

# 控制与决策

Control and Decision

## 丢包和量化约束下的不确定系统分布式滚动时域估计

刘帅, 赵国荣, 曾宾, 高超

引用本文:

刘帅, 赵国荣, 曾宾, 等. 丢包和量化约束下的不确定系统分布式滚动时域估计[J]. 控制与决策, 2021, 36(7): 1771–1778.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1603>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 基于数据驱动的非线性网络系统自适应迭代学习控制

Data driven adaptive learning control of nonlinear network system

控制与决策. 2021, 36(6): 1523–1528 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1182>

### 基于神经网络的电力系统暂态稳定分布式自适应控制

Neural network-based distributed adaptive control for power system transient stability

控制与决策. 2021, 36(6): 1407–1414 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1168>

### 具有不确定丢包率和时变采样周期的Delta算子系统故障检测

Fault detection for delta operator systems with uncertain packet dropout rate and time-varying sampling periods

控制与决策. 2021, 36(5): 1101–1109 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1154>

### 测量数据丢失的随机不确定系统滚动时域估计

Moving horizon estimation for stochastic uncertain system with missing measurements

控制与决策. 2021, 36(2): 450–456 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0648>

### 事件触发机制下分布时滞网络化控制系统 $H_\infty$ 故障检测

Event-triggered  $H_\infty$  fault detection for networked control systems with distributed delays

控制与决策. 2020, 35(12): 3059–3065 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0456>

# 丢包和量化约束下的不确定系统分布式滚动时域估计

刘 帅<sup>1†</sup>, 赵国荣<sup>1</sup>, 曾 宾<sup>2</sup>, 高 超<sup>1</sup>

(1. 海军航空大学 岸防兵学院, 山东 烟台 264001; 2. 中国人民解放军 92095 部队, 浙江 台州 318000)

**摘 要:** 研究了数据丢包和量化约束下的随机不确定系统分布式状态估计问题. 将丢包现象描述为随机 Bernoulli 序列, 采用预测补偿机制对数据丢包进行补偿, 将量化引入的误差转化为观测方程中的不确定参数, 将系统的模型不确定性描述为系数矩阵受到随机扰动; 利用固定时域内的所有观测值构造代价函数, 将状态估计问题建模为带不确定参数的鲁棒最小二乘优化问题, 并通过将矢量优化问题转化为单峰函数的标量优化问题, 实现了鲁棒滚动时域局部估计器的快速求解; 对局部估计器的稳定性进行研究, 给出了估计误差范数平方期望收敛的充分条件. 应用协方差交叉(CI)融合算法进行加权融合, 得到了分布式融合估计器. 最后通过仿真验证了所提算法的有效性.

**关键词:** 滚动时域估计; 预测补偿; 数据量化; 不确定系统; 稳定性分析; CI 融合

中图分类号: TP271.7; V249.3

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.1603

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 刘帅, 赵国荣, 曾宾, 等. 丢包和量化约束下的不确定系统分布式滚动时域估计[J]. 控制与决策, 2021, 36(7): 1771-1778.

## Distributed moving horizon estimation for stochastic uncertain system with packet dropouts and quantized measurements

LIU Shuai<sup>1†</sup>, ZHAO Guo-rong<sup>1</sup>, ZENG Bin<sup>2</sup>, GAO Chao<sup>1</sup>

(1. Coastal Defence Academy, Naval Aviation University, Yantai 264001, China; 2. The Chinese People's Liberation Army 92095 Troop, Taizhou 318000, China)

**Abstract:** The distributed state estimation problem of the stochastic uncertain system with quantized measurements and packet dropouts is studied. A group of Bernoulli distributed random variables is employed to describe the phenomenon of packet dropouts, and the predictor of lost observation is used as the observation when a packet is lost. The error introduced by data quantization is described as a bounded uncertain parameter in the observation equation, and the uncertainty of the model is described by stochastic parameter perturbation in the coefficient matrix. All measurements in the fixed time domain are used to construct a cost function, and the state estimation problem is modeled as a regularized least squares problem with uncertain parameters, by reducing a vector optimization problem to a scalar optimization problem of an unimodal function, a robust moving horizon local estimator is obtained. The stability of local estimator is studied, and a sufficient condition for the convergence of the square norm of estimation error is obtained. A distributed fusion estimator is presented based on the covariance intersection algorithm. Finally, simulation examples are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method

**Keywords:** moving horizon estimation; prediction compensation; quantization; uncertain system; stability analysis; CI fusion

## 0 引言

网络化控制系统(networked control systems, NCSs)具有运行成本低、可扩展性强、易于远程操控等特点,被广泛应用于组网导航、智能交通、工业控制等多个领域<sup>[1-3]</sup>. NCSs中的数据通过网络传输,不可避免地会引入丢包、量化等约束<sup>[4-6]</sup>. 另外,网络化系统在运行过程中易受到外部扰动的影响,使得系统

模型参数出现一定的不确定性<sup>[7-8]</sup>. 因此,研究带有数据丢包和量化的不确定系统状态估计问题,具有重要的理论意义和工程应用价值.

近年来,网络化系统的状态估计问题得到了学术界的广泛关注,并取得了一系列研究成果. 文献[6]采用输入保持策略进行丢包补偿,利用新息分析法,通过求解 Riccati 方程得到了多丢包系统的最优线性估

收稿日期: 2019-11-17; 修回日期: 2020-03-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61473306, 61701519, 61930074).

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: 15165714808@163.com.

计器;文献[7]将模型的不确定性描述为系统矩阵受到随机扰动,设计了一种无偏估计器,通过调整估计器增益,达到了期望的估计性能;文献[8]同时考虑随机丢包和范数有界不确定性,推导了有界不确定性下的误差方差上界;文献[9]将测量数据丢失的不确定系统状态估计问题转化为相应扰动下的规则最小二乘问题,得到了一种鲁棒递推滤波算法;文献[10]针对带有模型不确定性和数据量化的随机系统,提出一种鲁棒 $H_\infty$ 滤波算法,利用一定时域内的观测信息,通过求解线性矩阵不等式得到了状态的最优估计.此外,从信息融合的结构方面考虑,分布式融合采用并行结构,具有计算负担小、鲁棒性好、便于故障诊断等诸多优点,吸引了众多学者的关注<sup>[3,11-13]</sup>.文献[11]针对带随机时延和丢包的网络化系统,设计了带缓存器的分布式联邦卡尔曼滤波融合算法;文献[12]研究基于预测补偿机制的分布式融合估计,给出了各局部估计器间互协方差矩阵的递推公式,采用最小方差意义下的矩阵加权融合准则得到了最优估计;文献[13]研究随机不确定系统的多传感器融合估计问题,设计了一种协方差交叉(covariance intersection, CI)融合算法,避免了复杂的互协方差矩阵计算过程,降低了算法的复杂度,并通过目标跟踪案例验证了算法的有效性.

滚动时域估计(moving horizon estimation, MHE)是近年来发展迅速的一种有限区间估计方法,通过引入到达代价函数,将优化问题的求解限定在固定时域窗口内,具有滚动优化、显式处理约束、对噪声统计特性无特殊要求等特点<sup>[14-15]</sup>.本文开展基于MHE的网络化系统分布式状态估计方法研究,综合考虑丢包、量化和模型不确定性的影响,建立min-max优化模型<sup>[16]</sup>,通过求解有界干扰下的规则最小二乘问题得到局部最优估计值,并采用CI融合准则进行融合估计,通过最小化融合估计误差协方差的上界来得到最终的融合估计器.

### 1 问题描述

考虑如下多传感器随机参数不确定系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = (\mathbf{A}_k + \delta \mathbf{A}_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{w}_k; \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k^j = \mathbf{C}_k^j \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^j, \quad j = 1, 2, \dots, L. \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_k \in \mathbf{X}$ 和 $\mathbf{z}_k^j \in \mathbf{R}^{p_j}$ 分别为系统状态和传感器观测值; $\delta \mathbf{A}_k \in \mathbf{A}$ 为不确定矩阵; $\mathbf{w}_k \in \mathbf{W}$ 和 $\mathbf{v}_k^j \in \mathbf{V}^j$ 为系统噪声和观测噪声,其协方差矩阵分别为 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}^j$ . $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{W}$ 、 $\mathbf{V}^j$ 为满足如下条件的凸多面体集:

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq \eta_x\},$$

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{w} : \|\mathbf{w}\| \leq \eta_w\},$$

$$\mathbf{V}^j = \{\mathbf{v} : \|\mathbf{v}\| \leq \eta_{v_j}\}.$$

受网络带宽约束,传感器测量数据在发送给估计器前需要进行量化处理.对数量化器是一种广泛采用的量化方式,根据文献[17]的结论,观测值经对数量化器处理后可表示成以下形式:

$$q(\mathbf{z}_k) = (\mathbf{I} + \mathbf{\Delta}_k) \mathbf{z}_k, \quad \|\mathbf{\Delta}_k\| \leq \delta, \quad (3)$$

其中 $\delta = (1 - \rho)/(1 + \rho)$ , $\rho$ 为量化密度.

NCSs中,数据通过网络传输,丢包是难以避免的.丢包现象可以用一个满足Bernoulli分布的随机变量 $\gamma_i$ 来描述, $\gamma_i$ 具有以下性质:

$$P(\gamma_i = 1) = E\{\gamma_i = 1\} = \gamma, \quad (4)$$

$$P(\gamma_i = 0) = E\{\gamma_i = 0\} = 1 - \gamma. \quad (5)$$

其中:符号 $P(\cdot)$ 和 $E(\cdot)$ 分别表示概率和均值; $\gamma_i = 1$ 表示数据包正常传输, $\gamma_i = 0$ 表示数据包丢失.

综合考虑丢包和数据量化,可将传感器 $j$ 的观测方程写成以下形式:

$$\mathbf{y}_{i|k}^j = \gamma_i^j (\mathbf{I} + \mathbf{\Delta}_i^j) (\mathbf{C}_i^j \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i^j) + (1 - \gamma_i^j) \hat{\mathbf{z}}_{i|k-1}^j, \quad (6)$$

其中 $\hat{\mathbf{z}}_{i|k-1}^j$ 为丢包补偿项,可通过以下公式得到:

$$\hat{\mathbf{z}}_{i|k-1}^j = \mathbf{C}_i^j \hat{\mathbf{x}}_{i|k-1}^{j*}. \quad (7)$$

**注1** 实际应用中,估计器可通过一定的技术手段判断丢包是否发生,即 $\gamma_i^j$ 的具体值已知.

采用分布式滚动时域估计(distributed moving horizon estimation, DMHE)进行状态估计,其结构如图1所示.定义 $\boldsymbol{\mu}_{k-N,k} = \text{col}(\boldsymbol{\mu}_{k-N}, \dots, \boldsymbol{\mu}_k)$ ,在 $k$ 时刻,局部估计器 $j(j = 1, 2, \dots, L)$ 利用时域窗口内的 $N + 1$ 个观测值组成信息向量 $\mathbf{y}_{k-N,k|k}^j$ ,结合

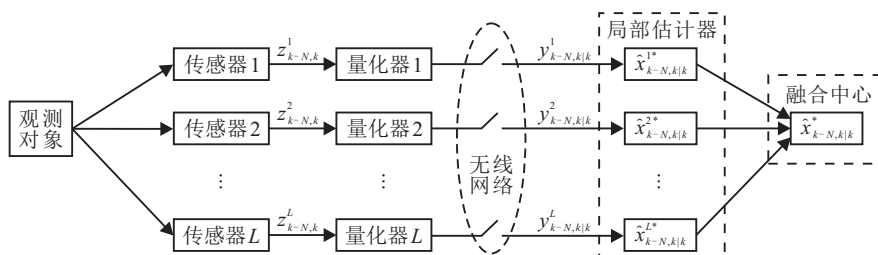


图1 分布式滚动时域估计示意图

$\mathbf{x}_{k-N}$  的预估值  $\bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j$  和权重矩阵  $\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j$  构造代价函数, 通过极小化代价函数得到局部最优估计  $\mathbf{x}_{k-N|k}^{j*}$  和  $\mathbf{w}_{k-N,k-1|k}^{j*}$ , 并通过递推算法计算  $\mathbf{x}_{k-N,k|k}^{j*}$ , 然后将  $\mathbf{x}_{k-N,k|k}^{j*}$  发送到融合中心, 通过加权融合算法得到融合估计  $\mathbf{x}_{k-N,k|k}^*$ .

## 2 局部最优估计器

### 2.1 局部估计器的设计

局部估计器  $j$  处, 根据随机最小二乘准则, 利用  $\mathbf{y}_{k-N,k|k}^j$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j$  和  $\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j$  构造代价函数

$$J_k^j = \|\hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^j - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j\|_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}}^2 + \sum_{i=k-N}^{k-1} \|\hat{\mathbf{w}}_{i|k}^j\|_{Q^{-1}}^2 + \sum_{i=k-N}^k \|\mathbf{y}_{i|k}^j - \hat{\mathbf{y}}_{i|k}^j\|_{(\mathbf{R}^j)^{-1}}^2. \quad (8)$$

其中:  $\hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^j$  和  $\hat{\mathbf{w}}_{i|k}^j$  为待估计量,  $\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j$  为正定权矩阵,  $\hat{\mathbf{y}}_{i|k}^j = (\mathbf{I} + \hat{\Delta}_i^j) \mathbf{C}_i^j \hat{\mathbf{x}}_{i|k}^j$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_{i|k}^j$  满足以下递推公式:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1|k}^j = (\mathbf{A}_i + \delta \hat{\mathbf{A}}_i) \hat{\mathbf{x}}_{i|k}^j + \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{w}}_{i|k}^j, \quad i = k - N, \dots, k - 1. \quad (9)$$

考虑到  $J_k^j$  受不确定参数  $\delta \hat{\mathbf{A}}_{k-N,k-1}$  和  $\hat{\Delta}_{k-N,k}^j$  影响, 为增强估计算法的鲁棒性, 需考虑不确定参数影响最严重的情况, 即求解以下约束 min-max 问题:

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^j, \hat{\mathbf{w}}_{k-N,k-1|k}^j} \max_{\delta \hat{\mathbf{A}}_{k-N,k-1}, \hat{\Delta}_{k-N,k}^j} J_k^j, \quad \text{s.t. } \hat{\mathbf{x}}_{i+1|k}^j = (\mathbf{A}_i + \delta \hat{\mathbf{A}}_i) \hat{\mathbf{x}}_{i|k}^j + \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{w}}_{i|k}^j. \quad (10)$$

定义以下矩阵:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_{Nk}^j &= \left[ \mathbf{I} \quad \hat{\mathbf{A}}_{k-N} \quad \dots \quad \prod_{i=1}^N \hat{\mathbf{A}}_{k-i} \right]^T, \\ \hat{\mathbf{H}}_{Nk}^j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{B}_{k-N} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod_{i=1}^{N-1} \hat{\mathbf{A}}_{k-i} \mathbf{B}_{k-N} & \prod_{i=1}^{N-2} \hat{\mathbf{A}}_{k-i} \mathbf{B}_{k-N+1} & \dots & \mathbf{B}_{k-1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F}_{Nk}^j &= \left[ \mathbf{I} \quad \mathbf{A}_{k-N} \quad \dots \quad \prod_{i=1}^N \mathbf{A}_{k-i} \right]^T, \\ \mathbf{H}_{Nk}^j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{B}_{k-N} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{A}_{k-i} \mathbf{B}_{k-N} & \prod_{i=1}^{N-2} \mathbf{A}_{k-i} \mathbf{B}_{k-N+1} & \dots & \mathbf{B}_{k-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_N^j = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{R}^j, \dots, \mathbf{R}^j}_{N+1}), \quad \mathbf{Q}_N = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{Q}, \dots, \mathbf{Q}}_N),$$

$$\mathbf{C}_{Nk}^j = \text{diag}(\mathbf{C}_{k-N}^j, \mathbf{C}_{k-N+1}^j, \dots, \mathbf{C}_k^j),$$

$$\hat{\Delta}_{Nk}^j =$$

$$\text{diag}(\mathbf{I} + \hat{\Delta}_{k-N}^j, \mathbf{I} + \hat{\Delta}_{k-N+1}^j, \dots, \mathbf{I} + \hat{\Delta}_k^j),$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{Nk}^j = \hat{\Delta}_{Nk}^j \mathbf{C}_{Nk}^j, \quad \hat{\mathbf{A}}_{k-i} = \mathbf{A}_{k-i} + \delta \hat{\mathbf{A}}_{k-i},$$

可将代价函数表示为

$$J_k^j = \|\hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^j - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j\|_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}}^2 + \|\hat{\mathbf{w}}_{k-N,k-1|k}^j\|_{(\mathbf{Q}_N)^{-1}}^2 + \|\mathbf{y}_{k-N,k|k}^j - (\hat{\mathbf{C}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{F}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^j + \hat{\mathbf{C}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{H}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{w}}_{k-N,k-1}^j)\|_{(\mathbf{R}_N^j)^{-1}}^2. \quad (11)$$

进一步, 定义变量

$$\mathbf{X}_k^j = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^j - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j \\ \hat{\mathbf{w}}_{k-N,k-1|k}^j \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}_{k-N}^j = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_k^j = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{Q}_N)^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Phi}_{Nk}^j = [\hat{\mathbf{C}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{F}}_{Nk}^j \quad \hat{\mathbf{C}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{H}}_{Nk}^j],$$

$$\Phi_{Nk}^j = [\mathbf{C}_{Nk}^j \mathbf{F}_{Nk}^j \quad \mathbf{C}_{Nk}^j \mathbf{H}_{Nk}^j],$$

$$\mathbf{Y}_k^j = (\hat{\Phi}_{Nk}^j - \Phi_{Nk}^j)(\mathbf{X}_k^j + \bar{\mathbf{X}}_{k-N}^j),$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{y}_{k-N,k|k}^j - \Phi_{Nk}^j \bar{\mathbf{X}}_{k-N}^j, \quad \bar{\mathbf{R}}_N^j = (\mathbf{R}_N^j)^{-1},$$

$$R(\mathbf{X}_k^j, \mathbf{Y}_k^j) = \|\Phi_{Nk}^j \mathbf{X}_k^j - \mathbf{D} + \mathbf{Y}_k^j\|_{\bar{\mathbf{R}}_N^j}^2,$$

代价函数可表示为

$$J_k^j(\mathbf{X}_k^j, \mathbf{Y}_k^j) = \|\mathbf{X}_k^j\|_{\bar{\mathbf{Q}}_k^j}^2 + R(\mathbf{X}_k^j, \mathbf{Y}_k^j). \quad (12)$$

令  $\zeta^j = \max_{\delta \hat{\mathbf{A}}_{k-N,k-1}, \hat{\Delta}_{k-N,k}^j} \|\hat{\Phi}_{Nk}^j - \Phi_{Nk}^j\|$ , 取  $\Gamma^j = \zeta^j \mathbf{I}$ ,  $\Psi(\mathbf{X}_k^j) = \Gamma^j (\bar{\mathbf{X}}_{k-N}^j + \bar{\mathbf{X}}_{k-N}^j)$ , 则有  $\mathbf{Y}_k^j \leq \Psi(\mathbf{X}_k^j)$ , 可将式(10)所述的优化问题转化为以下形式:

$$\min_{\mathbf{X}_k^j} \max_{\|\mathbf{Y}_k^j\| \leq \Psi(\mathbf{X}_k^j)} J_k^j(\mathbf{X}_k^j, \mathbf{Y}_k^j). \quad (13)$$

上述优化问题的解可由以下定理给出.

**定理1** 给定  $\rho, \gamma^j, \bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j, \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j$  和  $\mathbf{y}_{k-N,k|k}^j$ , 优化问题(13)具有以下形式的解析解:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k^{j*} &= (\hat{\mathbf{Q}}_k^j + (\Phi_{Nk}^j)^T \hat{\mathbf{R}}_N^j \Phi_{Nk}^j)^{-1} \cdot \\ &\quad [(\Phi_{Nk}^j)^T \hat{\mathbf{R}}_N^j \mathbf{D} - \lambda^{j*} (\Gamma^j)^T \Gamma^j \bar{\mathbf{X}}_{k-N}^j]. \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\hat{\mathbf{R}}_N^j = \bar{\mathbf{R}}_N^j + \bar{\mathbf{R}}_N^j (\lambda^{j*} \mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_N^j)^+ \bar{\mathbf{R}}_N^j,$$

$$\hat{\mathbf{Q}}_k^j = \bar{\mathbf{Q}}_k^j + \lambda^{j*} (\Gamma^j)^T \Gamma^j,$$

$\lambda^{j*}$  通过下式获得:

$$\min_{\lambda \geq \|\bar{\mathbf{R}}_N^j\|} \{ \|\Phi_{Nk}^j \mathbf{X}_k^{j*}(\lambda) + \Phi_{Nk}^j \bar{\mathbf{X}}_{k-N}^j - \mathbf{D}\|_{\bar{\mathbf{R}}_N^j} \}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{y}_{k-N,k|k}^j \|\bar{\mathbf{R}}_N^j(\lambda)\|^2 + \|\mathbf{X}_k^{j*}(\lambda)\|_{\bar{\mathbf{Q}}_k^j}^2 + \\ & \lambda \|\mathbf{I}^j \mathbf{X}_k^{j*}(\lambda) + \mathbf{I}^j \bar{\mathbf{X}}_{k-N}^j\|^2 \}. \end{aligned} \quad (15)$$

这里

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_k^j(\lambda) &= \bar{\mathbf{Q}}_k^j + \lambda(\mathbf{I}^j)^T \mathbf{I}^j, \\ \bar{\mathbf{R}}_N^j(\lambda) &= \bar{\mathbf{R}}_N^j + \bar{\mathbf{R}}_N^j(\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_N^j)^+ \bar{\mathbf{R}}_N^j, \\ \mathbf{X}_k^{j*}(\lambda) &= [\bar{\mathbf{Q}}_k^j(\lambda) + (\Phi_{Nk}^j)^T \bar{\mathbf{R}}_N^j(\lambda) \Phi_{Nk}^j]^{-1} \cdot \\ & \quad [(\Phi_{Nk}^j)^T \bar{\mathbf{R}}_N^j(\lambda) \mathbf{D} - \lambda(\mathbf{I}^j)^T \mathbf{I}^j \bar{\mathbf{X}}_{k-N}^j]. \end{aligned}$$

**证明** 对于任意的  $\mathbf{Y}_k^j, R(\mathbf{X}_k^j, \mathbf{Y}_k^j)$  是关于  $\mathbf{X}_k^j$  的凸函数, 构造函数

$$G(\mathbf{X}_k^j) = \max_{\|\mathbf{Y}_k^j\| \leq \Psi(\mathbf{X}_k^j)} R(\mathbf{X}_k^j, \mathbf{Y}_k^j), \quad (16)$$

则  $G(\mathbf{X}_k^j)$  是关于  $\mathbf{X}_k^j$  的凸函数. 同时,  $\|\mathbf{X}_k^j\|_{\bar{\mathbf{Q}}_k^j}^2$  也是关于  $\mathbf{X}_k^j$  的凸函数且是径向无界的, 因此  $\|\mathbf{X}_k^j\|_{\bar{\mathbf{Q}}_k^j}^2 + G(\mathbf{X}_k^j)$  是关于  $\mathbf{X}_k^j$  的凸函数且是径向无界的, 由此可得式(13)有唯一的全局最优解  $\mathbf{X}_k^{j*}$ .

考虑式(16), 对于任意固定的  $\mathbf{X}_k^j$ , 目标函数  $R(\mathbf{X}_k^j, \mathbf{Y}_k^j)$  和约束函数  $\|\mathbf{Y}_k^j\| \leq \Psi(\mathbf{X}_k^j)$  都是关于  $\mathbf{Y}_k^j$  的凸函数, 因此  $R(\mathbf{X}_k^j, \mathbf{Y}_k^j)$  的极大值在约束条件的边界处, 即  $\|\mathbf{Y}_k^j\| = \Psi(\mathbf{X}_k^j)$  处取得. 通过引入拉格朗日乘子  $\lambda^j$ , 可将式(16)中的极大化问题表示如下:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{X}_k^j) &= \max_{\mathbf{Y}_k^j, \lambda^j} [\|\Phi_{Nk}^j \mathbf{X}_k^j - \mathbf{D} + \mathbf{Y}_k^j\|_{\bar{\mathbf{R}}_N^j}^2 + \\ & \quad \lambda^j (\|\mathbf{Y}_k^j\|^2 - \Psi^2(\mathbf{X}_k^j))]. \end{aligned}$$

假设  $\mathbf{Y}_k^{j*}(\mathbf{X}_k^j)$  和  $\lambda^{j*}(\mathbf{X}_k^j)$  为  $G(\mathbf{X}_k^j)$  取极大值时对应的解, 由极值点的性质可得

$$\begin{cases} (\lambda^{j*}(\mathbf{X}_k^j) \mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_N^j) \mathbf{Y}_k^{j*}(\mathbf{X}_k^j) = \bar{\mathbf{R}}_N^j (\Phi_{Nk}^j \mathbf{X}_k^j - \mathbf{D}), \\ \|\mathbf{Y}_k^{j*}(\mathbf{X}_k^j)\| = \Psi(\mathbf{X}_k^j), \\ \lambda^{j*}(\mathbf{X}_k^j) \geq \|\bar{\mathbf{R}}_N^j\|. \end{cases} \quad (17)$$

将式(17)代入  $G(\mathbf{X}_k^j)$  表达式可得

$$\begin{aligned} G(\mathbf{X}_k^j) &= \\ & \lambda^{j*}(\mathbf{X}_k^j) \Psi^2(\mathbf{X}_k^j) + (\Phi_{Nk}^j \mathbf{X}_k^j - \mathbf{D})^T [\bar{\mathbf{R}}_N^j + \\ & \quad \bar{\mathbf{R}}_N^j(\lambda^{j*}(\mathbf{X}_k^j) \mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_N^j)^+ \bar{\mathbf{R}}_N^j] (\Phi_{Nk}^j \mathbf{X}_k^j - \mathbf{D}). \end{aligned} \quad (18)$$

至此, 可将式(13)表示为以下等价形式:

$$\min_{\mathbf{X}_k^j} [\|\mathbf{X}_k^j\|_{\bar{\mathbf{Q}}_k^j}^2 + G(\mathbf{X}_k^j)], \quad (19)$$

其中  $G(\mathbf{X}_k^j)$  由式(18)给出.

式(19)是一个关于多维矢量的优化过程, 计算复杂. 为了简化运算, 引入以下函数:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{X}_k^j, \lambda^j) &= \lambda^j \Psi^2(\mathbf{X}_k^j) + (\Phi_{Nk}^j \mathbf{X}_k^j - \mathbf{D})^T [\bar{\mathbf{R}}_N^j + \\ & \quad \bar{\mathbf{R}}_N^j(\lambda^j \mathbf{I} - \bar{\mathbf{R}}_N^j)^+ \bar{\mathbf{R}}_N^j] (\Phi_{Nk}^j \mathbf{X}_k^j - \mathbf{D}), \end{aligned}$$

其中  $\lambda^j$  为独立变量.  $G(\mathbf{X}_k^j, \lambda^j)$  对  $\lambda^j$  求微分, 结合函数极值的性质可知, 由式(17)得到的  $\lambda^{j*}(\mathbf{X}_k^j)$  与下式所示优化问题的最优解等价:

$$\lambda^{j*}(\mathbf{X}_k^j) = \arg \min_{\lambda^j \geq \|\bar{\mathbf{R}}_N^j\|} G(\mathbf{X}_k^j, \lambda^j). \quad (20)$$

于是可将式(13)作如下描述:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}_k^j} \min_{\lambda^j \geq \|\bar{\mathbf{R}}_N^j\|} J_k^j(\mathbf{X}_k^j, \lambda^j) &= \\ \min_{\lambda^j \geq \|\bar{\mathbf{R}}_N^j\|} \min_{\mathbf{X}_k^j} J_k^j(\mathbf{X}_k^j, \lambda^j), \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $J_k^j(\mathbf{X}_k^j, \lambda^j) = \|\mathbf{X}_k^j\|_{\bar{\mathbf{Q}}_k^j}^2 + G(\mathbf{X}_k^j, \lambda^j)$ .

考虑式(21)中等式右边关于  $\mathbf{X}_k^j$  的最小化过程, 令  $\frac{\partial J_k^j(\mathbf{X}_k^j, \lambda^j)}{\partial \mathbf{X}_k^j} = 0$ , 结合定理1中的参数定义可得, 最优解  $\mathbf{X}_k^j(\lambda^j)$  满足

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k^{j*}(\lambda) &= [\bar{\mathbf{Q}}_k^j(\lambda) + (\Phi_{Nk}^j)^T \bar{\mathbf{R}}_N^j(\lambda) \Phi_{Nk}^j]^{-1} \cdot \\ & \quad [(\Phi_{Nk}^j)^T \bar{\mathbf{R}}_N^j(\lambda) \mathbf{D} - \lambda(\mathbf{I}^j)^T \mathbf{I}^j \bar{\mathbf{X}}_{k-N}^j]. \end{aligned} \quad (22)$$

结合式(21)和(22)可得(15).

式(15)的目标函数是单峰函数, 将式(15)所得最优解  $\lambda^{j*}$  代入式(22), 可得式(14).  $\square$

假设  $\mathbf{R}^j = \frac{1}{r^j} \mathbf{I}$ , 如果  $\lambda \neq r^j$ , 则  $\hat{\mathbf{R}}_N^j$  可写为

$$\hat{\mathbf{R}}_N^j = \frac{\lambda^{j*} r^j}{\lambda^{j*} - r^j} \mathbf{I}. \quad (23)$$

工程应用中,  $\lambda^{j*}$  常采用以下近似处理<sup>[18]</sup>:

$$\lambda^{j*} = (1 + \alpha) \|\bar{\mathbf{R}}_N^j\|, \quad (24)$$

其中  $\alpha$  的值可通过离线仿真等方式进行调整.

结合式(14)、(23)和(24), 可得关于  $\hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*}$  和  $\hat{\mathbf{w}}_{k-N,k-1|k}^{j*}$  的一个近似表达式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*} \\ \hat{\mathbf{w}}_{k-N,k-1|k}^{j*} \end{bmatrix} &= \\ \left[ \bar{\mathbf{Q}}_k^j + (1 + \alpha) r^j (\zeta^j)^2 \mathbf{I} + \frac{(1 + \alpha) r^j}{\alpha} (\Phi_{Nk}^j)^T \bar{\mathbf{R}}_N^j \Phi_{Nk}^j \right]^{-1} \cdot \\ \left[ \frac{(1 + \alpha) r^j}{\alpha} (\Phi_{Nk}^j)^T \mathbf{y}_{k-N,k|k}^j + \bar{\mathbf{Q}}_k^j \bar{\mathbf{X}}_{k-N}^j \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

时域内其他时刻的状态估计值由以下公式给出:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1|k}^{j*} = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_{i|k}^{j*} + \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{w}}_{ik}^j, \quad i = k - N, \dots, k - 1. \quad (26)$$

$k + 1$ 时刻, 通过下式计算预估值  $\hat{\mathbf{x}}_{k-N+1}^j$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-N+1}^j = \mathbf{A}_{k-N} \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*} + \mathbf{B}_{k-N} \hat{\mathbf{w}}_{k-N|k}^{j*}. \quad (27)$$

权矩阵  $\hat{\mathbf{P}}_{k-N}^j$  采用鲁棒滤波算法递推得到<sup>[9]</sup>, 具体公式如下:

$$\hat{\mathbf{P}}_{k|k}^j = [(\hat{\mathbf{P}}_k^j)^{-1} + \hat{\lambda}^j \xi^2 \mathbf{I}]^{-1}, \quad (28)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^j = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{P}}_{k|k}^j \mathbf{A}_k^T + \mathbf{B}_k \hat{\mathbf{Q}}_k^j \mathbf{B}_k^T, \quad (29)$$

$$\bar{P}_{k+1}^j = P_{k+1}^j - P_{k+1}^j (C_k^j)^T R_{e,i+1}^{-1} C_k^j P_{k+1}^j. \quad (30)$$

其中:  $\hat{\lambda}^j = (1 + \hat{\alpha}) \| (R^j)^{-1} \|$ ,  $\hat{\alpha}$  为可离线调整的参数;

$$\begin{aligned} \xi &= \min_{\delta \hat{A}_k, \hat{\Delta}_k^j} \|\hat{\Phi}_k^j - \Phi_k^j\|; \\ \Phi_k^j &= [C_k^j A_k \quad C_k^j B_k]; \\ \hat{\Phi}_k^j &= [\hat{C}_k^j (A_k + \delta \hat{A}_k) \quad \hat{C}_k^j B_k]; \\ R_{e,i+1} &= \hat{R}^j + C_k^j P_{k+1}^j (C_k^j)^T; \\ \hat{C}_k^j &= (I + \hat{\Delta}_k^j) C_k^j; \\ \hat{R}^j &= R^j + (\hat{\lambda}^j)^{-1} I; \\ \hat{Q}_k^j &= (Q^{-1} + \hat{\lambda}^j \xi^2 I)^{-1}. \end{aligned}$$

### 2.2 局部估计器稳定性分析

本节对 2.1 节所提局部估计器的稳定性进行分析. 首先, 定义如下变量:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{k-i} &= A_{k-i} + \delta A_{k-i}, \\ \tilde{w}_{k-N,k-1} &= [\hat{w}_{k-N,k-2|k-1}^{j*} \quad 0]^T, \\ \tilde{F}_{Nk}^j &= \left[ I \quad \tilde{A}_{k-N} \quad \dots \quad \prod_{i=1}^N \tilde{A}_{k-i} \right]^T, \\ \tilde{H}_{Nk}^j &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{k-N} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \prod_{i=1}^{N-1} \tilde{A}_{k-i} B_{k-N} & \prod_{i=1}^{N-2} \tilde{A}_{k-i} B_{k-N+1} & \dots & B_{k-1} \end{bmatrix}, \\ \tilde{S}_{Nk}^j &= \text{diag}((1 - \gamma_{k-N}^j)I, (1 - \gamma_{k-N+1}^j)I, \dots, (1 - \gamma_k^j)I), \\ S_{Nk}^j &= \text{diag}(\gamma_{k-N}^j I, \gamma_{k-N+1}^j I, \dots, \gamma_k^j I), \\ \Delta_{Nk}^j &= \text{diag}(I + \Delta_{k-N}^j, I + \Delta_{k-N+1}^j, \dots, I + \Delta_k^j), \\ \tilde{C}_{Nk}^j &= \Delta_{Nk}^j C_{Nk}^j, f_{Nk}^j = \|F_{Nk}^j\|, c_{Nk}^j = \|C_{Nk}^j\|, \\ \hat{f}_{Nk}^j &= \max_{\delta \hat{A}_{k-N,k}^j} \|\hat{F}_{Nk}^j\|, \hat{h}_{Nk}^j = \max_{\delta \hat{A}_{k-N,k}^j} \|\hat{H}_{Nk}^j\|, \\ \bar{\rho}_A &= \sup \|\delta A_i\|^2, \rho_b = \max_i \|B_i\|^2, \\ \underline{f}_{Nk}^j &= \min \|\Delta_{Nk}^j C_{Nk}^j \tilde{F}_{Nk}^j\|^2, \tilde{\delta} = 1 + \delta, \\ \rho_1^j &= \frac{3}{r^j} \{ \tilde{\delta}^2 [(N+1)\eta_{vj}^2 + 2c_{Nk}^j (N\hat{h}_{Nk}^j \eta_w^2 + \hat{f}_{Nk}^j \eta_x^2)] + Nc_{Nk}^j h_{Nk}^j \eta_w^2 + c_{Nk}^j f_{Nk}^j \eta_x^2 \}, \\ \rho_2^j &= \frac{4}{r^j} [ \tilde{\delta}^2 (3Nc_{Nk}^j \hat{h}_{Nk}^j \eta_w^2 + c_{Nk}^j \hat{f}_{Nk}^j \eta_x^2 + 2(N+1)\eta_{vj}^2) + 2c_{Nk}^j (f_{Nk}^j \eta_x^2 + N\hat{h}_{Nk}^j \eta_w^2) ], \\ \rho_3^j &= 6\bar{\rho}_A \eta_x^2 + 12\rho_b \eta_w^2, \rho^j = 2\rho_3^j + \rho_1^j + \rho_2^j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_0^j &= \max_{x_0, \bar{x}_0^j \in X} \|x_0 - \bar{x}_0^j\|, \\ b_0^j &= \frac{2}{\alpha^j} \left[ \frac{2}{\bar{p}_0^j} (d_0^j)^2 + \rho_1^j + \rho_2^j \right], \\ \alpha^j &= \frac{1}{\bar{p}^j} + \frac{1}{r^j} \gamma_{Nk}^j, \beta^j = \max_i \frac{8}{\bar{p}_{i-N}^j} \|A_{i-N-1}\|^2, \\ \bar{p}_i^j &= \|P_i^j\|, \bar{p}^j = \max_i \bar{p}_i^j, \\ a^j &= \frac{\beta^j}{\alpha^j}, b^j = \frac{2\rho^j}{\alpha^j}. \end{aligned}$$

定义  $k$  时刻局部估计器的估计误差为

$$e_{k-N}^j = x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}^j. \quad (31)$$

作如下假设.

**假设 1**  $W$  和  $V^j$  为紧集.

**假设 2** 系统(1)是二次稳定的, 即  $\exists P > 0$ , 使得  $(A_k + \delta A_k)^T P (A_k + \delta A_k) - P < 0$ .

**假设 3** 系统为  $N$  步一致完全可观测的.

假设 1 和假设 2 保证了对于任意给定的  $x_0 \in X$ , 系统状态  $x_t$  有界, 即存在  $\eta_x$ ; 假设 3 保证了  $f_{Nk}^j > 0$ .

结合上述参数定义和假设, 可得以下结论.

**定理 2** 由式(1)和(6)表示的系统, 如果 MHE 算法的权重矩阵  $\tilde{P}_{k-N}^j$ 、 $Q$ 、 $R^j$  使得以下不等式成立:

$$a^j = \frac{1}{\alpha^j} \beta^j < 1, \quad (32)$$

则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\|e_{k-N}^j\|^2\} \leq \frac{b^j}{1 - a^j}. \quad (33)$$

其中  $E\{\|e_{k-N}^j\|^2\}$  满足不等式

$$E\{\|e_{k-N}^j\|^2\} \leq \tilde{e}_{k-N}^j, \quad k = N, N+1, \dots \quad (34)$$

$\tilde{e}_{k-N}^j$  具有如下形式:

$$\begin{cases} \tilde{e}_0^j = b_0^j, \\ \tilde{e}_k^j = a^j \tilde{e}_{k-1}^j + b^j. \end{cases} \quad (35)$$

**证明** 假设最优代价函数为  $J_k^{j*}$ , 可得

$$\begin{aligned} J_k^{j*} &\leq \|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}^j\|_{(\tilde{P}_{k-N}^j)^{-1}}^2 \|w_{k-N,k-1}\|_{(Q_N)^{-1}}^2 + \\ &\quad \max_{\delta \hat{A}_{k-N,k-1}, \hat{\Delta}_{k-N,k}^j} \|S_{Nk}^j Z_{k-N,k}^j + \tilde{S}_{Nk}^j \bar{Z}_{k-N,k}^j - \\ &\quad \hat{\Delta}_{Nk}^j C_{Nk}^j (\hat{F}_{Nk}^j x_{k-N} + \hat{H}_{Nk}^j w_{k-N,k-1})\|_{(R_{Nk}^j)^{-1}}^2, \end{aligned} \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{k-N,k}^j &= C_{Nk}^j (F_{Nk}^j \bar{x}_{k-N}^j + H_{Nk}^j \bar{w}_{k-N,k-1}), \\ Z_{k-N,k}^j &= \Delta_{Nk}^j [C_{Nk}^j (\tilde{F}_{Nk}^j x_{k-N} + \\ &\quad \tilde{H}_{Nk}^j w_{k-N,k-1}) + v_{k-N,k}]. \end{aligned}$$

根据  $\gamma_i^j$  和  $\Delta_i^j$  的性质得

$$J_k^{j*} \leq \| \mathbf{x}_{k-N} - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j \|^2_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}} + \frac{N}{q} \eta_w^2 + \rho_1^j. \quad (37)$$

定义

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*} &= \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*}, \\ \hat{\mathbf{x}}_{i+1|k}^{j*} &= (\mathbf{A}_i + \delta \mathbf{A}_i) \tilde{\mathbf{x}}_{i|k}^{j*} + \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{w}}_{i|k}^{j*}, \\ \tilde{\mathbf{y}}_{i|k}^{j*} &= (\mathbf{I} + \Delta_i^j) \mathbf{C}_i^j \tilde{\mathbf{x}}_{i|k}^{j*}, \end{aligned}$$

根据代价函数的性质可得

$$\begin{aligned} J_k^{j*} &\geq \| \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*} - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j \|^2_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}} + \\ &\sum_{i=k-N}^{k-1} \| \hat{\mathbf{w}}_{i|k}^{j*} \|^2_{\mathbf{Q}^{-1}} + \sum_{i=k-N}^k \| \mathbf{y}_{i|k}^j - \tilde{\mathbf{y}}_{i|k}^{j*} \|^2_{(\mathbf{R}^j)^{-1}}. \end{aligned} \quad (38)$$

令

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_{k-N,k}^j &= \\ \Delta_{Nk}^j \mathbf{C}_{Nk}^j (\tilde{\mathbf{F}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*} + \tilde{\mathbf{H}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{w}}_{k-N,k-1|k}^{j*}), \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=k-N}^k \| \mathbf{y}_{i|k}^j - \tilde{\mathbf{y}}_{i|k}^{j*} \|^2_{\mathbf{R}^j} &= \\ \| \mathbf{S}_{Nk}^j \mathbf{Z}_{k-N,k}^j + \tilde{\mathbf{S}}_{Nk}^j \bar{\mathbf{Z}}_{k-N,k}^j - \tilde{\mathbf{Z}}_{k-N,k}^j \|^2_{(\mathbf{R}_{Nk}^j)^{-1}}. \end{aligned}$$

考虑式子

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}_{Nk}^j \Delta_{Nk}^j \mathbf{C}_{Nk}^j \tilde{\mathbf{F}}_{Nk}^j (\mathbf{x}_{k-N} - \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*}) = \\ &\mathbf{S}_{Nk}^j \mathbf{Z}_{k-N,k}^j + \tilde{\mathbf{S}}_{Nk}^j \bar{\mathbf{Z}}_{k-N,k}^j - \tilde{\mathbf{Z}}_{k-N,k}^j + \\ &\Delta_{Nk}^j \mathbf{C}_{Nk}^j \tilde{\mathbf{H}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{w}}_{k-N,k-1|k}^{j*} + \\ &\tilde{\mathbf{S}}_{Nk}^j \Delta_{Nk}^j \mathbf{C}_{Nk}^j \tilde{\mathbf{F}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*} - \\ &\mathbf{S}_{Nk}^j \Delta_{Nk}^j (\mathbf{C}_{Nk}^j \tilde{\mathbf{H}}_{Nk}^j \mathbf{w}_{k-N,k-1} + \\ &\mathbf{v}_{k-N,k}) - \tilde{\mathbf{S}}_{Nk}^j \bar{\mathbf{Z}}_{k-N,k}^j, \end{aligned}$$

则由和函数的性质可得

$$\begin{aligned} &\| \Delta_{Nk}^j \mathbf{C}_{Nk}^j \tilde{\mathbf{F}}_{Nk}^j \mathbf{e}_{k-N}^j \|^2_{\mathbf{S}_{Nk}^j (\mathbf{R}_{Nk}^j)^{-1} \mathbf{S}_{Nk}^j} \leq \\ &2 \sum_{i=k-N}^k \| \mathbf{y}_{i|k}^j - \tilde{\mathbf{y}}_{i|k}^{j*} \|^2_{(\mathbf{R}^j)^{-1}} + \\ &2 \| \Delta_{Nk}^j \mathbf{C}_{Nk}^j \tilde{\mathbf{H}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{w}}_{k-N,k-1|k}^{j*} + \\ &\tilde{\mathbf{S}}_{Nk}^j \Delta_{Nk}^j \mathbf{C}_{Nk}^j \tilde{\mathbf{F}}_{Nk}^j \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*} - \\ &\mathbf{S}_{Nk}^j \Delta_{Nk}^j (\mathbf{C}_{Nk}^j \tilde{\mathbf{H}}_{Nk}^j \mathbf{w}_{k-N,k-1} + \mathbf{v}_{k-N,k}) - \\ &\tilde{\mathbf{S}}_{Nk}^j \bar{\mathbf{Z}}_{k-N,k}^j \|^2_{(\mathbf{R}_{Nk}^j)^{-1}}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k-N}^k \| \mathbf{y}_{i|k}^j - \tilde{\mathbf{y}}_{i|k}^{j*} \|^2_{(\mathbf{R}^j)^{-1}} \geq \\ &\frac{1}{2} f_{Nk}^j \| \mathbf{e}_{k-N}^j \|^2_{\mathbf{S}_{Nk}^j (\mathbf{R}_{Nk}^j)^{-1} \mathbf{S}_{Nk}^j} - \rho_2^j. \end{aligned} \quad (39)$$

同理,对  $\| \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*} - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j \|^2_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}}$  项作上述分析可得

$$\begin{aligned} &\| \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}^{j*} - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j \|^2_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}} \geq \\ &\frac{1}{2} \| \mathbf{e}_{k-N}^j \|^2_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}} - \| \mathbf{x}_{k-N} - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j \|^2_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}}. \end{aligned} \quad (40)$$

当  $k = N$  时,联立式(37)~(40)得

$$E\{ \| \mathbf{e}_0^j \|^2 \} \leq \frac{2}{\alpha^j} \left[ \frac{2}{\bar{\rho}_0^j} (d_0^j)^2 + \rho_1^j + \rho_2^j \right] = b_0^j. \quad (41)$$

当  $k > N$  时,  $\mathbf{x}_{k-N} - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j$  可表示为

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_{k-N-1} \mathbf{e}_{k-N-1}^j + \delta \mathbf{A}_{k-N-1} \mathbf{x}_{k-N-1} + \\ &\mathbf{B}_{k-N-1} (\mathbf{w}_{k-N-1} - \hat{\mathbf{w}}_{k-N-1|k-1}^j). \end{aligned}$$

结合参数定义可得

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{x}_{k-N} - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}^j \|^2_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}} \leq \\ &2 \| \mathbf{A}_{k-N-1} \mathbf{e}_{k-N-1}^j \|^2_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}} + \rho_3^j. \end{aligned} \quad (42)$$

联立式(37)~(40)、(42)可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \| \mathbf{e}_{k-N}^j \|^2_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}} + \frac{1}{2} f_{Nk}^j \| \mathbf{e}_{k-N}^j \|^2_{\mathbf{S}_{Nk}^j (\mathbf{R}_{Nk}^j)^{-1} \mathbf{S}_{Nk}^j} \leq \\ &4 \| \mathbf{A}_{k-N-1} \mathbf{e}_{k-N-1}^j \|^2_{(\bar{\mathbf{P}}_{k-N}^j)^{-1}} + \rho^j. \end{aligned} \quad (43)$$

对式(43)两边求期望,并结合前文的参数定义可得

$$E\{ \| \mathbf{e}_{k-N}^j \|^2 \} \leq a^j E\{ \| \mathbf{e}_{k-N-1}^j \|^2 \} + b^j. \quad (44)$$

由式(41)和(44),式(34)和(35)得证.

根据式(35),  $\tilde{\mathbf{e}}_k^j$  可写成以下形式:

$$\tilde{\mathbf{e}}_k^j = (a^j)^k \tilde{\mathbf{e}}_0^j + b^j \sum_{i=0}^{k-1} (a^j)^i. \quad (45)$$

显然,如果式(32)成立,则式(33)成立.  $\square$

### 3 CI融合估计器

局部估计器将  $\hat{\mathbf{x}}_{k-N,k|k}^{j*}$  和  $\bar{\mathbf{P}}_{k-N,k}^j$  发送到融合中心,根据CI融合准则进行融合估计,具体公式如下:

$$\hat{\mathbf{x}}_{i|k}^* = \bar{\mathbf{P}}_i \sum_{j=1}^L w_i^j (\bar{\mathbf{P}}_i^j)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{i|k}^{j*}, \quad (46)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_i^{-1} = \sum_{j=1}^L w_i^j (\bar{\mathbf{P}}_i^j)^{-1}. \quad (47)$$

其中:  $0 \leq w_i^j \leq 1, \sum_{j=1}^L w_i^j = 1, w_i^j$  由以下公式得到:

$$\min_{w_i^j \in [0,1], \sum_{j=1}^L w_i^j = 1} \text{tr}\{ \bar{\mathbf{P}}_i \}. \quad (48)$$

### 4 仿真分析

以运动体状态估计为例验证算法的有效性,选取运动体的三维位置和速度构成状态向量,可将状态方程写成式(1)所示的形式,具体系数矩阵如下:

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & T \cdot \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} 0.5T^2 \cdot \mathbf{I}_3 \\ T \cdot \mathbf{I}_3 \end{bmatrix},$$

$$\delta \mathbf{A}_k = M_A \Lambda_k E_A, M_A = E_A = \frac{\sqrt{2}}{10} \mathbf{I}_6,$$

$$\mathbf{C}_k^1 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0], \mathbf{C}_k^2 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1].$$

其中:  $T$  为采样周期, 仿真中取  $T = 0.1$ ;  $\|\Lambda_k\| \leq 1$ ; 系统噪声和观测噪声的协方差矩阵分别为  $\mathbf{Q} = \sigma_w^2 \mathbf{I}$  和  $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}^2 = \sigma_v^2 \mathbf{I}$ ; 系统初始状态和初始权重矩阵分别为  $\bar{\mathbf{x}}_0 = [40 \ 40 \ 40 \ -4 \ -4 \ -4]^T$ ,  $\bar{\mathbf{P}}_0^j = \text{diag}(\sigma_x^2 \mathbf{I}, 0.1\sigma_x^2 \mathbf{I})$ ; 取  $\sigma_w = 0.5, \sigma_v = 0.6, \sigma_x = 0.5$ .

采用均方根误差 (root mean square errors, RMSE) 描述估计算法的性能, 定义如下:

$$\text{RMSE}(k) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} \|e_{k,j}\|^2}.$$

其中:  $\tau$  表示仿真次数,  $e_{k,j}$  表示第  $j$  次仿真中  $k$  时刻的估计误差.

首先, 取丢包概率为 0.1, 量化密度为 0.9, 进行 100 次仿真, 计算 RMSE 来验证算法的性能. 图 2 中, 算法 1~算法 3 分别为文献 [11]~文献 [13] 中的分布式算法, 算法 4 为本文所提分布式 MHE 方法. 不难看出, 本文所提算法的性能优于其他 3 种方法. 另外, 图 3 中将分布式 MHE 与集中式 MHE 的性能进行了对比, 可知分布式 MHE 具有更好的估计精度.

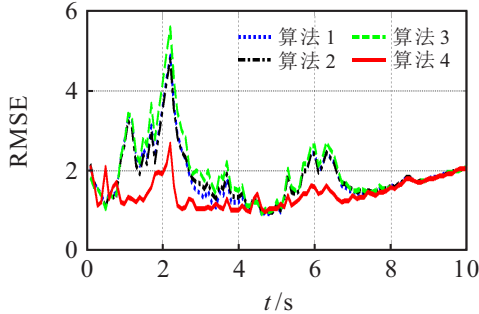


图 2 算法性能比较

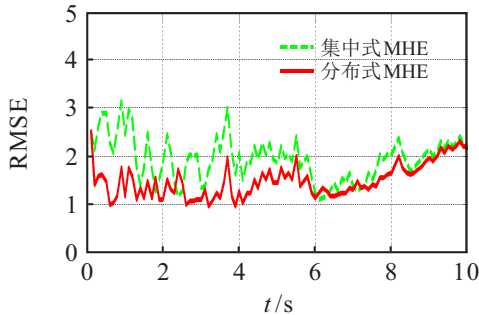


图 3 集中式与分布式 MHE 算法性能对比

图 4 利用局部估计器 1, 研究补偿策略对估计性能的影响. 预测补偿策略下的估计精度高于输入保持策略下的估计精度, 说明基于预测值的补偿策略能够更好地减弱数据包丢失对状态估计的影响.

图 5 利用局部估计器 1, 分析丢包率对估计精度

的影响, 可以看出, 丢包概率为 0.05、0.10 和 0.15 时, 估计精度与无丢包的情况差别不大, 说明本文提出的算法能够有效地减小丢包对状态估计的影响.

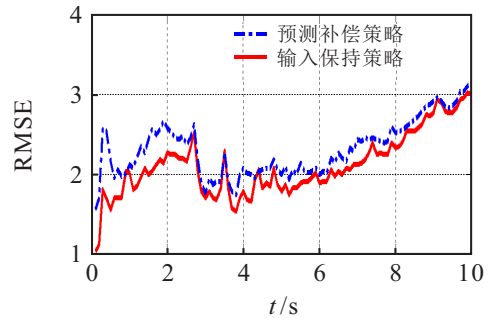


图 4 补偿策略性能对比

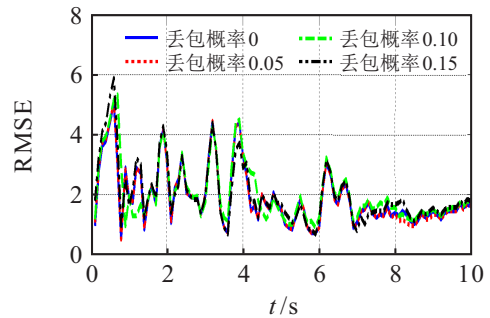


图 5 丢包概率对估计器的影响

图 6 给出了不同量化密度下的状态估计精度. 随着  $\sigma$  的减小, RMSE 增大, 且  $\rho$  越小, 增大的趋势越明显, 说明算法对量化误差的处理能力有一定的限度, 在实际应用中, 需要通过优化网络协议和增加带宽等手段来控制量化误差.

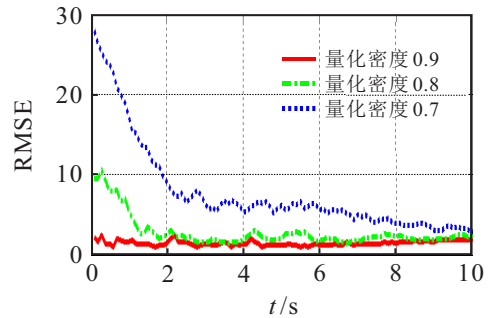


图 6 量化密度对估计器的影响

### 5 结论

本文针对丢包和量化约束下的随机不确定系统提出了一种分布式滚动时域估计方法. 采用预测补偿策略处理丢包现象, 考虑模型不确定性和量化误差影响最严重的情况, 通过求解固定时域内的 min-max 问题得到局部估计器, 推导了局部估计误差范数平方期望的上界函数和收敛条件. 采用 CI 融合准则进行加权融合, 得到融合估计值. 仿真结果表明, 本文所提算法具有较好的估计性能.

## 参考文献(References)

- [1] Zhang D, Shi P, Wang Q G, et al. Analysis and synthesis of networked control systems: A survey of recent advances and challenges[J]. ISA Transactions, 2017, 66: 376-392.
- [2] Liang X, Xu J J. Control for networked control systems with remote and local controllers over unreliable communication channel[J]. Automatica, 2018, 98: 86-94.
- [3] Sun S L, Lin H L, Ma J, et al. Multi-sensor distributed fusion estimation with applications in networked systems: A review paper[J]. Information Fusion, 2017, 38: 122-134.
- [4] Hu J, Wang Z D, Chen D Y, et al. Estimation, filtering and fusion for networked systems with network-induced phenomena: New progress and prospects[J]. Information Fusion, 2016, 31: 65-75.
- [5] Montestruque L A, Antsaklis P J. Static and dynamic quantization in mode based networked control systems[J]. International Journal of Control, 2007, 80(1): 87-101.
- [6] Sun S L, Xie L H, Xiao W D, et al. Optimal linear estimation for systems with multiple packet dropouts[J]. Automatica, 2008, 44: 1333-1342.
- [7] 赵国荣, 韩旭, 杜闻捷, 等. 具有传感器增益退化的不确定系统融合估计器[J]. 控制与决策, 2016, 31(8): 1413-1418.  
(Zhao G R, Han X, Du W J, et al. Fusion estimator with stochastic sensor gain degradation for uncertain systems[J]. Control and Decision, 2016, 31(8): 1413-1418.)
- [8] 郭戈, 王宝凤. 多丢包不确定离散系统的鲁棒 Kalman 滤波[J]. 自动化学报, 2010, 36(5): 767-772.  
(Guo G, Wang B F. Robust kalman filtering for uncertain discrete-time systems with multiple packet dropouts[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(5): 767-772.)
- [9] 潘爽, 赵国荣, 高超, 等. 测量数据丢失的随机不确定系统鲁棒滤波递推算法[J]. 控制与决策, 2011, 26(2): 280-284.  
(Pan S, Zhao G R, Gao C, et al. Robust filter recursive algorithm for stochastic uncertain system with missing measurements[J]. Control and Decision, 2011, 26(2): 280-284.)
- [10] Shen B, Wang Z D, Shu H S, et al. Robust  $H_\infty$  finite-horizon filtering with randomly occurred nonlinearities and quantization effect[J]. Automatica, 2010, 46: 1743-1751.
- [11] Xing Z R, Xia Y Q. Distributed federated Kalman filter fusion over multi-sensor unreliable networked systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers, 2016, 63(10): 1714-1725.
- [12] Ding J, Sun S L, Ma J, et al. Fusion estimation for multi-sensor networked systems with packet loss compensation[J]. Information Fusion, 2019, 45: 138-149.
- [13] Tian T, Sun S L, Li N. Multi-sensor information fusion estimators for stochastic uncertain systems with correlated noises[J]. Information Fusion, 2016, 27: 126-137.
- [14] Rao C V, Rawlings J B, Lee J H. Constrained linear state estimation-a moving horizon approach[J]. Automatica, 2001, 37: 1619-1628.
- [15] 赵海艳, 陈虹. 噪声方差不确定约束系统的滚动时域估计[J]. 控制与决策, 2008, 23(2): 217-220.  
(Zhao H Y, Chen H. Moving horizon estimation approach to constrained systems with uncertain noise covariance[J]. Control and Decision, 2008, 23(2): 217-220.)
- [16] 谢澜涛, 谢磊, 苏宏业. 不确定系统的鲁棒与随机模型预测控制算法比较研究[J]. 自动化学报, 2017, 43(6): 969-992.  
(Xie L T, Xie L, Su H Y. A comparative study on algorithms of robust and stochastic MPC for uncertain systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2017, 43(6): 969-992.)
- [17] Fu M Y, Xie L H. The sector bound approach to quantized feedback control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(11): 1698-1711.
- [18] Sayed A H. A framework for state-space estimation with uncertain models[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(7): 998-1013.

## 作者简介

刘帅(1990-), 男, 博士生, 从事组网导航技术的研究, E-mail: 15165714808@163.com;

赵国荣(1964-), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器导航与控制等研究, E-mail: GRZhao6881@163.com;

曾宾(1989-), 男, 博士生, 从事飞行器综合导航技术的研究, E-mail: 363929893@qq.com;

高超(1985-), 男, 工程师, 博士, 从事组网导航技术的研究, E-mail: gaochao.shd@163.com.

(责任编辑: 齐 霖)