Control and Decision

含有分数阶有色关联噪声的分数阶系统的卡尔曼滤波器设计

高哲, 黄晓敏, 陈小姣

引用本文:

高哲, 黄晓敏, 陈小姣. 含有分数阶有色关联噪声的分数阶系统的卡尔曼滤波器设计[J]. *控制与决策*, 2021, 36(7): 1672–1678.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1418>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于PID参数整定的线性自抗扰控制参数整定](#)

Tuning of linear active disturbance rejection controllers based on PID tuning rules
控制与决策. 2021, 36(7): 1592–1600 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1408>

[基于转换量测容积卡尔曼滤波器带多普勒量测的目标跟踪算法](#)

Converted measurement cubature Kalman filter for Doppler-assisted target tracking
控制与决策. 2021, 36(6): 1425–1434 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1070>

[并网逆变器分数阶虚拟惯性的虚拟同步发电机控制技术](#)

Virtual synchronous generator control technology with fractional virtual inertia for grid-connected inverters
控制与决策. 2021, 36(2): 463–468 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0391>

[基于强化学习的倒立摆分数阶梯度下降RBF控制](#)

Reinforcement learning based fractional gradient descent RBF neural network control of inverted pendulum
控制与决策. 2021, 36(1): 125–134 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0816>

[基于稀疏度阶数优化的杂波密度估计算法](#)

A clutter density estimation algorithm by optimized sparsity order
控制与决策. 2020, 35(12): 2923–2930 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0429>

含有分数阶有色关联噪声的分数阶系统的卡尔曼滤波器设计

高哲^{1,2†}, 黄晓敏¹, 陈小姣¹

(1. 辽宁大学 数学院, 沈阳 110036; 2. 辽宁大学 轻型产业学院, 沈阳 110036)

摘要: 提出基于 Tustin 生成函数的分数阶卡尔曼滤波器设计方法, 以解决含有相互关联的分数阶有色过程噪声和分数阶有色测量噪声的连续时间线性分数阶系统的状态估计问题. 通过 Tustin 生成函数方法, 对连续时间线性分数阶系统进行离散化, 将分数阶系统的微分方程转化为差分方程. 利用增广向量法, 将分数阶状态方程和分数阶有色噪声作为新的增广状态向量, 从而将分数阶有色噪声转化为高斯白噪声. 然后, 提出一种基于 Tustin 生成函数的分数阶卡尔曼滤波算法, 有效地实现对含有相互关联的分数阶有色过程噪声和分数阶有色测量噪声的连续时间线性分数阶系统的状态估计. 与基于 Grünwald-Letnikov 差分的离散化方法相比, 所提出的基于 Tustin 生成函数的卡尔曼滤波算法得到的状态估计精度更高, 状态估计效果更好. 最后, 通过仿真结果验证所提出算法的有效性.

关键词: 线性分数阶系统; 分数阶卡尔曼滤波器; 状态估计; 关联噪声; 有色噪声; Tustin 生成函数

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.1418

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 高哲, 黄晓敏, 陈小姣. 含有分数阶有色关联噪声的分数阶系统的卡尔曼滤波器设计 [J]. 控制与决策, 2021, 36(7): 1672-1678.

Design of Kalman filter for fractional-order systems with correlated fractional-order colored noises

GAO Zhe^{1,2†}, HUANG Xiao-min¹, CHEN Xiao-jiao¹

(1. School of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, China; 2. College of Light Industry, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

Abstract: The design method of fractional-order Kalman filter based on Tustin generating function is proposed to solve the problem on the state estimation for continuous-time linear fractional-order systems with correlated fractional-order colored process noise and fractional-order colored measurement noise. By Tustin generating function method, the continuous-time linear fractional-order system is discretized, the differential equation of fractional-order system is transformed into a difference equation. Using the augmented vector method, the fractional-order state equation and the fractional-order colored noises are constructed as a new augmented state vector, and the fractional-order colored noises are transformed into white Gaussian noises. Then, a fractional-order Kalman filter algorithm based on Tustin generating function is presented to achieve effectively the state estimation of the continuous-time linear fractional-order system involving correlated fractional-order colored process noise and fractional-order colored measurement noise. Compared with Grünwald-Letnikov difference, the state estimation obtained by Kalman filter algorithm using Tustin generating function is more accurate and the effect is more satisfactory. Finally, the effectiveness of the proposed algorithms is validated by the simulation result.

Keywords: linear fractional-order system; fractional-order Kalman filter; state estimation; correlated noise; colored noise; Tustin generating function

0 引言

虽然分数阶微积分理论早在三百多年前就有学者开始研究, 但是相关研究成果仅发表于数学领域.

随着现代物理学的快速发展, 很多学者发现分数阶系统模型为实际物理系统提供了一种揭示系统动态特性的新手段, 特别是一些具有黏弹性和反常扩散性系

收稿日期: 2019-10-09; 修回日期: 2020-03-07.

基金项目: 辽宁省“兴辽英才计划”基金项目(XLYC1807229); 辽宁省自然科学基金项目(20180520009); 中国博士后科学基金项目(2019M651206); 辽宁大学校级科学研究基金项目(LDGY2019020).

责任编辑: 周彬.

†通讯作者. E-mail: gaozhe@lnu.edu.cn.

统^[1]. 因此,分数阶系统的建模与控制^[2-4]成为控制理论研究的一个热点问题.

考虑到测量环节中会有过程噪声和测量噪声的干扰,尽管系统中某些信息可以被直接测量,但在实际工程中仍需设计状态观测器以获得系统有效的状态估计,使其精度更高,实验效果更好. 此外,实际的工业控制系统一般都采用计算机实现控制和信息采集,因此利用含有噪声的输入输出测量信息对系统进行状态估计是分析系统运行故障与状态安全运行的前提和保障. 对于整数阶系统的状态估计问题,研究成果非常丰富. 例如,粒子滤波器^[5]、神经网络法^[6]以及卡尔曼滤波器^[7].

由于分数阶微积分运算具有记忆性,与整数阶系统相比,分数阶系统能更好地揭示实际物理系统的动态行为. 然而,分数阶系统的状态估计需要很多测量信号的历史信息,无论是状态空间模型还是传递函数模型都更为复杂. 对于分数阶系统的状态估计问题,卡尔曼滤波器是一种有效的鲁棒状态观测器. 文献[8]提出了基于Tustin生成函数的分数阶卡尔曼滤波器,解决了含有过程噪声和测量噪声的连续时间线性或非线性分数阶系统的状态估计问题. 对于离散时间非线性分数阶系统的状态估计问题,文献[9]提出了一种基于分数阶插值容积卡尔曼滤波算法.

考虑到实际工程系统中的噪声可能是非高斯白噪声,文献[10]提出了分数阶卡尔曼滤波器,有效地实现了含有分数阶有色过程噪声或者分数阶有色测量噪声的连续时间线性分数阶系统的状态估计. 针对离散时间分数阶系统,文献[11-12]分别研究了测量信号中含有Lévy噪声的线性和非线性卡尔曼滤波器设计问题. 考虑到过程噪声和测量噪声可能是相互关联的,文献[13]针对含有关联或不关联高斯白噪声的连续时间线性分数阶系统的状态估计问题,提出了基于分数阶平均值法的分数阶卡尔曼滤波器. 文献[14]在文献[13]的基础上,提出了基于Grünwald-Letnikov (G-L) 差分的扩展分数阶卡尔曼滤波算法,有效地实现了含有关联高斯白噪声的非线性分数阶系统的状态估计. 除了相互关联的高斯白噪声,文献[15]提出了基于G-L差分 and Tustin生成函数的分数阶扩展卡尔曼滤波器,准确估计了含有关联的分数阶有色过程噪声或有色测量噪声的连续时间非线性分数阶系统的状态和参数.

本文主要的创新点为: 1) 为了减小在分数阶有色噪声干扰下的连续时间线性分数阶系统状态估计的误差,采用Tustin生成函数方法,离散化连续时间分

数阶系统; 2) 考虑到实际物理系统中的噪声可能是非高斯白噪声,增广向量法用来处理系统中相互关联的分数阶有色过程噪声和有色测量噪声; 3) 提出基于Tustin生成函数的分数阶卡尔曼滤波器,提高含有相互关联的分数阶有色过程噪声和有色测量噪声的连续时间线性分数阶系统状态估计的精度.

1 问题描述

由于采用Caputo分数阶定义的分数阶系统初始条件与整数阶系统要求的一致性,本文研究Caputo定义下的连续时间线性分数阶系统的状态估计问题.

考虑如下含有相互关联的分数阶有色过程噪声和有色测量噪声的连续时间线性分数阶系统:

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t), \quad (1)$$

$$z(t) = Cx(t) + v(t). \quad (2)$$

其中: ${}_0^C D_t^\alpha$ 为0到 t 时刻的 α 阶Caputo分数阶微分算子, $\alpha \in (0, 2)$ 为分数阶阶次; $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times p}$, $G \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbf{R}^{q \times n}$; 向量 $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^p$, $z(t) \in \mathbf{R}^q$ 分别为状态、输入和输出; $w(t) \in \mathbf{R}^m$ 和 $v(t) \in \mathbf{R}^q$ 为关联的分数阶有色过程噪声和有色测量噪声.

为了方便,在 $t = kT$ 点的采样值用 $x(k)$ 、 $u(k)$ 、 $z(k)$ 、 $w(k)$ 和 $v(k)$ 代替 $x(t)$ 、 $u(t)$ 、 $z(t)$ 、 $w(t)$ 和 $v(t)$. 当 $j > k$ 时,有 $x(k-j) = 0$. 于是,基于G-L差分^[16]的 α 阶微分算子可近似表示为

$${}_0^C D_t^\alpha x(k) \approx \Delta^\alpha x(k) = \frac{1}{T^\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} x(k-j).$$

进而,基于G-L差分的分数阶系统的状态方程(1)可整理为

$$x(k) = A_\alpha x(k-1) + B_\alpha u(k-1) + G_\alpha w(k-1) + \sum_{j=2}^k (-1)^{j+1} \Upsilon_j x(k-j).$$

其中

$$A_\alpha = T^\alpha A + \alpha I, B_\alpha = T^\alpha B, G_\alpha = T^\alpha G,$$

$$\Upsilon_j = \binom{\alpha}{j}.$$

为了提高状态估计精度,采用Tustin生成函数方法^[17]离散化分数阶系统的状态方程,则基于Tustin生成函数的分数阶导数可近似为

$${}_0^C D_t^\alpha x(k) \approx \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha \left(\frac{1-p^{-1}}{1+p^{-1}}\right)^\alpha x(k),$$

其中 $p^{-j}x(k) = x(k-j)$. 分数阶系统的状态方程可离散化为

$$\left(\frac{2}{T}\right)^\alpha \left(\frac{1-p^{-1}}{1+p^{-1}}\right)^\alpha x(k) = Ax(k) + Bu(k) + Gw(k). \tag{3}$$

2 主要结果

2.1 分数阶有色噪声的处理

对式(1)和(2)所描述的分数阶系统,其分数阶有色过程噪声和有色测量噪声可以表示为

$${}^C_0 D_t^\beta w(t) = Fw(t) + H\varepsilon(t), \tag{4}$$

$${}^C_0 D_t^\gamma v(t) = Mv(t) + N\xi(t). \tag{5}$$

其中: $\beta, \gamma \in (0, 2)$ 为分数阶噪声阶次; $F \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $H \in \mathbf{R}^{m \times r}$, $M \in \mathbf{R}^{q \times q}$, $N \in \mathbf{R}^{q \times t}$, $\varepsilon(k) \in \mathbf{R}^r$, $\xi(k) \in \mathbf{R}^t$ 为相互关联的数学期望为 $\mathbf{0}$, 协方差矩阵分别为 Q 和 R 的高斯白噪声, 且关联噪声的协方差矩阵为 $W \neq \mathbf{0}, \mathbf{0}$ 为适当维度的零矩阵或者零向量.

根据 Tustin 生成函数, 式(4)和(5)可离散化为

$$\left(\frac{2}{T}\right)^\beta \left(\frac{1-p^{-1}}{1+p^{-1}}\right)^\beta w(k) = Fw(k) + H\varepsilon(k), \tag{6}$$

$$\left(\frac{2}{T}\right)^\gamma \left(\frac{1-p^{-1}}{1+p^{-1}}\right)^\gamma v(k) = Mv(k) + N\xi(k). \tag{7}$$

对式(3)、(6)和(7)应用广义二项式定理, 分数阶状态方程、分数阶有色过程噪声和分数阶有色测量噪声的离散化差分方程分别为

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha \sum_{j=0}^k (-1)^j \gamma_j x(k-j) = \\ \sum_{j=0}^k \gamma_j (Ax(k-j) + Bu(k-j) + Gw(k-j)), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{T}\right)^\beta \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\beta}{j} w(k-j) = \\ \sum_{j=0}^k \binom{\beta}{j} (Fw(k-j) + H\varepsilon(k-j)), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{T}\right)^\gamma \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\gamma}{j} v(k-j) = \\ \sum_{j=0}^k \binom{\gamma}{j} (Mv(k-j) + N\xi(k-j)). \end{aligned} \tag{10}$$

选择合适的采样周期 T 使得 $(2/T)^\alpha I - A$, $(2/T)^\beta I - F$ 和 $(2/T)^\gamma I - M$ 可逆, 则式(8)~(10)可整理为

$$\begin{aligned} x(k) = \\ \sum_{j=1}^k \mathcal{A}_j x(k-j) + \sum_{j=0}^k \mathcal{B}_j u(k-j) + \sum_{j=0}^k \mathcal{G}_j w(k-j), \\ w(k) = \sum_{j=1}^k \mathcal{F}_j w(k-j) + \sum_{j=0}^k \mathcal{H}_j \varepsilon(k-j), \end{aligned}$$

$$v(k) = \sum_{j=1}^k \mathcal{M}_j v(k-j) + \sum_{j=0}^k \mathcal{N}_j \xi(k-j).$$

其中

$$\mathcal{A}_j = \left(\left(\frac{2}{T}\right)^\alpha I - A\right)^{-1} \gamma_j \left[(-1)^{j+1} \left(\frac{2}{T}\right)^\alpha I + A\right],$$

$$\mathcal{B}_j = \left(\left(\frac{2}{T}\right)^\alpha I - A\right)^{-1} \gamma_j B,$$

$$\mathcal{G}_j = \left(\left(\frac{2}{T}\right)^\alpha I - A\right)^{-1} \gamma_j G,$$

$$\mathcal{F}_j = \left(\left(\frac{2}{T}\right)^\beta I - F\right)^{-1} \binom{\beta}{j} \left[(-1)^{j+1} \left(\frac{2}{T}\right)^\beta I + F\right],$$

$$\mathcal{H}_j = \left(\left(\frac{2}{T}\right)^\beta I - F\right)^{-1} \binom{\beta}{j} H,$$

$$\mathcal{M}_j = \left(\left(\frac{2}{T}\right)^\gamma I - M\right)^{-1} \binom{\gamma}{j} \left[(-1)^{j+1} \left(\frac{2}{T}\right)^\gamma I + M\right],$$

$$\mathcal{N}_j = \left(\left(\frac{2}{T}\right)^\gamma I - M\right)^{-1} \binom{\gamma}{j} N.$$

为了处理分数阶有色噪声问题, 定义增广状态 $\varsigma(k) = [x^T(k), w^T(k), v^T(k)]^T$, 增广噪声 $\zeta(k) = [\varepsilon^T(k), \xi^T(k)]^T$, 则增广状态方程可表示为

$$\begin{aligned} \varsigma(k) = \\ \sum_{j=1}^k \tilde{\mathcal{A}}_j \varsigma(k-j) + \sum_{j=0}^k \tilde{\mathcal{B}}_j u(k-j) + \sum_{j=0}^k \tilde{\mathcal{H}}_j \zeta(k-j). \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_j = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_j & \mathcal{G}_0 \mathcal{F}_j + \mathcal{G}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{F}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathcal{M}_j \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{B}}_j = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_j \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{H}}_j = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_0 \mathcal{H}_j & \mathbf{0} \\ \mathcal{H}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{N}_j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

增广噪声的数学期望和协方差矩阵分别为 $\mathbf{0}$ 和 $\mathcal{W} = \begin{bmatrix} Q & W \\ W^T & R \end{bmatrix}$. 因为 \mathcal{W} 是半正定矩阵, $\mathcal{W} \geq \mathbf{0}$ 等价于 $R - W^T Q^{-1} W \geq \mathbf{0}$. 输出方程变为 $z(k) = \tilde{\mathcal{C}} \varsigma(k)$, 其中 $\tilde{\mathcal{C}} = [C, \mathbf{0}, I]$.

2.2 分数阶卡尔曼滤波器的设计

定义 $\varsigma(k)$ 的估计值和预测值为

$$\hat{\varsigma}(k|k) = E[\varsigma(k)|\sigma(k)],$$

$$\hat{\varsigma}(k|k-1) = E[\varsigma(k)|\mu(k)].$$

其中: $\sigma(k)$ 包括 $z(0), z(1), \dots, z(k), u(0), u(1), \dots, u(k)$ 的信息, $\mu(k)$ 包括 $z(0), z(1), \dots, z(k-1), u(0), u(1), \dots, u(k)$ 的信息. 那么增广状态的预测方程 $\hat{\varsigma}(k|k-1)$ 可表示为

$$\hat{\zeta}(k|k-1) = E\left[\left(\sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_j \zeta(k-j) + \sum_{j=0}^k \tilde{\mathbf{B}}_j u(k-j) + \sum_{j=0}^k \tilde{\mathbf{H}}_j \zeta(k-j)\right) \middle| \mu(k)\right].$$

假设 $E[\zeta(k-j)|\mu(k)] \cong E[\zeta(k-j)|\sigma(k-j)]$, 有

$$\hat{\zeta}(k|k-1) = \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_j \hat{\zeta}(k-j|k-j) + \sum_{j=0}^k \tilde{\mathbf{B}}_j u(k-j).$$

增广状态的估计方程 $\hat{\zeta}(k|k)$ 为

$$\hat{\zeta}(k|k) = \hat{\zeta}(k|k-1) + K(k)(z(k) - \tilde{\mathbf{C}}\hat{\zeta}(k|k-1)).$$

假设条件 $\hat{\zeta}(k-j|k-j) \approx \zeta(k-j)$ 成立, 可得

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(k|k) - \zeta(k) &= (I - K(k)\tilde{\mathbf{C}}) \left(\sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_j (\hat{\zeta}(k-j|k-j) - \zeta(k-j)) - \sum_{j=0}^k \tilde{\mathbf{H}}_j \zeta(k-j) \right) \\ &\approx - (I - K(k)\tilde{\mathbf{C}}) \sum_{j=0}^k \tilde{\mathbf{H}}_j \zeta(k-j). \end{aligned}$$

考虑到矩阵 $\tilde{\mathbf{H}}_j$ 的范数是随 j 增加而减小的, 只保留前两项可得估计误差 $\hat{\zeta}(k|k) - \zeta(k)$ 近似为

$$\hat{\zeta}(k|k) - \zeta(k) \approx - (I - K(k)\tilde{\mathbf{C}}) \sum_{j=0}^1 \tilde{\mathbf{H}}_j \zeta(k-j). \tag{11}$$

当 $i = j$ 时, 有

$$\begin{aligned} E\left[\left(\sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_i (\hat{\zeta}(k-i|k-i) - \zeta(k-i))\right) \times \left(\sum_{j=1}^k (\hat{\zeta}(k-j|k-j) - \zeta(k-j))^T \tilde{\mathbf{A}}_j^T\right)\right] &= \\ \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_j P(k-j|k-j) \tilde{\mathbf{A}}_j^T. \end{aligned} \tag{12}$$

当 $i \neq j$ 时, 有

$$\begin{aligned} E\left[\left(\sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_i (\hat{\zeta}(k-i|k-i) - \zeta(k-i))\right) \times \left(\sum_{j=1}^k (\hat{\zeta}(k-j|k-j) - \zeta(k-j))^T \tilde{\mathbf{A}}_j^T\right)\right] &\approx \\ \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\mathbf{A}}_j \tilde{\mathbf{H}}_1 \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_0^T \tilde{\mathbf{A}}_{j+1}^T + \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\mathbf{A}}_{j+1} \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_1^T \tilde{\mathbf{A}}_j^T, \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\tilde{\mathbf{A}}_j = \tilde{\mathbf{A}}_j (I - K(k-j)\tilde{\mathbf{C}})$.

此外, 有如下等式成立:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_i (\hat{\zeta}(k-i|k-i) - \zeta(k-i))\right) \times \left(\sum_{j=0}^k \tilde{\mathbf{H}}_j \zeta(k-j)\right)^T\right] &\approx \\ - \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_j \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_j^T - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\mathbf{A}}_j \tilde{\mathbf{H}}_1 \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_{j+1}^T, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} E\left[\left(\sum_{i=0}^k \tilde{\mathbf{H}}_i \zeta(k-i)\right) \times \left(\sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_j (\hat{\zeta}(k-j|k-j) - \zeta(k-j))\right)^T\right] &\approx \\ - \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{H}}_j \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_0^T \tilde{\mathbf{A}}_j^T - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\mathbf{H}}_{j+1} \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_1^T \tilde{\mathbf{A}}_j^T, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} E\left[\left(\sum_{i=0}^k \tilde{\mathbf{H}}_i \zeta(k-i)\right) \left(\sum_{j=0}^k \tilde{\mathbf{H}}_j \zeta(k-j)\right)^T\right] &= \\ \sum_{j=0}^k \tilde{\mathbf{H}}_j \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_j^T. \end{aligned} \tag{16}$$

定理1 考虑由状态方程(1)和输出方程(2)所描述的时间连续线性分数阶系统, 过程噪声和测量噪声的采样值 $w(k)$ 和 $v(k)$ 是分数阶有色且相互关联的, 噪声 $\varepsilon(k)$ 和 $\xi(k)$ 是由过程噪声 $w(k)$ 和测量噪声 $v(k)$ 生成的高斯白噪声. 那么, 基于 Tustin 生成函数的分数阶卡尔曼滤波器设计如下:

$$\hat{\zeta}(k|k-1) = \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_j \hat{\zeta}(k-j|k-j) + \sum_{j=0}^k \tilde{\mathbf{B}}_j u(k-j),$$

$$\hat{\zeta}(k|k) = \hat{\zeta}(k|k-1) + K(k)(z(k) - \tilde{\mathbf{C}}\hat{\zeta}(k|k-1)),$$

$$P(k|k-1) =$$

$$\sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_j P(k-j|k-j) \tilde{\mathbf{A}}_j^T + \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\mathbf{A}}_j \tilde{\mathbf{H}}_1 \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_0^T \tilde{\mathbf{A}}_{j+1}^T +$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\mathbf{A}}_{j+1} \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_1^T \tilde{\mathbf{A}}_j^T + \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{A}}_j \tilde{\mathbf{H}}_0 \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_j^T +$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\mathbf{A}}_j \tilde{\mathbf{H}}_1 \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_{j+1}^T + \sum_{j=1}^k \tilde{\mathbf{H}}_j \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_0^T \tilde{\mathbf{A}}_j^T +$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \tilde{\mathbf{H}}_{j+1} \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_1^T \tilde{\mathbf{A}}_j^T + \sum_{j=0}^k \tilde{\mathbf{H}}_j \mathcal{W} \tilde{\mathbf{H}}_j^T,$$

$$K(k) = P(k|k-1)\tilde{\mathbf{C}}^T(\tilde{\mathbf{C}}P(k|k-1)\tilde{\mathbf{C}}^T)^{-1},$$

$$P(k|k) = (I - K(k)\tilde{\mathbf{C}})P(k|k-1)(I - K(k)\tilde{\mathbf{C}})^T.$$

证明 估计误差矩阵 $P(k|k-1)$ 为

$$P(k|k-1) =$$

$$E[(\hat{\zeta}(k|k-1) - \zeta(k))(\hat{\zeta}(k|k-1) - \zeta(k))^T] =$$

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^k \tilde{\mathcal{A}}_i (\hat{\zeta}(k-i|k-i) - \zeta(k-i)) - \sum_{i=0}^k \tilde{\mathcal{H}}_i \zeta(k-i) \right) \left(\sum_{j=1}^k \tilde{\mathcal{A}}_j (\hat{\zeta}(k-j|k-j) - \zeta(k-j)) - \sum_{j=0}^k \tilde{\mathcal{H}}_j \zeta(k-j) \right)^T \right]. \quad (17)$$

将式(12)~(16)代入(17),可得估计误差矩阵 $P(k|k-1)$. 利用式(11),滤波器的协方差矩阵 $P(k|k)$ 为

$$P(k|k) = E[(\hat{\zeta}(k|k) - \zeta(k))(\hat{\zeta}(k|k) - \zeta(k))^T] = E[(I - K(k)\tilde{\mathcal{C}})(\hat{\zeta}(k|k-1) - \zeta(k)) \times ((I - K(k)\tilde{\mathcal{C}})(\hat{\zeta}(k|k-1) - \zeta(k)))^T] = (I - K(k)\tilde{\mathcal{C}})P(k|k-1)(I - K(k)\tilde{\mathcal{C}})^T.$$

由于 $\partial[(\hat{\zeta}(k|k) - \zeta(k))^T(\hat{\zeta}(k|k) - \zeta(k))]/\partial K(k) = \mathbf{0}$ 与 $\partial \text{tr}(P(k|k))/\partial K(k) = \mathbf{0}$ 是等价的^[14],有

$$-\tilde{\mathcal{C}}P(k|k-1)(I - K(k)\tilde{\mathcal{C}})^T = \mathbf{0}.$$

那么,卡尔曼增益矩阵 $K(k)$ 为

$$K(k) = P(k|k-1)\tilde{\mathcal{C}}^T(\tilde{\mathcal{C}}P(k|k-1)\tilde{\mathcal{C}}^T)^{-1}. \quad \square$$

注1 由于状态估计算法的计算量会随测量数据的增加而急剧增大,在某种程度上不利于应用到实际工程中. 预测值 $\hat{\zeta}(k|k-1)$ 和预测误差矩阵 $P(k|k-1)$ 可以用带有截断 L 的方程代替,当 $k \geq L$ 时, $\hat{\zeta}(k|k-1)$ 和 $P(k|k-1)$ 可表示为

$$\hat{\zeta}(k|k-1) = \sum_{j=1}^L \tilde{\mathcal{A}}_j \hat{\zeta}(k-j|k-j) + \sum_{j=0}^L \tilde{\mathcal{B}}_j u(k-j),$$

$$P(k|k-1) =$$

$$\sum_{j=1}^L \tilde{\mathcal{A}}_j P(k-j|k-j) \tilde{\mathcal{A}}_j^T + \sum_{j=1}^{L-1} \tilde{\mathcal{A}}_j \tilde{\mathcal{H}}_1 \mathcal{W} \tilde{\mathcal{H}}_0^T \tilde{\mathcal{A}}_{j+1}^T + \sum_{j=1}^{L-1} \tilde{\mathcal{A}}_{j+1} \tilde{\mathcal{H}}_0 \mathcal{W} \tilde{\mathcal{H}}_1^T \tilde{\mathcal{A}}_j^T + \sum_{j=1}^{L-1} \tilde{\mathcal{A}}_j \tilde{\mathcal{H}}_0 \mathcal{W} \tilde{\mathcal{H}}_j^T + \sum_{j=1}^{L-1} \tilde{\mathcal{A}}_j \tilde{\mathcal{H}}_1 \mathcal{W} \tilde{\mathcal{H}}_{j+1}^T + \sum_{j=1}^L \tilde{\mathcal{H}}_j \mathcal{W} \tilde{\mathcal{H}}_0^T \tilde{\mathcal{A}}_j^T + \sum_{j=1}^{L-1} \tilde{\mathcal{H}}_{j+1} \mathcal{W} \tilde{\mathcal{H}}_1^T \tilde{\mathcal{A}}_j^T + \sum_{j=0}^L \tilde{\mathcal{H}}_j \mathcal{W} \tilde{\mathcal{H}}_j^T.$$

注2 如果连续时间线性分数阶系统所含的噪声是分数阶有色且不相关的,则只需令关联噪声的协方差矩阵 $W = \mathbf{0}$,进一步表明了相互不关联噪声情况是关联噪声情况的一种特例.

3 仿真实例

考虑如下含有关联的分数阶有色过程噪声和分数阶有色测量噪声的连续时间线性分数阶系统:

$${}^C_0 D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t), \quad (18)$$

$$z(t) = Cx(t) + v(t), \quad (19)$$

$${}^C_0 D_t^\beta w(t) = Fw(t) + H\varepsilon(t), \quad (20)$$

$${}^C_0 D_t^\gamma v(t) = Mv(t) + N\xi(t). \quad (21)$$

其中

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T, \quad x(0) = [-0.2, 0.5]^T,$$

$$w(0) = 0, \quad \alpha = 0.8, \quad \beta = 0.6, \quad \gamma = 0.7,$$

$$A = \begin{bmatrix} -85 & 11 \\ 9 & -45 \end{bmatrix}, \quad B = [1, 1]^T, \quad G = [1, 1]^T,$$

$$C = [1, 1], \quad F = -0.2, \quad H = 0.3,$$

$$M = -0.5, \quad N = 0.4,$$

噪声的协方差矩阵为 $Q = 0.3, R = 0.7, W = 0.1$.

为了获得有效的状态估计,选取输入信号为 $u(t) = 15 \sin(3t)$,采样时间为 $T = 0.008 \text{ s}$,运行时间为 20 s . 此外,分数阶卡尔曼滤波器的初始条件分别设为 $\hat{\zeta}(0|0) = [0, 0, 0]^T, P(0|0) = I$ 和 $K(0) = [0, 0, 0]^T$. 图1和图2分别为测量值 $z(k)$ 和截断 $L = 10, 30, 50$ 时状态向量 $x(k)$ 与其估计值.

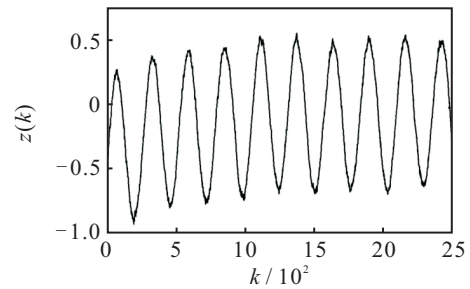
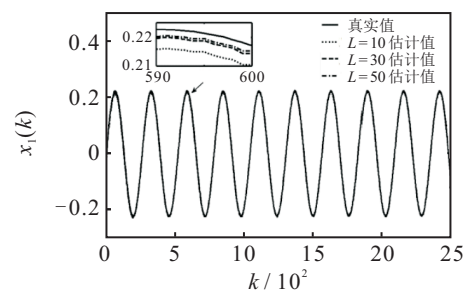
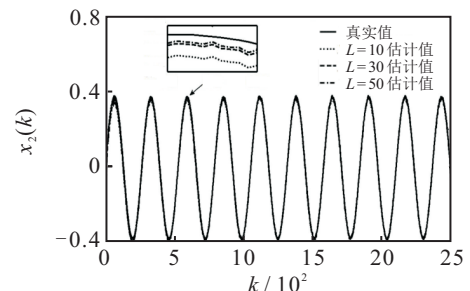


图1 测量值 $z(k)$



(a) $x_1(k)$ 与其估计值



(b) $x_2(k)$ 与其估计值

图2 截断 $L = 10, 30, 50$ 时状态 $x(k)$ 与其估计值

由图2可见,随着截断 L 的增加,状态向量 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 的真实值与估计值越来越接近.因此,由定理1设计的分数阶卡尔曼滤波器可以有效地实现含有相互关联的分数阶有色过程噪声和有色测量噪声的连续时间线性分数阶系统的状态估计.

为了评估基于Tustin生成函数的分数阶卡尔曼滤波器的状态估计效果,误差指数定义如下:

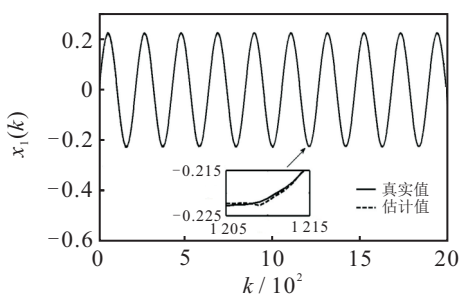
$$E = \frac{1}{H_m + 1} \sum_{k=0}^{H_m} \sqrt{\sum_{i=1}^2 (\varsigma_i(k) - \hat{\varsigma}_i(k|k))^2}. \quad (22)$$

其中: $\varsigma_1(k) = x_1(k)$, $\varsigma_2(k) = x_2(k)$; $H_m + 1$ 为输入和输出采样点的数量,本例 $H_m = 2500$.固定采样周期 $T = 0.008\text{ s}$,对于不同截断 $L = 10, 20, 30, 40, 50, 60$,基于G-L差分法和Tustin生成函数的分数阶卡尔曼滤波器得到的状态估计误差对比结果如表1所示.

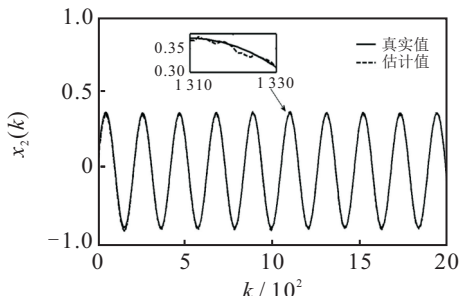
表1 不同截断 L 下两种离散化方法的估计值误差

截断 L	Tustin生成函数	G-L差分
10	0.0127	0.0152
20	0.0097	0.0122
30	0.0086	0.0114
40	0.0082	0.0111
50	0.0079	0.0109
60	0.0077	0.0108

由表1可见,两种离散化方法得到的状态估计误差均随截断 L 的增加而逐渐减小.因此,基于G-L差分法和Tustin生成函数的分数阶卡尔曼滤波器都可以有效估计所研究分数阶系统的状态.与G-L差分相比,基于Tustin生成函数的分数阶卡尔曼滤波器得到的状态估计精度更高.



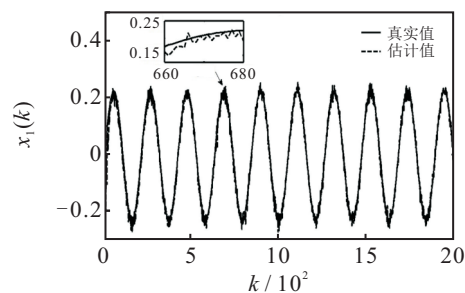
(a) $x_1(k)$ 与其估计值



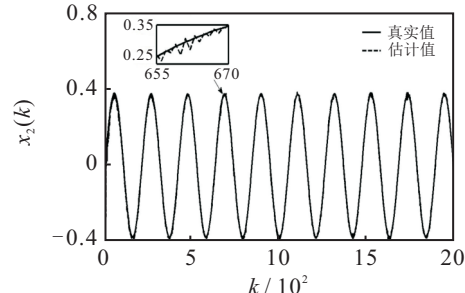
(b) $x_2(k)$ 与其估计值

图3 基于定理1的状态 $x(k)$ 与其估计值

如果将采样周期增大到 $T = 0.01\text{ s}$,固定截断 $L = 30$ 且其他条件保持不变,则两种方法的分数阶卡尔曼滤波器得到的状态估计值和真实值如图3和图4所示.



(a) $x_1(k)$ 与其估计值



(b) $x_2(k)$ 与其估计值

图4 基于G-L差分的状态 $x(k)$ 与其估计值

由图3和图4描述的状态估计曲线可见,基于Tustin生成函数的分数阶卡尔曼滤波器得到的状态估计值仍然非常接近于真实值,表明对于采样周期较大的连续时间线性分数阶系统的状态估计,该算法依然是有效的.此外,相对于G-L差分法,基于Tustin生成函数的分数阶卡尔曼滤波器的状态估计效果更好.

4 结论

本文研究了含有相互关联分数阶有色过程噪声和分数阶有色测量噪声的连续时间线性分数阶系统的状态估计问题.首先,采用Tustin生成函数方法对分数阶系统进行离散化,有效提高了状态估计精度.然后,利用增广向量法处理分数阶有色噪声,提出一种高精度的分数阶卡尔曼滤波算法,相对于G-L差分法,基于Tustin生成函数法的分数阶卡尔曼滤波器得到的状态估计误差更小,估计效果更好.此外,与G-L差分法相比,基于Tustin生成函数的分数阶卡尔曼滤波器对于大采样周期分数阶系统的状态估计仍然有效.

参考文献(References)

[1] Sauer R A, Ghaffari R, Gupta A. The multiplicative deformation split for shells with application to growth, chemical swelling, thermoelasticity, viscoelasticity and elastoplasticity[J]. International Journal of Solids and

- Structures, 2019, 174/175: 53-68.
- [2] 秦昌茂, 齐乃明, 朱凯. 分数阶系统变阶次状态空间建模及稳定理论[J]. 控制与决策, 2011, 26(11): 1757-1760.
(Qin C M, Qi N M, Zhu K. State space modeling and stability theory of variable fractional order system[J]. Control and Decision, 2011, 26(11): 1757-1760.)
- [3] 薛定宇, 赵春娜. 分数阶系统的分数阶PID控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 771-776.
(Xue D Y, Zhao C N. Fractional order PID controller design for fractional order system[J]. Control Theory & Applications, 2007, 24(5): 771-776.)
- [4] 朱呈祥, 邹云. 分数阶控制研究综述[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 161-169.
(Zhu C X, Zou Y. Summary of research on fractional-order control[J]. Control and Decision, 2009, 24(2): 161-169.)
- [5] Liu M Z, He M F, Qiao S J, et al. A high-order state-of-charge estimation model by cubature particle filter[J]. Measurement, 2019, 146: 35-42.
- [6] Li R X, Gao X B, Cao J D, et al. Dissipativity and exponential state estimation for quaternion-valued memristive neural networks[J]. Neurocomputing, 2019, 363: 236-245.
- [7] Garcia R V, Pardal P C P M, Kuga H K, et al. Nonlinear filtering for sequential spacecraft attitude estimation with real data: Cubature Kalman filter, unscented Kalman filter and extended Kalman filter[J]. Advances in Space Research, 2019, 63(2): 1038-1050.
- [8] Gao Z. Fractional-order Kalman filters for continuous-time linear and nonlinear fractional-order systems using Tustin generating function[J]. International Journal of Control, 2019, 92(5): 960-974.
- [9] Ramezani A, Safarinejadian B, Zarei J. Fractional order chaotic cryptography in colored noise environment by using fractional order interpolatory cubature Kalman filter[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2019, 41(11): 3206-3222.
- [10] Yang C, Gao Z, Liu F H. Kalman filters for linear continuous-time fractional-order systems involving coloured noises using fractional-order average derivative[J]. IET Control Theory & Applications, 2018, 12(4): 456-465.
- [11] Wu X P, Sun Y H, Lu Z G. A modified Kalman filter algorithm for fractional system under Lévy noises[J]. Journal of the Franklin Institute, 2015, 352(5): 1963-1978.
- [12] Sun Y H, Wu X P, Cao J D, et al. Fractional extended Kalman filtering for non-linear fractional system with Lévy noises[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(3): 349-358.
- [13] Liu F H, Gao Z, Yang C, et al. Fractional-order Kalman filters for continuous-time fractional-order systems involving correlated and uncorrelated process and measurement noises[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2019, 41(7): 1933-1947.
- [14] 高哲, 陈小姣. 含有关联噪声的非线性分数阶系统的扩展卡尔曼滤波器设计[J]. 辽宁大学学报: 自然科学版, 2019, 46(4): 342-348.
(Gao Z, Chen X J. Design of extended Kalman filter for nonlinear fractional-order systems involving process and measurement noises[J]. Journal of Liaoning University: Natural Sciences Edition, 2019, 46(4): 342-348.)
- [15] Huang X M, Gao Z, Ma R C, et al. Extended Kalman filters for fractional-order nonlinear continuous-time systems containing unknown parameters with correlated colored noises[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(17): 5930-5956.
- [16] Sierociuk D, Dski A D. Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation[J]. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 2006, 16(1): 129-140.
- [17] Vinagre B M, Chen Y Q, Petras I. Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator[J]. Journal of the Franklin Institute, 2003, 340(5): 349-362.

作者简介

高哲(1983—), 男, 副教授, 博士, 从事分数阶系统分析与设计等研究, E-mail: gaozhe@lnu.edu.cn;

黄晓敏(1994—), 女, 硕士生, 从事分数阶系统的状态估计和参数辨识的研究, E-mail: huangxm0924@163.com;

陈小姣(1994—), 女, 硕士生, 从事非线性分数阶系统的状态估计的研究, E-mail: chenxiaojiao1314@163.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)