控制与决策
Control and Decision

考虑消费者缺货容忍的变质品订购与信用期策略研究

江文辉，李思雯，徐菱，丁小东，李延来

考虑消费者缺货容忍的变质品订购与信用期策略研究

江文辉[1], 李思雯[1], 徐 菱[1,2†], 丁小东[3], 李延来[1,2]

(1. 西南交通大学 交通运输与物流学院，成都 611756；2. 西南交通大学 综合交通运输智能化国家地方联合工程实验室，成都 611756；3. 中国铁道科学研究院集团有限公司 运输及经济研究所，北京 100081)

摘 要: 考虑消费者存在缺货容忍行为,研究变质品的联合订购和信用期决策问题.假设延迟订购消费者面对缺货等待时存在一个容忍期限(即在该容忍期限内零售商无需支付缺货成本),同时考虑市场需求受商业信用期的影响,库存系统允许缺货且短缺量部分延迟订购.以零售商的平均利润最大化为目标,分两种情形构建变质品的订购和信用期决策模型.从理论上证明最优解的存在性和唯一性,给出相关定理结论,并在此基础上设计一个寻找最优解的两阶段迭代算法.最后通过数值算例展示了模型和算法的应用,并完成主要参数的灵敏度分析.研究结果表明:消费者的缺货容忍行为可以有效增加零售商利润,减低产品变质损失,同时还可以激励零售商提供更长的商业信用期,进而实现买卖双方的共赢.

关键词: 变质品；缺货容忍；订购；商业信用；部分延迟订购

中图分类号: F253.4；F224.3 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.1552 **开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

引用格式: 江文辉,李思雯,徐菱,等. 考虑消费者缺货容忍的变质品订购与信用期策略研究[J]. 控制与决策, 2021, 36(7): 1732-1742.

Ordering and trade credit strategies for deteriorating items considering consumer's shortage tolerance

JIANG Wen-hui[1], *LI Si-wen*[1], *XU Ling*[1,2†], *DING Xiao-dong*[3], *LI Yan-lai*[1,2]

(1. School of Transportation & Logistic，Southwest Jiaotong University，Chengdu 611756，China；2. National and Combined Engineering Lab of Intelligentizing Integrated Transportation，Southwest Jiaotong University，Chengdu 611756，China；3. Transportation& Economics Research Institute，China Academy of Railway Sciences Corporation Limited，Beijing 100081，China)

Abstract: This paper studies a joint ordering and trade credit decisions problem for deteriorate items based on the consumers' shortage tolerance behavior. It assumes that customers generally have a tolerance period in the face of shortage (i.e., a zero-backlogged cost time period), and the market demand is dependent on trade credit period. Shortages are allowed and partially backlogged. The inventory models of joint ordering and credit period decisions for deteriorating items are proposed in two cases with the goal of maximize the retailer's average profit. Firstly, the optimal solutions existence and uniqueness are proved and some relevant theorem conclusions are derived. Then, a two-stage iterative algorithm is developed to search for the optimal solutions. Finally, the numerical example is presented to illustrate the practicability of the proposed model and algorithm, and the sensitivity analysis of the major parameters is performed. The results show that the consumers' shortage tolerance behavior can effectively increase the retailer profits and reduce product deterioration loss, and also stimulate the retailer to provide a longer trade credit period, thereby achieving a win-win situation for the retailer and the consumer.

Keywords: deteriorating item；shortage tolerance；ordering；trade credit；partial backlogging

0 引 言

变质品在日常生活中随处可见,例如水果、蔬菜、肉类等食物以及药品、挥发性液体等.对于变质品而言,快速的实体损耗或价值衰减,导致产品无法实现其预期目的而失去价值.据报道,商品的变质造成美国零售业每年损失约300亿美元[1].因此,采用合理方式对变质品库存进行有效控制,对加快企业资金周转、降低企业成本、减少资源浪费和赢得市场竞争优

收稿日期: 2019-11-08；**修回日期:** 2020-03-01.
基金项目: 国家自然科学基金项目(71371156, 71872153).
责任编委: 刘士新.
†通讯作者. E-mail: xl_xnjd@163.com.

势发挥着至关重要的作用.

自Ghare[2] 提出变质品的库存模型以来,学者们从不同角度对该模型进行了拓展,并取得了丰硕的研究成果,详细内容可参考文献[3-5]对近30年变质品库存模型的回顾与评述. 变质品具有实体损耗或价值衰减的特性,导致产品现货销售时间越长变质损失越高. 实践中,零售商通常会采用策略性缺货的方式对变质品进行销售以降低变质损失和库存成本. 关于缺货情形下的变质品库存问题最早由Shah[6] 提出,其模型假定常数需求率,且短缺量将全部延迟订购. 随后,Abad[7] 考虑缺货时并非所有消费者都愿意等待的现实情境,基于缺货时的延迟订购率与消费者等待时间呈负相关的思想,提出了两种不同的延迟订购率函数,完成了文献[6]的修正与拓展. 接着,Dye[8] 考虑需求依赖于价格和时变变质率情形,分析了允许缺货环境下零售商的定价与订购策略; Skouri等[9] 基于斜坡式时变需求环境下,以总成本最小化为目标建立了一个短缺量部分延迟订购的变质品库存模型; Dye[10] 针对缺货情形下的非瞬时变质产品,分析了零售商的联合保鲜技术投资和订购问题; Li等[11] 进一步考虑了零售商的定价决策对文献[10]进行了拓展; 计国君等[12] 假设需求受库存水平和价格的影响,构建了多个供应商和多个零售商情况下,供应商库存外包予第三方的易逝品联合定价和库存决策模型. 最近,Tiwari等[13] 基于商业信用环境下,研究了变质品的定价与订购策略,模型假定延迟订购率是关于消费者等待时间的负指数函数. 更多相关研究还可以参考文献[14-17]等.

上述研究成果为零售商在缺货环境下管理变质品库存提供了有益的参考,但是上述文献均忽略了延迟订购消费者存在缺货容忍现象这一事实,简言之,上述文献均假定零售商对延迟订购消费者的缺货成本补偿(或者说延迟订购成本的支付)时间区间是由延迟订购需求的到达时刻开始至需求被满足时刻结束. 但事实上,对于延迟订购的消费者而言,其本身对缺货发生是存在容忍度的(否则不会选择延迟订购),即延迟订购消费者对于缺货等待的时间通常存在一个缺货容忍期限,如果缺货需求能够在该容忍期限内得到满足,则消费者不会产生不满情绪,零售商也不会有商誉损失,此时无需支付缺货成本; 反之,零售商才需要进行缺货成本补偿. 实践中,当零售商管理的商品属于流行性产品、季节性产品或价值较大的产品时,消费者的缺货容忍现象尤为常见. 关于消费者的缺货容忍现象,最早由Krommyda等[18] 所观测到,其基于服务质量差距模型的相关理论对消费者缺货容忍行为进行了系统的诠释,并将该现象引入到库存模型对经典EOQ模型进行了拓展. 随后,沿着文献[18]的思路,Li等[19] 也考虑了消费者的缺货容忍现象,分析了混合支付下(提前支付、现金支付和延期支付)零售商的定价和订购策略.

此外,随着市场竞争的不断加剧,零售商通常会向消费者提供一个延期支付货款的商业信用期限以调动其购买积极性,扩大市场需求. 商业信用作为一种重要的营销策略,已被广泛应用于各类商业实践中,例如京东的“打白条”和阿里巴巴的“蚂蚁花呗”服务都允许消费者延期付款以获得更多的市场份额. Jaggi等[20] 最早考虑市场需求是商业信用期的函数,分析了零售商的最优订购和信用期策略. 随后,Lou等[21] 考虑到信用期可以促进销售的同时也存在违约风险,进而构建了一个信用期影响市场需求和违约风险的库存模型; Wang等[22] 又进一步将Lou等[21] 的模型拓展到变质品情形. 相关研究还有文献[23-25]. 最近,赵连霞等[26] 在研究一类变质品的库存问题时指出,零售商采用商业信用销售策略可以有效提高变质品周转速度、降低变质损失. 因此,探讨商业信用销售下变质品库存问题具有重要的现实意义.

通过对上述文献分析可知: 1) 关于缺货容忍行为,目前尚未得到学者们的广泛关注,据笔者所知,仅有文献[18-19]对该问题进行了初步研究,尚存在许多不足,如研究内容均针对耐用品、假定消费者延迟订购率为常数而忽略了缺货等待时间的影响等; 2) 关于信用期影响需求的问题,目前研究仍处于初期阶段,且现有研究内容大多忽略了缺货场景、产品变质等因素对信用期策略的影响.

鉴于此,本文将同时考虑消费者的缺货容忍行为和信用期对市场需求的激励效应,探讨一个允许缺货且短缺量部分延迟订购的变质品库存系统. 本文的主要贡献为: 1) 首次将消费者的缺货容忍现象引入到变质品的库存系统,并假定市场需求受信用期的影响,同时考虑消费者延迟订购率是关于其等待时间递减函数的这一现实情境,完成对文献[18-19]的拓展; 2) 以平均利润最大化为目标分两种情形构建了相应的数学模型,同时优化零售商的订购周期、正向库存的持有周期和信用期策略; 3) 理论上证明了最优解存在且唯一,并给出零售商向消费者提供商业信用期的条件; 4) 设计了一个两阶段迭代算法完成对模型的求解,并对模型主要参数进行了灵敏度分析,获得了一些结论和管理启示.

1 符号说明与假设

1.1 符号说明

本文建模将用到的符号描述如下: A为固定订货成本; c_h为单位库存持有成本; c为单位采购成本; p为单位零售价格; θ为产品的变质率,且满足$0 < \theta < 1$,为常数; c_b为单位延迟订购成本; c_g为单位失销成本; T_t为延迟订购消费者的缺货容忍期限,为常数; t_1为库存水平降至零的时刻点(决策变量); T为补货周期长度(决策变量); m为零售商向消费者提供的商业信用期长度(决策变量); $I(t)$为t时刻的库存水平; TP为零售商的总利润; ATP为零售商的平均利润.

1.2 基本假设

1) 考虑单一变质产品的库存系统,计划时域无限且提前期为零.

2) 允许缺货且短缺量部分延迟订购,其中延迟订货率函数$\beta(x)$是关于等待时间x的递减函数. 不失一般性,本文假设$\beta(x) = 1/(1+\delta x)$, $\delta \geqslant 0$表示延迟订购阻力.

3) 在实际商业环境中,正如Krommyda等[18]所观察到的,延迟订购消费者在面临缺货等待时通常会存在一个缺货容忍期限. 具体而言,存在一个有限的时间期限T_t,对于$t \in [t_1, T]$时刻到达的延迟订购消费者,其需求若在$[t, t+T_t]$内被满足,则零售商无需支付延迟订购成本;反之,零售商需要承担未及时满足该时刻到达需求的缺货成本.

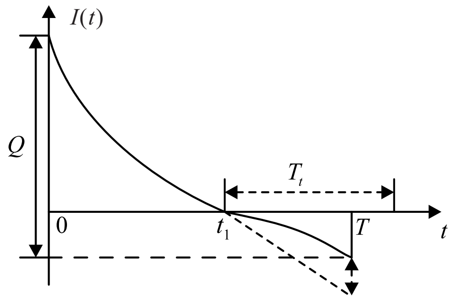
4) 产品的市场需求率$D(m)$受商业信用期m影响,假设$D(m)$是关于m的单调递增函数,即$D'(m) > 0$,表明信用期越长,需求越大.

5) 信用期对市场需求具有正向激励作用的同时也存在违约风险,且信用期限越长,违约风险越大. 为了表征这一现象,定义违约风险函数为$F(m)$,满足$F(0) = 0, F'(m) > 0$,且对于$\forall m > 0$有$0 < F(m) < 1$.

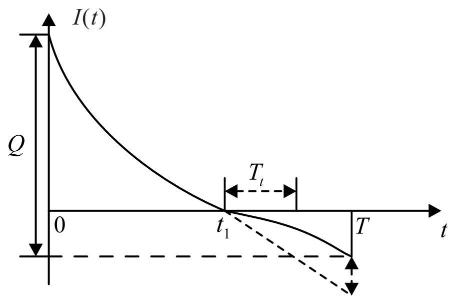
6) 为了保证最优解的存在性和唯一性,本文假设$D(m)$和$1 - F(m)$均为log凹函数,即不等式$D''(m)D(m) \leqslant [D'(m)]^2$与$F'(m)[1-F(m)] + [F'(m)]^2 \geqslant 0$恒成立. 许多线性和指数函数均满足上述性质,同时该假设也被许多学者所采用[25-27].

2 模型构建

本文探讨的库存系统运作过程如下:在$t = 0$时刻,零售商向上游供应商订购Q单位产品满足一个订货周期的需求. 首先,在$[0, t_1]$内,库存水平在市场需求和产品变质的共同作用下不断下降,直至$t = t_1$时刻降为零;然后,在$(t_1, T]$内,零售商处于缺货期,由于产品短缺,到达的需求将发生部分延迟订购,直至在$t = T$时刻零售商再次向上游供应商发出订货请求,开始下一补货周期运作(如图1所示).



情形1: $t_1 + T_t \geqslant T$



情形2: $t_1 + T_t \leqslant T$

图1 零售商的库存水平随时间变化的趋势

在$[0, T]$内,库存水平的变化满足如下微分方程:

$$I'(t) = \begin{cases} -D(m) - \theta I(t), \ 0 \leqslant t \leqslant t_1; \\ -D(m)\beta(T-t), \ t_1 < t \leqslant T. \end{cases} \tag{1}$$

利用边界条件为$I(t_1) = 0$,求解上式可得

$$I(t) = \begin{cases} \dfrac{D(m)}{\theta}[\mathrm{e}^{\theta(t_1-t)} - 1], \ 0 \leqslant t \leqslant t_1; \\ \dfrac{D(m)}{\delta}\{\ln[1+\delta(T-t)] - \\ \ln[1+\delta(T-t_1)]\}, \ t_1 < t \leqslant T. \end{cases} \tag{2}$$

零售商在一个补货周期内的总订货量为

$$Q = I(0) - I(T) = \\ D(m)\Big\{\frac{\mathrm{e}^{\theta t_1} - 1}{\theta} + \frac{\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}\Big\}. \tag{3}$$

在一个补货周期内,零售商收入和各成本要素构成分别如下:

1) 销售收入

$$\mathrm{SR} = p[1-F(m)]\Big\{\int_0^{t_1} D(m)\mathrm{d}t + \\ \int_{t_1}^{T} D(m)\beta(T-t)\mathrm{d}t\Big\}.$$

2) 采购成本$\mathrm{PC} = cQ$.

3) 固定订购成本A.

4) 库存持有成本

$$\mathrm{HC}=c_h\int_0^{t_1}I(t)\mathrm{d}t.$$

5) 由失销导致的机会成本

$$\mathrm{LC}=c_g\int_{t_1}^{T}D(m)[1-\beta(T-t)]\mathrm{d}t.$$

6) 延迟订购成本: 由假设3)可知, 零售商延迟订购成本的核算分两种情形: ①当$t_1+T_t\geqslant T$时, 所有延迟订购需求均能在缺货容忍期限T_t内得到满足, 此时不会产生缺货成本, 即$\mathrm{SC}=0$; ②当$t_1+T_t\leqslant T$时, 在$[t_1,T-T_t]$内到达的延迟订购需求未能在T_t内得到满足, 此时$\mathrm{SC}=c_b\int_{t_1}^{T-T_t}-I(t)\mathrm{d}t$.

综上可知, 一个订货周期内零售商的总利润$\mathrm{TP}(t_1,T,m)$可以表示为

$$\mathrm{TP}(t_1,T,m)=\mathrm{SR}-A-\mathrm{PC}-\mathrm{HC}-\mathrm{LC}-\mathrm{SC}.\tag{4}$$

根据t_1+T_t和T的不同取值, 对式(4)展开得

$$\mathrm{TP}(t_1,T,m)=\begin{cases}\mathrm{TP}_1(t_1,T,m),\ t_1+T_t\geqslant T;\\ \mathrm{TP}_2(t_1,T,m),\ t_1+T_t<T.\end{cases}\tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}&\mathrm{TP}_1(t_1,T,m)=\\&pD(m)[1-F(m)]\Big\{t_1+\frac{\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}\Big\}-\\&A-cD(m)\Big\{\frac{\mathrm{e}^{\theta t_1}-1}{\theta}+\frac{\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}\Big\}-\\&\frac{c_hD(m)}{\theta^2}[\mathrm{e}^{\theta t_1}-\theta t_1-1]-\\&c_gD(m)\frac{\delta(T-t_1)-\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta},\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{TP}_2(t_1,T,m)=\\&pD(m)[1-F(m)]\Big\{t_1+\frac{\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}\Big\}-\\&A-cD(m)\Big\{\frac{\mathrm{e}^{\theta t_1}-1}{\theta}+\frac{\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}\Big\}-\\&\frac{c_hD(m)}{\theta^2}[\mathrm{e}^{\theta t_1}-\theta t_1-1]-\\&c_gD(m)\frac{\delta(T-t_1)-\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}-\\&\frac{c_bD(m)}{\delta^2}\{(T-t_1-T_t)\delta-(1+\delta T_t)\times\\&[\ln(1+\delta(T-t_1))-\ln(1+\delta T_t)]\}.\end{aligned}\tag{7}$$

以一个订货周期内零售商的平均利润$\mathrm{ATP}(t_1,T,m)$最大化为目标, 则由式(5)可知

$$\mathrm{ATP}(t_1,T,m)=\frac{\mathrm{TP}(t_1,T,m)}{T}=\begin{cases}\mathrm{ATP}_1(t_1,T,m),\ t_1+T_t\geqslant T;\\ \mathrm{ATP}_2(t_1,T,m),\ t_1+T_t\leqslant T.\end{cases}\tag{8}$$

3 模型分析与求解

3.1 零售商的最优订购策略

定义1 对于定义域$S=\{x\in X:h(x)\leqslant 0\}$上的实值函数$z(x)=f(x)/g(x)$, 若$g(x)$在$X$为正, 则非线性规划$(P)\ \sup\{z(x):x\in S\}$称之为分式规划. 特别地, 当$f(x)$为非负的(严格)凹函数, $g(x)>0$且$h(x)$为凸函数时, 非线性规划(P)是(严格)凹分式规划[10-11,27].

性质1 在严格凹分式规划(P)中, 至多存在一个全局最大值, 且满足库恩塔克条件的局部最大值就是严格凹分式规划的全局最大值[10-11,27].

根据t_1+T_t和T取值的不同, 分两种情形求解.

情形1 $t_1+T_t\geqslant T$.

对于理性的零售商, 若其收益小于零, 则零售商将没有动力去运营其库存系统. 故可给出如下假设.

假设1 对于任意给定可行的信用期m, 可行域集合$S_1=\{(t_1,T)|t_1+T_t\geqslant T,\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)\geqslant 0\}$为非空集合.

引理1 对于任意给定可行的信用期m, $\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)$在S_1上是关于(t_1,T)的严格凹函数.

证明 由式(6), 对$\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)$分别求其关于t_1和T的二阶偏导数可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)}{\partial t_1^2}=\\&-\frac{\{p[1-F(m)]-c+c_g\}D(m)\delta}{[1+\delta(T-t_1)]^2}-(\theta c+c_h)\mathrm{e}^{\theta t_1},\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)}{\partial T^2}=\\&-\frac{\{p[1-F(m)]-c+c_g\}D(m)\delta}{[1+\delta(T-t_1)]^2},\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)}{\partial T\partial t_1}=\\&\frac{\{p[1-F(m)]-c+c_g\}D(m)\delta}{[1+\delta(T-t_1)]^2}.\end{aligned}\tag{11}$$

首先, 由假设1可知, 在S_1上$p[1-F(m)]-c+c_g>0$恒成立, 因此由式(9)和(10)易证$\partial^2\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)/\partial t_1^2<0$且$\partial^2\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)/\partial T^2<0$. 进一步构造$\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)$关于$(t_1,T)$的黑塞矩阵, 计算其二阶顺序主子式, 易证

$$\begin{aligned}&\det(\boldsymbol{H})=\\&\frac{\{p[1-F(m)]-c+c_g\}(\theta c+c_h)[D(m)]^2\delta\mathrm{e}^{\theta t_1}}{[1+\delta(T-t_1)]^2}>0.\end{aligned}\tag{12}$$

综上可知, $\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)$关于(t_1,T)的黑塞矩阵

为负定矩阵,故 $\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)$ 在 S_1 上是关于 (t_1,T) 的严格凹函数. □

此外, $t_1+T_t\geqslant T$ 为线性约束,表明 S_1 为凸集. 又 $\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)=\dfrac{\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)}{T}(T>0)$,由定义1可知, $\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)$ 在 S_1 满足严格凹分式规划,即 $\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)$ 在 S_1 上至多存在一个最大值点,且满足库恩塔克条件的局部最大值是其全局最大值.

为了便于表述,进一步定义函数 $\varPhi(t_1)$ 为

$$\begin{aligned}&\varPhi(t_1)=\\&\{p[1-F(m)]-c+c_g\}D(m)\Big[T_t-\frac{\ln(1+\delta T_t)}{\delta}\Big]+\\&(c+c_h/\theta)D(m)\Big[\frac{\mathrm{e}^{\theta t_1}-\theta t_1-1}{\theta}-\\&(T_t+t_1)(\mathrm{e}^{\theta t_1}-1)\Big]+A.\end{aligned}\tag{13}$$

定理1 对于任意给定可行的信用期 m,定义 $\widehat{t}_1=\dfrac{1}{\theta}\ln\Big\{1+\dfrac{p[1-F(m)]-c+c_g}{(c+c_h/\theta)(1+1/(\delta T_t))}\Big\}$,则有:

1) 若 $\varPhi(\widehat{t}_1)\leqslant 0$,则 $\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)$ 在 S_1 上存在唯一全局最优解 (t_1^A,T^A),且 (t_1^A,T^A) 满足 $\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)/\partial t_1=0$ 和 $\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)/\partial T=0$;

2) 若 $\varPhi(\widehat{t}_1)>0$,则 $\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)$ 在 S_1 上存在唯一全局最优解 (t_1^C,T^C),且 $T^C=T_t+t_1^C$, t_1^C 满足 $\varPhi(t_1)=0$.

证明 利用库恩塔克条件进行求解. 令 γ_1 表示拉格朗日乘子,可构建拉格朗日函数为

$$L_1(t_1,T,\gamma_1)=\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)+\gamma_1(T_t+t_1-T).\tag{14}$$

由式(14)可知,优化问题的库恩塔克条件为

$$\begin{cases}\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)/\partial t_1+\gamma_1=0;\\\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)/\partial T-\gamma_1=0;\\\gamma_1(T_t+t_1-T)=0;\\T_t+t_1-T\geqslant 0,\gamma_1\geqslant 0.\end{cases}\tag{15}$$

为求解式(15),需要讨论下述2种情形:

情形1): 若 $\gamma_1=0$,则由式(15)可知, $\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)/\partial t_1=0$ 且 $\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)/\partial T=0$. 首先,由 $\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)/\partial t_1=0$ 可解得

$$\begin{aligned}&T=\\&t_1+\frac{(c+c_h/\theta)(\mathrm{e}^{\theta t_1}-1)}{\delta\{p[1-F(m)]-c+c_g-(c+c_h/\theta)(\mathrm{e}^{\theta t_1}-1)\}}.\end{aligned}\tag{16}$$

又 $T>t_1$ 且 $T\leqslant t_1+T_t$,则当且仅当

$$t_1\leqslant\frac{1}{\theta}\Big\{1+\frac{p[1-F(m)]-c+c_g}{(c+c_h/\theta)(1+1/(\delta T_t))}\Big\}=\widehat{t}_1\tag{17}$$

时,上式成立.

进一步将式(16)代入 $\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)/\partial T=0$ 中,并构造辅助函数 $G_1(t_1)$ 为

$$\begin{aligned}&G_1(t_1)=\\&\{p[1-F(m)]-c+c_g\}D(m)\Big[\frac{T}{1+\delta(T-t_1)}-\\&t_1-\frac{\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}\Big]+(c+c_h/\theta)D(m)\times\\&\frac{\mathrm{e}^{\theta t_1}-\theta t_1-1}{\theta}+A.\end{aligned}\tag{18}$$

对 $G_1(t_1)$ 求其关于 t_1 的一阶导数可得

$$\begin{aligned}G_1'(t_1)=&-D(m)\{p[1-F(m)]-c+c_g\}\times\\&\frac{\delta T}{[1+\delta(T-t_1)]^2}\Big(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t_1}-1\Big).\end{aligned}\tag{19}$$

易证 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t_1-1>0$,故 $G_1'(t_1)<0$,即 $G_1(t_1)$ 在 $(0,\widehat{t}_1]$ 上单调递减. 又 $\lim\limits_{t_1\to 0^+}G_1(t_1)=A>0$,因此当 $G_1(\widehat{t}_1)\leqslant 0$ 时,由中值定理可知, $G_1(t_1)$ 在 $(0,\widehat{t}_1]$ 存在唯一的零点 t_1^A. 显然,此时存在唯一 (t_1^A,T^A) 满足上述库恩塔克条件. 结合引理1可知,局部最优解 (t_1^A,T^A) 即为 $\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)$ 在 S_1 上的全局最优解. 此外,在 $t_1=\widehat{t}_1$ 处易证 $G_1(\widehat{t}_1)=\varPhi(\widehat{t}_1)$.

情形2): 若 $\gamma_1>0$,由式(15)可知, $T=T_t+t_1$, $c\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)/\partial t_1+\gamma_1=0$ 且 $\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)/\partial T-\gamma_1=0$. 联立消去 γ_1 可得

$$\frac{\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)}{\partial t_1}+\frac{\partial\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)}{\partial T}=0.$$

将 $T=T_t+t_1$ 代入上式,并构造辅助函数 $G_2(t_1)$ 为

$$\begin{aligned}&G_2(t_1)=\\&\{p[1-F(m)]-c+c_g\}D(m)\Big[T_t-\frac{\ln(1+\delta T_t)}{\delta}\Big]+\\&(c+c_h/\theta)D(m)\Big[\frac{\mathrm{e}^{\theta t_1}-\theta t_1-1}{\theta}-\\&(T_t+t_1)(\mathrm{e}^{\theta t_1}-1)\Big]+A.\end{aligned}\tag{20}$$

对 $G_2(t_1)$ 求其关于 t_1 的一阶导数可得

$$G_2'(t_1)=-(\theta c+c_h)D(m)(T_t+t_1)<0.\tag{21}$$

故 $G_2(t_1)$ 关于 t_1 递减,且 $\lim\limits_{t_1\to+\infty}G_2(t_1)=-\infty$. 又由 $\gamma_1>0$,可知 $\partial\mathrm{TP}_1(t_1,T|m)/\partial t_1<0$ 必定成立,此时 t_1 需满足 $t_1>\widehat{t}_1$. 所以当 $G_2(\widehat{t}_1)>0$ 时,由中值定理可知, $G_2(\widehat{t}_1)$ 在区间 $(\widehat{t}_1,+\infty)$ 上存在唯一零点 t_1^C. 因此,上述库恩塔克条件存在唯一 (t_1^C,T^C). 同理,此时局部最优解 (t_1^C,T^C) 即为 $\mathrm{ATP}_1(t_1,T|m)$ 在 S_1 上的全局最优解. 且在 $t_1=\widehat{t}_1$ 处,易证 $G_2(\widehat{t}_1)=\varPhi(\widehat{t}_1)$. 综合上述两种情形,定理1即证. □

定理1给出了在固定信用期 m 情形下,零售商不选择支付缺货成本时的最优订购策略. 事实上,定理

1中的判别项$(\Phi(\widehat{t}_1))$可以理解为固定订购成本(A)与一个特定阈值的差值. 因此,定理1的经济含义可以解释为: 若零售商的固定订购成本大于特定阈值(即$\Phi(\widehat{t}_1) > 0$),则其将增加订货量以延长其订货周期. 考虑到零售商不愿意承担缺货成本,故零售商将充分利用消费者的缺货容忍行为,导致零售商的最大缺货时长等于消费者的缺货容忍期限,即最优解将在边界处取得; 反之,若固定订购成本小于或等于特定阈值(即$\Phi(\widehat{t}_1) \leqslant 0$),则零售商不需要承担缺货成本,同时还可以减少订购量以缩短补货周期,进而降低变质损失,获得更大的效益.

情形2 $t_1 + T_t < T$.

假设2 对于任意给定可行的信用期m,可行域集合$S_2 = \{(t_1, T) | t_1 + T_t < T, \mathrm{TP}_2(t_1, T|m) \geqslant 0\}$为非空集合.

引理2 对于任意给定可行的信用期m, $\mathrm{TP}_2(t_1, T|m)$在S_2上是关于(t_1, T)的严格凹函数.

类似于引理1,构造$\mathrm{TP}_2(t_1, T|m)$关于(t_1, T)的黑塞矩阵,易证引理2成立,此略.

引理3 对于任意$(t_1, T) \in S_2$满足$p[1 - F(m)] - c + c_g - c_b(T - t_1 - T_t) \leqslant 0$时,若$\mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)$存在全局最优解,则当且仅当$p[1 - F(m)] - c + c_g - c_b(T - t_1 - T_t) = 0$时可以取得.

证明 对于任意(t_1, T)满足$p[1 - F(m)] - c + c_g - c_b(T - t_1 - T_t) \leqslant 0$时,有$\partial \mathrm{TP}(t_1, T|m)/\partial T < 0$. 进而易证$\partial \mathrm{ATP}(t_1, T|m)/\partial T < 0$,即$\mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)$关于$T$单调递减. 因此,当且仅当不等式$p[1 - F(m)] - c + c_g - c_b(T - t_1 - T_t) = 0$取等号时, $\mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)$取得最大值. □

引理3表明,零售商的最大允许缺货时间存在一个上界,即$T - t_1 \leqslant T_t + \{p[1 - F(m)] - c + c_g\}/c_b$,这与实际情形一致,因为消费者的缺货等待耐心程度总是有限的. 此外,由引理3可知,在可行域集合S_2上存在一个子集

$$S_{21} = S_2 \bigcap \{(t_1, T) | p[1 - F(m)] - c + c_g - c_b(T - t_1 - T_t) \leqslant 0\},$$

则$\mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)$在S_{21}若存在全局最大值,则必定在边界曲线$p[1 - F(m)] - c + c_g - c_b(T - t_1 - T_t) = 0$上取得.

基于上述分析可知,求解$\mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)$在可行域S_2上的最大值将等价于求解其在可行域S_{22}上的最大值,这里$S_{22} = S_2 \bigcap \{(t_1, T) | p[1 - F(m)] - c + c_g - c_b(T - t_1 - T_t) \geqslant 0\}$. 类似于引理1,容易证明$\mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)$在$S_{22}$同样满足严格凹分式规划.

定理2 对于任意给定可行的信用期m,有:

1) 若$\Phi(\widehat{t}_1) \geqslant 0$,则$\mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)$在$S_{22}$上存在唯一全局最优解$(t_1^B, T^B)$,且$(t_1^B, T^B)$满足方程$\partial \mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)/\partial t_1 = 0$和$\partial \mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)/\partial T = 0$;

2) 若$\Phi(\widehat{t}_1) < 0$,则$\mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)$在S_{22}上存在唯一全局最优解(t_1^C, T^C),且$T^C = T_t + t_1^C$, t_1^C满足$\Phi(t_1) = 0$.

证明 类似地,令η_1和η_2为拉格朗日乘子,可建立优化问题的库恩塔克条件为

$$\begin{cases} \partial \mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)/\partial t_1 - \eta_1 + c_b \eta_2 = 0; \\ \partial \mathrm{ATP}_2(t_1, T|m)/\partial T + \eta_1 - c_b \eta_2 = 0; \\ \eta_1 (T_t + t_1 - T) = 0; \\ \eta_2 \{p[1 - F(m)] - c + c_g - c_b(T - t_1 - T_t)\} = 0; \\ p[1 - F(m)] - c + c_g - c_b(T - t_1 - T_t) \geqslant 0; \\ T - T_t - t_1 \geqslant 0,\ \eta_1 \geqslant 0, \eta_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{22}$$

为求解式(22),需要讨论下述4种情形: 1) $\eta_1 = 0$且$\eta_2 > 0$; 2) $\eta_1 > 0$且$\eta_2 > 0$; 3) $\eta_1 = 0$且$\eta_2 = 0$; 4) $\eta_1 > 0$且$\eta_2 = 0$. 由于篇幅限制,具体求解过程可参考定理1,不再赘述. □

定理2给出了在固定信用期m情形下,零售商选择承担缺货成本时的最优订购策略. 采用类似于定理1的论断容易理解定理2的经济含义.

综合上述定理1和定理2可得到下述定理.

定理3 对于任意给定可行的信用期m,有:

1) 若$\Phi(\widehat{t}_1) \geqslant 0$,则$t_1^* = t_1^B, T^* = T^B$且$\mathrm{ATP}^* = \mathrm{ATP}_2^*$;

2) 若$\Phi(\widehat{t}_1) < 0$,则$t_1^* = t_1^A, T^* = T^A$且$\mathrm{ATP}^* = \mathrm{ATP}_1^*$.

证明 1) 若$\Phi(\widehat{t}_1) > 0$,则根据定理1和定理2有

$$\begin{aligned} &\mathrm{ATP}(t_1^*, T^*|m) = \\ &\max\{\mathrm{ATP}_1(t_1^C, T^C|m), \mathrm{ATP}_2(t_1^B, T^B|m)\} \\ &(\because \mathrm{ATP}_1(t_1^C, T^C|m) = \mathrm{ATP}_2(t_1^C, T^C|m)) = \\ &\max\{\mathrm{ATP}_2(t_1^C, T^C|m), \mathrm{ATP}_2(t_1^B, T^B|m)\} \\ &(\because \mathrm{ATP}_2(t_1^B, T^B|m) \geqslant \mathrm{ATP}_2(t_1^C, T^C|m)) = \\ &\mathrm{ATP}_2(t_1^B, T^B|m). \end{aligned} \tag{23}$$

特别地,当$\Phi(\widehat{t}_1) = 0$时,可知$\mathrm{ATP}(t_1^*, T^*|m) = \mathrm{ATP}_1(\widehat{t}_1, \widehat{t}_1 + T_t|m) = \mathrm{ATP}_2(\widehat{t}_1, \widehat{t}_1 + T_t|m)$. 因此若$\Phi(\widehat{t}_1) \geqslant 0$,则$t_1^* = t_1^B, T^* = T^B$. 类似地,当$\Phi(\widehat{t}_1) < 0$

时,可证2)亦成立.综上,定理3即证. □

定理3表明,当固定订货成本较大时(即$\Phi(\widehat{t_1})\geqslant 0$),零售商倾向于采用"少批多量"的采购策略,结果缺货时长大于消费者的缺货容忍期限,此时其需要承担缺货成本,但缺货容忍行为的存在可以减弱对零售商利润的负作用;反之,当固定订货成本较小时(即$\Phi(\widehat{t_1})<0$),零售商会采用"多批少量"的采购策略,目的是充分利用消费者的缺货容忍行为.此外,若忽略消费者缺货容忍现象的存在(即$T_t\to 0$),则$\Phi(\widehat{t_1})>0$恒成立,此时零售商总是选择情形2下最优订货策略,显然该策略未必是最优的.因此,管理者在制定库存策略时应当考虑消费者的缺货容忍行为.

3.2 零售商的最优信用期策略

引理4 对于任意给定的可行(t_1,T),零售商向消费者提供的最大商业信用期限长度为$\widehat{m}$,且$\widehat{m}$满足方程$p[1-F(m)]-c=0$.

证明 易证$p[1-F(m)]-c$关于m单调递减,故必定存在一个唯一$\widehat{m}$使得$p[1-F(m)]-c=0$.当$m\leqslant\widehat{m}$时,$p[1-F(m)]-c\geqslant 0$;当$m>\widehat{m}$时,$p[1-F(m)]-c<0$.现考虑$m>\widehat{m}$,对$\mathrm{ATP}(m|t_1,T)$求其关于m的一阶导数可得

$$\frac{\partial \mathrm{ATP}(m|t_1,T)}{\partial m}\Big|_{m>\widehat{m}}=\begin{cases}\dfrac{\partial \mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)}{\partial m}\Big|_{m>\widehat{m}}<0,\ t_1+T_t\geqslant T;\\[2mm]\dfrac{\partial \mathrm{ATP}_2(m|t_1,T)}{\partial m}\Big|_{m>\widehat{m}}<0,\ t_1+T_t\leqslant T.\end{cases}\tag{24}$$

显然当$m>\widehat{m}$时,$\mathrm{ATP}(m|t_1,T)$关于m递减.故上界值$\widehat{m}$即为消费者可享受的最大信用期. □

引理4显示,由于存在违约风险效应,零售商不会无限制地向消费者提供信用期,即消费者可以享受的信用期长度是有限的,这与实际相符.

定理4 对于任意给定可行的(t_1,T),定义$\Delta(m)=\dfrac{\mathrm{d}D(m)[1-F(m)]}{\mathrm{d}m}\Big|_{m=0}$,则有:

1) 若$\Delta(m)>0$,则存在唯一的$m^*\in[0,\widehat{m}]$满足$\partial\mathrm{ATP}(m|t_1,T)/\partial m=0$,且使得$\mathrm{ATP}(m|t_1,T)$在$m=m^*$处取得最大值;

2) 若$\Delta(m)\leqslant 0$,则当且仅当$m^*=0$时,$\mathrm{ATP}(m|t_1,T)$在$[0,\widehat{m}]$上取得最大值.

证明 对于任意给定可行的(t_1,T),不失一般性,假设满足$t_1+T_t\geqslant T$,则$\mathrm{ATP}(m|t_1,T)=\mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)$,即求解$\mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)$在$[0,\widehat{m}]$上的最大值.首先,求其关于$m$的一阶导数可得

$$\frac{\partial \mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)}{\partial m}=\frac{p\{D'(m)[1-F(m)]-F'(m)D(m)\}}{T}\times\Big\{t_1+\frac{\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}\Big\}-\frac{cD'(m)}{T}\Big\{\frac{\mathrm{e}^{\theta t_1}-1}{\theta}+\frac{\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}\Big\}-\frac{c_hD'(m)}{T}\frac{\mathrm{e}^{\theta t_1}-\theta t_1-1}{\theta^2}-\frac{c_gD'(m)}{T}\Big\{T-t_1-\frac{\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}\Big\}.\tag{25}$$

定义m^*为$\partial\mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)/\partial m=0$在$[0,\widehat{m}]$上的驻点(不妨假设其存在),则在$m=m^*$处对$\mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)$求其关于$m$的二阶导数为

$$\frac{\partial^2 \mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)}{\partial m^2}\Big|_{m=m^*}=\frac{p}{T}\Big\{t_1+\frac{\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}\Big\}\times\Big\{D''(m)[1-F(m)]-2F'(m)D'(m)-D(m)F''(m)-\frac{D''(m)}{D'(m)}\{D'(m)[1-F(m)]-F'(m)D(m)\}\Big\}.\tag{26}$$

利用假设6)对上式进行不等式运算可得

$$\frac{\partial^2 \mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)}{\partial m^2}\Big|_{m=m^*}\leqslant\frac{p}{T}\Big\{t_1+\frac{\ln[1+\delta(T-t_1)]}{\delta}\Big\}\times\Big\{\frac{F'(m)}{1-F(m)}\{D(m)F'(m)-D'(m)[1-F'(m)]\}+\frac{F'(m)}{D'(m)}\{D''(m)D(m)-[D'(m)]^2\}\Big\}.\tag{27}$$

因为$D(m)$和$1-F(m)$均为log凹函数,可证$D(m)[1-F(m)]$必定为常数函数或单调函数[23].故:

1) 若$\Delta(m)>0$,则$D(m)[1-F(m)]$为严格递增函数,即$D(m)F'(m)-D'(m)[1-F(m)]<0$,由式(27)可知$\dfrac{\partial^2 \mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)}{\partial m^2}\Big|_{m=m^*}<0$恒成立,即$\mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)$在$[0,\widehat{m}]$上是关于$m$的伪凹函数,故$\mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)$在$m=m^*$处取得全局最大值.

2) 若$\Delta(m)\leqslant 0$,则$D(m)[1-F(m)]$是关于m的单调非增函数,即$D(m)F'(m)-D'(m)[1-F(m)]\geqslant 0$,由式(27)可知$\dfrac{\partial \mathrm{ATP}_1(m|t_1,T)}{\partial m}\leqslant 0$恒成立,因此零售商的最优信用期为$m^*=0$.

采用同样的方法容易说明,对于任意给定的可行(t_1,T)满足$t_1+T_t\leqslant T$时,定理4亦成立. □

定理4表明,对于任意给定的可行(t_1,T),存在唯一确定的最优信用期$m^*\in[0,\widehat{m}]$使得零售商的平均利润最大化.这里$\Delta(m)$可以理解为违约风险后零售商的边际收益,如果其值小于等于零(即$\Delta(m)\leqslant 0$),表明零售商向消费者提供信用期是不利的,所以此时

零售商不应该向消费者提供信用期;反之,零售商可以充分利用信用期来扩大市场需求.

3.3 算　法

基于上述分析,本节设计一个两阶段迭代算法用以确定零售商的最优解,具体算法步骤如下.

step 1: 计算$\varDelta(m)$的值,如果$\varDelta(m) \leqslant 0$,则执行step 2,否则执行step 3.

step 2: 置$m^* = 0$,并计算$\varPhi(\widehat{t}_1)$的值,若$\varPhi(\widehat{t}_1) \geqslant 0$,则$t_1^* = t_1^B, T^* = T^B$;否则$t_1^* = t_1^A, T^* = T^A$.

step 3: 令$j = 1$,初始化$m^{(j)} = \widehat{m}/2$.

step 4: 计算$\varPhi(\widehat{t}_1)$的值,并执行下面两个子步骤.

step 4.1: 若$\varPhi(\widehat{t}_1) \geqslant 0$,则$t_1^{(j)} = t_1^B, T^{(j)} = T^B$. 将$t_1^{(j)}$和$T^{(j)}$代入$\mathrm{ATP}_2(m|t_1^{(j)}, T^{(j)})$中,求解方程$\partial \mathrm{ATP}_2(m|t_1^{(j)}, T^{(j)})/\partial m = 0$以确定$m^{(j+1)}$.

step 4.2: 若$\varPhi(\widehat{t}_1) < 0$,则$t_1^{(j)} = t_1^A, T^{(j)} = T^A$. 将$t_1^{(j)}$和$T^{(j)}$代入$\mathrm{ATP}_1(m|t_1^{(j)}, T^{(j)})$中,求解方程$\partial \mathrm{ATP}_1(m|t_1^{(j)}, T^{(j)})/\partial m = 0$以确定$m^{(j+1)}$.

step 5: 如果$m^{(j)}$与$m^{(j+1)}$相差足够小,即$|m^{(j+1)} - m^{(j)}| \leqslant 10^{-4}$,则最优解为$(t_1^*, T^*, m^*) = (t_1^{(j)}, T^{(j)}, m^{(j+1)})$,执行step 6;否则,令$j = j+1$,并返回执行step 4;

step 6: 将最优解(t_1^*, T^*, m^*)代入式(8)和(3),计算零售商的最优平均利润ATP和最优订货量Q.

4　算例分析

现考虑如下库存系统: $A = 120$元, $c_h = 1$(元/单位/年), $c = 10$元, $p = 15$元, $c_g = 3$(元/单位), $\theta = 0.2$, $c_b = 2$(元/单位/年), $T_t = 0.02$年. 此外,假设需求函数和违约风险函数分别为$D(m) = K\mathrm{e}^{am}$, $F(m) = 1 - \mathrm{e}^{-bm}$. 其中: $K = 1\,000$表示市场基本需求率, $a = 0.2$和$b = 0.055$分别表示信用期需求弹性系数和信用期违约因子.

利用上述算法完成基础算例的求解. 首先,计算$\varDelta(m) = 145 > 0$,表明零售商可以采用信用销售策略扩大市场需求. 进一步,选取初始搜索值$m^{(1)} = \widehat{m}/2 = 3.686\,0$进行迭代计算,计算过程如表1所示.

表1　寻找最优解的迭代过程

j	$m^{(j)}$	$t_1^{(j)}$	$T^{(j)}$	$m^{(j+1)}$	$\|m^{(j+1)}-m^{(j)}\|$	$\mathrm{ATP}^{(j)}$
1	3.686 0	0.174 0	0.219 3	1.098 3	2.587 7	3 610.65
2	1.098 3	0.226 3	0.275 7	0.964 3	0.134 0	4 268.06
3	0.964 3	0.229 5	0.279 0	0.956 2	0.008 1	4 269.37
4	0.956 2	0.229 7	0.279 2	0.955 7	0.000 5	4 269.38
5	0.955 7	0.229 7	0.279 3	0.955 7	0.000 0	4 269.38

表1显示,每步迭代均使得ATP逐渐增加,直至相邻两次迭代结果中决策变量之间的误差满足相应的阈值要求,停止计算,问题达到最大值. 由表1可得最优解为$t_1^* = 0.229\,7, T^* = 0.279\,3, m^* = 0.955\,7, \mathrm{ATP}^* = 4\,269.38$,最优订货量为$Q^* = 341.79$.

下面探讨模型中相关参数对最优策略的影响.

首先,表2给出了参数δ和T_t取值变化对零售商最优策略的影响. 观察表2可知,对于固定的δ,当T_t取值增加时,T^*、m^*、Q^*和ATP^*均随之增加,而t_1^*随之减小. 易知,T_t取值越大表明消费者缺货容忍强度越大,因此,随着T_t取值的增加,零售商将采用相应措施以充分利用消费者的缺货容忍行为. 具体地,零售商一方面会缩短正向库存持有区间,同时增加订货周期,目的是延长缺货区间;另一方面会延长其信用期,目的是通过扩大基本市场需求率来获得更多的延迟订购需求. 市场需求和订货周期的增加必将导致零售商订购量的增加. 此外,对于固定的T_t,消费者的延迟订购率越高(即δ较小),零售商获得的利润增值越大,这是因为较高的延迟订购率产生了较多的延迟订购需求,而消费者缺货容忍现象的存在可以减少零售商缺货成本的支出. 事实上,缺货容忍期限可被视为消费者向零售商提供的反向信用期,对零售商可以起到一种成本补贴的作用,而消费者的缺货容忍也将激励零售商提供更长的信用期,使消费者获得更长的延期付款优惠. 因此,缺货容忍行为可以实现买卖双方的互利共赢.

表2　参数δ和T_t取值变化对零售商最优策略的影响

δ	T_t	t_1^*	T^*	m^*	Q^*	ATP^*	利润增值
	0	0.217 4	0.295 5	0.995 9	362.89	4 312.92	0
	0.02	0.213 9	0.295 5	1.018 0	364.09	4 323.99	11.07
1	0.04	0.211 4	0.296 8	1.034 4	366.28	4 332.39	19.47
	0.06	0.209 6	0.299 1	1.043 5	369.44	4 338.18	25.26
	0.08	0.208 6	0.302 4	1.051 0	373.50	4 341.46	28.54
	0	0.231 7	0.279 0	0.942 2	340.88	426 3.09	0
	0.02	0.229 7	0.279 3	0.955 7	341.79	4 269.38	6.29
2	0.04	0.228 7	0.280 7	0.962 7	343.64	4 272.71	9.62
	0.06	0.228 5	0.282 2	0.964 0	345.43	4 273.35	10.26
	0.08	0.228 5	0.282 3	0.964 0	345.43	4 273.35	10.26
	0	0.238 3	0.272 2	0.914 1	331.80	4 240.86	0
	0.02	0.237 0	0.272 6	0.923 3	332.58	4 244.96	4.10
3	0.04	0.236 6	0.273 8	0.925 7	3 33.97	4 246.04	5.18
	0.06	0.236 6	0.273 8	0.925 7	333.97	4 246.04	5.18
	0.08	0.236 6	0.273 8	0.925 7	333.97	4 246.04	5.18

其次,图2显示了相比于不考虑消费者的缺货容忍行为,T_t取值变化对零售商利润增值的影响. 由图2可知,对于不同的c_b取值,零售商的利润增值均随着T_t取值的增加而增加,且c_b取值越大利润增值越大. 这一结果表明,c_b取值越大,缺货容忍行为对零售商成本补贴的效果越显著. 因此,对零售商而言,在进行库存决策时应该充分关注消费者缺货容忍现象,特别是在管理缺货成本较高的商品时. 同时,零售商可以采用一系列营销措施或激励机制来加强自身与消费者之间的关系,培养消费者的忠诚度,以使得消费者具有更强的缺货容忍.

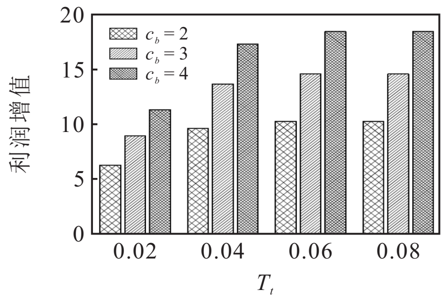


图 2 T_t取值变化对零售商利润增值的影响

再次,图3描述了相比于不考虑消费者的缺货容忍行为,T_t取值变化对产品变质数量的影响. 由图3可知,对于不同的变质率θ,随着T_t取值的增加,产品变质数量减少的百分比均呈递增趋势,且变质率越高,产品变质数量减少的百分比越大(最大可减少3 %的变质量). 可以理解,消费者缺货容忍现象的存在,将促使零售商缩短正向库存持有时长,增加缺货时长,而正向库存持有区间的缩短必定导致变质数量的减少. 上述结论具有很强的实践意义: 1) 从经济角度而言,消费者的缺货容忍行为可以有效增加零售商利润,是零售商改善其利润水平的一个新的营销方向; 2) 从节约资源的角度而言,消费者的缺货容忍现象可以有效降低产品的变质浪费.

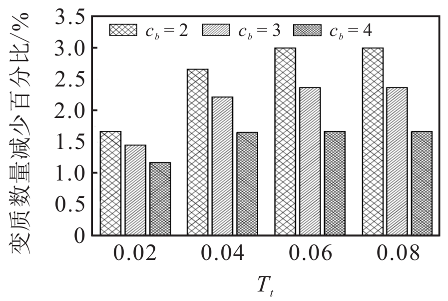


图 3 T_t取值变化对产品变质数量的影响

最后,表3给出了其余相关参数对零售商最优策略的影响.

表 3 其余参数取值变化对零售商最优策略的影响

参数	取值	t_1^*	T^*	m^*	Q^*	ATP*
A	90	0.1977	0.2403	1.0362	298.39	4384.89
	120	0.2297	0.2793	0.9557	341.79	4269.38
	150	0.2584	0.3141	0.8839	379.47	4168.24
p	15	0.2297	0.2793	0.9557	341.79	4269.38
	16	0.2032	0.2470	2.1957	386.90	5519.32
	17	0.1812	0.2203	3.3532	434.45	7007.30
θ	0.1	0.2893	0.3306	1.0356	409.94	4406.89
	0.2	0.2297	0.2793	0.9557	341.79	4269.38
	0.3	0.1938	0.2497	0.8990	302.27	4163.79
c_b	1	0.2292	0.2807	0.9595	343.48	4271.24
	2	0.2297	0.2793	0.9557	341.79	4269.38
	3	0.2303	0.2780	0.9524	340.29	4267.73
c_g	2	0.2262	0.2825	0.9804	346.62	4280.64
	3	0.2297	0.2793	0.9557	341.79	4269.38
	4	0.2326	0.2768	0.9379	338.22	4260.42
K	1000	0.2297	0.2793	0.9557	341.79	4269.38
	1500	0.1859	0.2260	1.0656	423.27	6641.67
	2000	0.1601	0.1948	1.1301	492.13	9045.68
a	0.1	0.2544	0.3045	0.0000	308.72	4217.02
	0.2	0.2297	0.2793	0.9557	341.79	4269.38
	0.3	0.1507	0.1920	3.3147	520.82	5517.59
b	0.040	0.1670	0.2107	3.9872	470.05	5059.67
	0.055	0.2297	0.2793	0.9557	341.79	4269.38
	0.070	0.2544	0.3045	0.0000	308.72	4217.02

根据表3,可以得到如下结果:

1) 参数A、θ、c_b、c_g和b取值增加时,ATP*将随之减少. 显然,参数A、θ、c_b和c_g均为库存系统的成本结构参数,而参数b为消费者信用期违约因子,对利润均具有负效应,其取值的增加必定导致利润的减小. 反之,当参数p、K和a取值增加时,ATP*将随之增加. 可知,零售价格越高或市场需求越大,零售商获得利润也就越大. 同时,ATP*对参数p、K和a的取值变化表现出较强的敏感性.

2) 最优订货量Q^*随着参数A、p、K和a取值的增加而增加,随着参数θ、c_b、c_g和b取值的增加而减小. 参数p、K和a取值的增加将导致更多的市场需求,进而激励零售商增加订购量,而参数A取值增加,将促使零售商增加订货量降低其订货频率. 相反地,当参数θ、c_b和c_g取值增加时,为了降低变质数量、减少缺货损失,零售商将采用“多批少量”的订货策略来减少其利润损失. 此外,参数b取值越大,表明违约风险越大,零售商将没有动力去提供信用期,进而市场需求会减低,最终订购量也会减少.

3) 最优信用期m^*随着参数p、K和a取值的增

加而增加,随着A、θ、c_b、c_g和b取值的增加而减少. 易知,信用期m^*越大,违约后单位产品的净收益越小. 故当参数p、K和a取值增加时,零售商提高信用期仍能保证获得较高的单位产品净收益或较大市场需求. 而当参数A、θ、c_b、c_g和b取值增加时,零售商此时提高信用期带来的额外市场需求不足以弥补上述参数带来的成本损失,因此零售商将没有动力去延长信用期. 此外,注意到m^*对参数p、a和b表现出较强的敏感性,这就要求零售商在使用信用销售策略时应该充分关注这些参数.

4) 参数A和b取值增加时,t_1^*和T^*均随之增加;当参数p、θ、K和a取值增加时,t_1^*和T^*均随之减小;当参数c_b和c_g取值增加时,t_1^*随之增加,而T^*随之减小. 容易理解,参数A取值增加将促使零售商采用“少批多量”的补货策略管理库存,而参数b取值的增加将降低市场需求,结果导致订货周期的延长. 此外,参数p、a、K和θ取值的增加意味着零售商将面临较大的市场需求或更多的变质损失,此时零售商将加快其补货频率来应对大量的市场需求或产品变质的成本损失. 最后,参数c_b和c_g取值的增加表明缺货时,零售商需要支付昂贵的缺货成本,因此零售商将通过延长其正向库存持有周期、缩短其补货周期来维持一个合理的缺货区间.

5 结　论

本文针对一个需求受商业信用期影响的变质品库存系统,允许缺货且短缺量部分延迟订购,同时考虑消费者存在缺货容忍行为这一现实情形,以平均利润最大化为目标探讨了零售商的联合订购和信用期决策问题. 通过对库存模型的理论分析证明了最优解的存在性和唯一性,并给出了相关定理结论. 在此基础上,设计了一个两阶段迭代算法完成对模型的数值求解,并对主要参数进行了灵敏度分析获得了一些结论和管理启示: 1) 消费者的缺货容忍行为可以有效地改善零售商的利润水平,减低产品变质损失,且消费者的延迟订购率越高、缺货成本越大或变质率越大,改善效果越明显; 2) 消费者的缺货容忍行为还可以激励零售商提供更长的信用期优惠,有助于实现买卖双方的共赢; 3) 采用商业信用的营销策略可以有效地加快变质品库存的周转,提高零售商的利润水平,但观察到零售商的最优信用期对产品的零售价格、信用期需求弹性系数和违约风险因子表现出较强的敏感性,这就要求零售商在使用信用期这一营销策略时充分关注这些参数.

参考文献(References)

[1] Ferguson M E, Lystad E D, Alexopoulos C. Single stage heuristic for perishable inventory control in two-echelon supply chains[J]. Perishable Inventory, 2006, DOI: http://hdl.handle.net/1853/11677.

[2] Ghare P M. A model for an exponentially decaying inventory[J]. Journal of Industrial Engineering, 1963, 14: 238-243.

[3] Goyal S K, Giri B C. Recent trends in modeling of deteriorating inventory[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 134(1): 1-16.

[4] Bakker M, Riezebos J, Teunter R H. Review of inventory systems with deterioration since 2001[J]. European Journal of Operational Research, 2012, 221(2): 275-284.

[5] Janssen L, Claus T, Sauer J. Literature review of deteriorating inventory models by key topics from 2012 to 2015[J]. International Journal of Production Economics, 2016, 182: 86-112.

[6] Shah Y K. An order-level lot-size inventory model for deteriorating items[J]. AIIE Transactions, 1977, 9(1): 108-112.

[7] Abad P L. Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability and partial backordering[J]. Management Science, 1996, 42(8): 1093-1104.

[8] Dye C Y. Joint pricing and ordering policy for a deteriorating inventory with partial backlogging[J]. Omega, 2007, 35(2): 184-189.

[9] Skouri K, Konstantaras I, Papachristos S, et al. Inventory models with ramp type demand rate, partial backlogging and Weibull deterioration rate[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 192(1): 79-92.

[10] Dye C Y. The effect of preservation technology investment on a non-instantaneous deteriorating inventory model[J]. Omega, 2013, 41(5): 872-880.

[11] Li G P, He X L, Zhou J, et al. Pricing, replenishment and preservation technology investment decisions for non-instantaneous deteriorating items[J]. Omega, 2019, 84: 114-126.

[12] 计国君, 韩尚清. 基于第三方的易变质产品库存决策[J]. 控制与决策, 2015, 30(4): 663-669.
(Ji G J, Han S Q. Deteriorating item inventory decision-marking research based on third-party[J]. Control and Decision, 2015, 30(4): 663-669.)

[13] Tiwari S, Cárdenas-Barrón L E, Goh M, et al. Joint pricing and inventory model for deteriorating items with expiration dates and partial backlogging under two-level partial trade credits in supply chain[J]. International Journal of Production Economics, 2018, 200: 16-36.

[14] Wu J, Chang C T, Teng J T, et al. Optimal order

quantity and selling price over a product life cycle with deterioration rate linked to expiration date[J]. International Journal of Production Economics, 2017, 193: 343-351.

[15] 曹裕, 李业梅, 李青松. 基于提前支付的非瞬时变质产品批量订购定价策略[J]. 控制与决策, 2018, 33(2): 301-308.
(Cao Y, Li Y M, Li Q S. Research on pricing and inventory lot-size policies for non-instantaneous deteriorating items with stochastic demand and promotional efforts based on advance payments[J]. Control and Decision, 2018, 33(2): 301-308.)

[16] Khan M A A, Shaikh A A, Panda G C, et al. Inventory system with expiration date: Pricing and replenishment decisions[J]. Computers & Industrial Engineering, 2019, 132: 232-247.

[17] Shaikh A A, Khan M A A, Panda G C, et al. Price discount facility in an EOQ model for deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging[J]. International Transactions in Operational Research, 2019 26(4): 1365-1395.

[18] Krommyda I P, Skouri K, Lagodimos A G. A unified EOQ model with financial constraints and market tolerance[J]. Applied Mathematical Modelling, 2019, 65: 89-105.

[19] Li R H, Liu Y P, Teng J T, et al. Optimal pricing, lot-sizing and backordering decisions when a seller demands an advance-cash-credit payment scheme[J]. European Journal of Operational Research, 2019, 278(1): 283-295.

[20] Jaggi C K, Goyal S K, Goel S K. Retailer's optimal replenishment decisions with credit-linked demand under permissible delay in payments[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 190(1): 130-135.

[21] Lou K R, Wang W C. Optimal trade credit and order quantity when trade credit impacts on both demand rate and default risk[J]. Journal of the Operational Research Society, 2013, 64(10): 1551-1556.

[22] Wang W C, Teng J T, Lou K R. Seller's optimal credit period and cycle time in a supply chain for deteriorating items with maximum lifetime[J]. European Journal of Operational Research, 2014, 232(2): 315-321.

[23] Dye C Y, Yang C T. Sustainable trade credit and replenishment decisions with credit-linked demand under carbon emission constraints[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 244(1): 187-200.

[24] Chen S C, Teng J T. Inventory and credit decisions for time-varying deteriorating items with up-stream and down-stream trade credit financing by discounted cash flow analysis[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 243(2): 566-575.

[25] Dye C Y. A dynamic advertising problem when demand is sensitive to the credit period and stock of advertising goodwill[J]. Journal of the Operational Research Society, 2019: 1-19.

[26] 赵连霞, 张力, 程明宝, 等. 变质性产品库存模型研究: 延期支付策略或延期交货策略[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(5): 1117-1127.
(Zhao L X, Zhang L, Chen M B, et al. Optimal policy for inventory model with deteriorating products: Delay-in-payment or backorder[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2019, 39(5): 1117-1127.)

[27] Schaible S, Ibaraki T. Fractional programming[J]. European Journal of Operational Research, 1983, 12(4): 325-338.

作者简介

江文辉 (1992–), 男, 博士生, 从事库存与供应链管理的研究, E-mail: jiangwh123456@163.com;

李思雯 (1994–), 女, 博士生, 从事库存与供应链管理的研究, Email: lisiwen319@163.com;

徐菱 (1965–), 女, 教授, 博士生导师, 从事物流与供应链管理、物流系统规划与设计等研究, E-mail: xl_xnjd@163.com;

丁小东 (1987–), 男, 副研究员, 从事交通运输经济、物流系统规划等研究, E-mail: dxddyx@163.com;

李延来 (1971–), 男, 教授, 博士生导师, 从事库存与供应链管理、决策理论与方法等研究, E-mail: lyl_2001@163.com.

(责任编辑：齐 霁)