

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于弱关联的自适应高维多目标进化算法

董明刚, 曾慧斌, 敬超

引用本文:

董明刚, 曾慧斌, 敬超. 基于弱关联的自适应高维多目标进化算法[J]. *控制与决策*, 2021, 36(8): 1804–1814.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1723>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### [自适应Jaya算法求解多目标柔性车间绿色调度问题](#)

Multi-objective flexible job shop green scheduling problem with self-adaptive Jaya algorithm

*控制与决策*. 2021, 36(7): 1714–1722 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1773>

### [基于正态云模型的状态转移算法求解多目标柔性作业车间调度问题](#)

State transition algorithm based on normal cloud model for solving multi-objective flexible job shop scheduling problem

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1181–1190 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1233>

### [基于向量角分解的高维多目标进化算法](#)

Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition

*控制与决策*. 2021, 36(3): 761–768 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0925>

### [基于分解的多目标多因子进化算法](#)

A multiobjective multifactorial evolutionary algorithm based on decomposition

*控制与决策*. 2021, 36(3): 637–644 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0525>

### [基于改进多目标优化算法的分布式数据中心负载调度](#)

Multi-objective optimization of energy and performance management in distributed data centers

*控制与决策*. 2021, 36(1): 159–165 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0702>

# 基于弱关联的自适应高维多目标进化算法

董明刚<sup>1,2</sup>, 曾慧斌<sup>1</sup>, 敬超<sup>1,2†</sup>

(1. 桂林理工大学信息科学与工程学院, 广西 桂林 541004; 2. 桂林理工大学  
广西嵌入式技术与智能系统重点实验室, 广西 桂林 541004)

**摘要:** 对现有的分解方法进行改进, 提出一种基于弱关联的自适应高维多目标进化算法(WAEA). 首先, 提出一种基于夹角子空间的关联策略, 使得一个解能与多个参考向量相关联; 其次, 提出弱关联概念, 并基于此概念设计双模态标量函数, 使算法能够更好地处理复杂PF问题, 此外, 算法通过检测参考向量子空间内解的数量, 自适应调整惩罚参数大小, 使其能有效处理各类多目标问题; 最后, 将WAEA算法与8种代表性的高维多目标算法进行比较, 实验结果表明WAEA算法在处理复杂Pareto前沿的高维多目标问题时能更好地平衡Pareto最优解的收敛性与多样性.

**关键词:** 高维多目标优化; 进化算法; 弱关联; 分解; 自适应参数

中图分类号: TP18 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2019.1723

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 董明刚, 曾慧斌, 敬超. 基于弱关联的自适应高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2021, 36(8): 1804-1814.

## A weak association-based adaptive evolutionary algorithm for many-objective optimization

DONG Ming-gang<sup>1,2</sup>, ZENG Hui-bin<sup>1</sup>, JING Chao<sup>1,2†</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China; 2. Guangxi Key Laboratory of Embedded Technology and Intelligent System, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

**Abstract:** This paper proposes a weak association-based adaptive evolutionary algorithm(WAEA) on many-objective optimization by improving the previous decomposition approaches. Firstly, an association strategy has been presented based on the angle subspace, which can make a solution associated with multiple reference vectors. Then, the idea of weak association has been employed to design a bimodal scalar function which improves the capability of dealing with the complex PF problem. Moreover, through the detection of the number of solutions in the reference vector subspace, the proposed algorithm is capable of doing self-adaption to adjust the size of penalty parameters to efficiently deal with multi-type issue on many-objective optimization. Finally, the proposed WAEA is compared with eight representative many-objective based algorithms, respectively. The results show that the WAEA has the capability of gaining better balance of the Pareto optimum in convergence and diversity while dealing with high-dimensional many-objective problems.

**Keywords:** many-objective optimization; evolutionary algorithm; weak association; decomposition; adaptive parameters

## 0 引言

多目标优化问题(multi-objective optimization problems, MOPs)是现实生活中各个领域普遍存在的问题<sup>[1]</sup>. 这类问题的主要优化目的是使得多个目标尽可能最佳, 求解MOPs通常会得到一组权衡不同目标

的解集, 称为Pareto最优解集.

多目标进化算法(multi-objective evolutionary algorithms, MOEAs)是解决MOPs的主要方法之一, 尤其是当MOPs具有2个或3个目标时MOEAs具有良好的性能. 但是, 当MOEAs被用于处理具有3个以

收稿日期: 2019-12-09; 修回日期: 2020-03-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61563012, 61802085); 广西自然科学基金项目(2014GXNSFAA118371, 2015GXNSFBA139260); 广西嵌入式技术与智能系统重点实验室基金项目(2018A-04).

责任编辑: 巩敦卫.

†通讯作者. E-mail: jingchao@glut.edu.cn.

上目标的MOPs时,常常会遇到很大的挑战,这类问题被Farina等人命名为高维多目标优化问题(many-objective problems, MaOPs)<sup>[2-3]</sup>. 目标数量多且具有冲突使得其求解难度大幅提高. 如何有效地处理MaOPs已经成为目前进化优化领域最具挑战的问题之一<sup>[4]</sup>.

MaOPs给传统的多目标进化算法带来了巨大挑战,尤其是那些依赖支配原则的算法. 第1个难点在于Pareto支配的选择策略在MaOPs上失效. 主要原因是优化目标达到3个以上时,非支配解的数量以指数形式爆炸增长,难以有效地分辨出解的优劣关系,大大降低了算法的寻优性能. 第2个困难在于多样性的维持,在MaOPs的目标空间中,解往往是稀疏的,很难使用现有的技术(如拥挤距离、 $k$ 最近距离等)来估计解的相似性. 第3,变异算子可能在MaOPs上失去作用,因为在高维目标空间中后代可能远离双亲.

为解决以上难点,目前的高维多目标进化算法主要分为3类. 第1类为修改传统的Pareto支配方法. 它们通过改进Pareto支配关系来达到增大选择压力的目的. 例如基于超网格支配关系的 $\varepsilon$ -MOEA<sup>[5]</sup>和GrEA<sup>[6]</sup>,以及基于参考向量支配关系的 $\theta$ -DEA<sup>[7]</sup>. 第2类为基于性能指标的算法,这类算法通过计算种群在某性能指标上的值来判断解的质量,进而选出种群中具有最好性能指标值的那一部分解. 例如利用超体积(hyper volume, HV)<sup>[8]</sup>指标作为选择标准的HypE<sup>[9]</sup>算法,利用反向世代距离(inverse generational distance, IGD)<sup>[10]</sup>指标的MaOEA/IGD<sup>[11]</sup>算法. 第3类为基于分解的算法,这类算法采用分治的思想,利用参考向量将原本复杂的多目标问题分解成多个较为简单的子问题进行求解. 其中最具代表性的算法为Zhang等<sup>[12]</sup>提出的MOEA/D. 由于没有使用传统Pareto支配关系来区分解的质量,基于分解的进化算法在运行效率和收敛速度上有了明显的提升,并且在目标空间中均匀分布的参考向量也有助于保持种群良好的多样性. 然而,随着优化问题目标函数非线性越来越严重,目标空间越来越复杂,其具有目标个数多、Pareto前沿(pareto front, PF)形状复杂的特点. 面对这类问题,使用基于分解的算法处理仍然存在一些挑战. 如:1)参考向量仅考虑与其相关联的解的信息,但是在种群进化过程中,不是所有的参考向量都有解与其相关联,可能存在着分布不均匀的情况. 有些参考向量无关联解,无法筛选出精英解,给维持种群多样性带来很大的挑战. 2)基于分解的算法使用标量函数将多个目标转化为单目标优化问题求解,标量函数往往带有参数,参数的大小往往直接影响着解的评

价. 不同类型的MOPs,通常会有不同的最佳参数,不合适的参数会严重影响算法性能. 如何在标量函数中设定合适的参数已成为急需解决的问题.

针对上述问题,本文对现有的分解方法进行改进,提出一种弱关联的自适应进化算法(weak association-based adaptive evolutionary algorithm, WAEA). 首先,打破以往一个解只能关联一个参考向量的限定,提出一种基于角度子空间的关联策略,以便更好地维持种群多样性;其次,提出弱关联概念并基于此概念设计出双模态标量函数,使得算法能够更好地处理复杂PF问题,平衡种群的多样性与收敛性;最后,设计自适应参数,动态地调整惩罚参数的大小,有利于加强算法普适性. 将WAEA算法与8种代表性的高维多目标算法进行比较,实验结果表明:在处理复杂Pareto前沿的高维多目标优化问题时,WAEA算法能更好地平衡Pareto最优解的收敛性与多样性,面对不同特性的优化问题时也能表现出良好的性能.

## 1 相关工作

基于分解算法的分解策略主要由以下4个步骤组成:1)生成参考向量;2)种群中的解与附近参考向量相关联;3)标量函数基于参考向量对其关联解进行评价;4)基于评价结果筛选出种群中的高质量解保留下来. 参考向量和标量函数直接关系着解的评价与选择,对算法性能产生重大影响,所以在这部分主要分别对均匀参考向量的生成方法和标量函数进行介绍.

### 1.1 参考向量生成方法

为了确保所得解的多样性,在缺少任何偏好信息的情况下,Das等<sup>[13]</sup>提出的系统方法被广泛应用于基于分解的进化算法中,生成均匀分布的参考点. 为了避免 $M$ 相对较大时产生一个巨大的种群,通常会采用两层参考点机制,将参考点分为边界层和内部层. 该方法的详细内容可参考文献[7,14].

### 1.2 PBI标量函数

标量函数结合参考向量将多目标转化为单目标优化问题求解. 目前在高维多目标优化领域广泛使用的是惩罚边界交叉法(penalty boundary intersection approach, PBI)<sup>[12]</sup>.

PBI通过惩罚函数来构造标量函数. 假设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\}$ 为某参考向量, $S$ 为种群中一个解. $Z^* = \{z_1^*, z_2^*, \dots, z_M^*\}$ 由进化过程中各个目标 $f_i$ 上的最小值构成, $\theta$ 为惩罚参数,则PBI聚集函数具体可表示成

$$\min f^{\text{PBI}}(s||V, Z^*) = d_1 + \theta d_2. \quad (1)$$

其中

$$d_1 = \frac{|(f(s) - Z^*)^T V|}{\|V\|}, \quad (2)$$

$$d_2 = \left\| f(s) - Z^* - d_1 \frac{V}{\|V\|} \right\|. \quad (3)$$

PBI有两类距离,  $d_1$  代表收敛性, 其通过计算目标空间上向量  $f(s) - Z^*$  在参考向量方向上的投影距离得到;  $d_2$  代表着多样性, 计算的是  $f(s) - Z^*$  到参考向量的垂直距离. PBI法的实质是通过参数  $\theta$  调节  $d_1$  和  $d_2$  的比重, 以达到平衡种群的收敛性和多样性的目的,  $\theta$  的大小成为影响算法性能的重要因素.

## 2 WAEA算法设计

本节首先介绍WAEA算法设计的总体框架, 然后分别介绍算法的核心部分基于角度子空间的关联策略、基于弱关联的参考向量指导选择策略、自适应的惩罚参数, 最后对所提出算法进行复杂度分析.

### 2.1 WAEA算法总体框架

**算法1** WAEA算法的总体框架.

输入: 最大评价次数  $t_{\max}$ , 种群大小  $N$ ;

输出: 最终种群  $P_{t_{\max}}$ .

step 1: 初始化, 随机生成  $N$  个解的初始种群  $P_0$ , 生成参考向量集  $V = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$ ;

step 2:  $\alpha = \text{median} \left\{ \min_{i \in \{1, 2, \dots, N\}} \arccos(V_i, V_j) \right\}$ ;

step 3: while  $t \leq t_{\max}$  do

step 4:  $Q_t =$  交叉和变异 ( $P_t$ );

step 5:  $(P_t) = P_t \cup Q_t$ ;

step 6: 目标空间归一化 ( $P_t$ );

step 7: 关联操作 ( $V, P_t, \alpha$ );

step 8: for each  $V_i \in V$ ; //遍历每个条参考向量, 计算每个解在该参考向量上的适应度值;

step 9:  $s^* =$  基于弱关联的参考向量指导选择策略 ( $V_i, P_t$ );

step 10:  $P_{t+1} = P_{t+1} \cup s^*$ ;

step 11: end for

step 12:  $t = t + 1$ ;

step 13: end while

算法1描述了所提出的WAEA算法的主框架, WAEA使用1.1节所提出的方法生成均匀分布的参考向量作为输入. 用模拟二进制交叉(SBX)和多项式变异<sup>[15]</sup>生成子代解. WAEA遍历每个参考向量, 每个参考向量从当前种群中选择一个高质量解进行遗传操作.

### 2.2 基于角度子空间的关联策略

为了处理目标空间标度差过大或高维多目标问题, 在空间划分之前, 目标空间中所有解应根据进化

过程中所得到的理想点和最差点进行归一化操作.

**定义1** 子空间生境角度: 假设  $\{V_1, V_2, \dots, V_N\}$  为  $N$  个单位参考向量, 其子空间生境角度值为各参考向量间最小夹角的中值, 即

$$\alpha = \text{median} \left\{ \min_{j \in \{1, 2, \dots, N\}} \arccos(V_i, V_j) \right\}. \quad (4)$$

**定义2** 角度子空间: 假设  $\{V_1, V_2, \dots, V_N\}$  为  $N$  个单位参考向量,  $\alpha$  为子空间生境角度, 其任意一个参考向量  $V_i$  所关联的角度子空间定义为

$$C_i = \left\{ \sigma \in R^m \mid \langle \sigma, V_i \rangle = \frac{\alpha}{2}, \forall i \in 1, 2, \dots, N \right\}. \quad (5)$$

其中  $\sigma$  为角度子空间边界向量,  $\langle \sigma, V_i \rangle$  为角度子空间边界与单位向量之间的锐角.

**定义3** 关联解: 在目标空间中, 如果解  $s$  在参考向量  $V_i$  的子空间范围  $C_i$  内, 则  $s$  即为参考向量  $V_i$  的关联解. 参考向量  $V_i$  的关联解集记为  $P_{V_i}$ .

根据定义2, 可以将子空间看成归一化后的目标空间中以原点为端点、参考向量为中心、 $\alpha$  为角度的一个夹角空间. 子空间的生成如图1所示. 虽然之前也有类似的工作, 如Wang等<sup>[16]</sup>提出的锥形空间, 然而他们所提到的参考向量  $V_i$  形成子空间的顶角, 是通过计算  $V_i$  与周围最近的参考向量的夹角取均值后得到的, 顶角大小会发生变化, 不同的参考向量会形成不同大小子空间; 而本文的子空间顶角是通过计算整个参考向量集合的各个向量夹角值, 取中间值作为子空间顶角, 且顶角恒定, 子空间大小也相同.

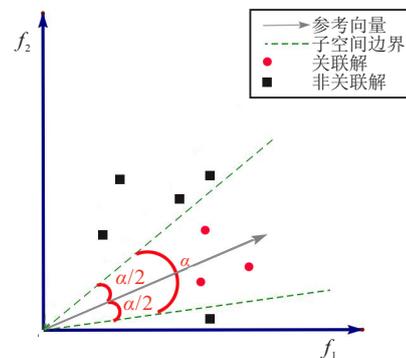


图1 二维目标空间中子空间生成

每个参考向量都使用这种方法生成子空间后, 原来的目标空间就划分了各个子空间. 子空间划分完毕后每个参考向量都有了大小一致的生境范围(边界参考向量除外), 将范围内的解与该参考向量形成一种关联状态.

以往的关联策略往往是令解找到离其最近的参考向量并且关联起来. 为衡量解到参考向量距离的远近, 各类算法使用了不同的方式. 例如NSGA-III<sup>[14]</sup>方法使用了垂直距离; RVEA<sup>[17]</sup>算法使用了角度距离来计算解与参考向量间的夹角. 它们的共同之处在

于一个解只能与一个参考向量相关联. 这种严格的关联策略, 容易导致部分参考向量无关联解的现象, 不利于精英解的选择.

本文使用基于角度子空间的关联策略, 落入参考向量的角度子空间内的解即为该参考向量的关联解. 由于角度子空间可能存在空间范围重叠的情况, 当解存在于子空间重叠区域时, 该解可同时为多个参考向量的关联解. 如图2所示, 解A、B同时在参考向量 $V_1, V_2$ 的子空间范围内, 所以A和B既是 $V_1$ 也是 $V_2$ 的关联解. 这种多关联方式, 使得解能够与附近的多个参考向量相关联, 大大提高了参考向量获得关联解的概率, 有利于提高维持种群多样性. 并且, 本文使用的关联策略相比之前的方法更简单高效.

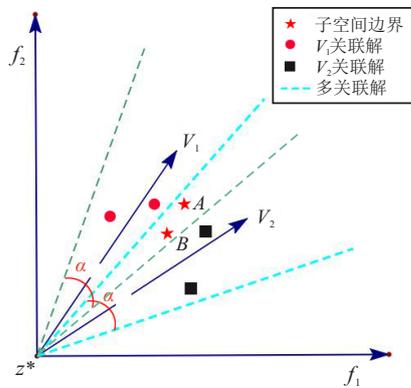


图2 二维目标空间中多关联解

### 2.3 基于弱关联的参考向量指导选择策略

与RVEA算法中的参考向量指导选择策略类似, 使用参考向量去评价选择精英解. 为了更好地适应在复杂情况下使用, 本文所提出的参考向量指导选择策略在此基础上进行了较大的改进: 提出弱关联概念, 以及基于弱关联概念设计双模态标量函数.

#### 2.3.1 弱关联概念

在前面阶段, 通过目标空间划分, 将当前种群中的解与各个参考向量关联在一起. 每个参考向量将当前种群划分为关联解集和非关联解集两部分. 接下来遍历每个参考向量, 参考向量从当前种群选择精英解进行遗传操作. 为了避免选择带来的多样性的丢失, 这里使用了一种弱关联选择策略, 其基本思想为: 计算当前种群中每个解在该参考向量的适应度值, 对其中关联解施行生境保护措施.

弱关联选择策略扩大了参考向量的选择范围. 以往的选择策略参考向量只评价其关联解, 从中选择出精英解; 弱关联选择策略在环境选择阶段, 每个参考向量同时评价种群中所有的解, 精英解的选择范围为整个种群. 当然在评价过程中, 对于其关联解, 会进行适当的生境保护, 以维持关联解的传统优势.

#### 2.3.2 双模态标量函数

在基于分解的算法中, 标量函数在平衡算法的多样性和收敛性方面起着至关重要的作用. 为了更好地适应基于弱关联的全局选择策略, 本文基于弱关联概念设计了双模态标量函数.

**定义4** 角度比值因子: 假设 $V_i$ 为参考向量,  $\alpha$ 为子空间生境角度,  $s$ 为种群中的一个解,  $s$ 与 $V_i$ 之间的夹角(锐角)为 $\text{Angle}(s, V_i)$ , 那么角度比值因子 $R(s, V_i)$ 定义如下:

$$\text{Angle}(s, V_i) = \arccos\left(\frac{f(s) \cdot V_i}{\|f(s)\|}\right). \quad (6)$$

$$R(s, V_i) = \begin{cases} 1, & \text{Angle}(s, V_i) \leq \alpha; \\ \sqrt{\frac{\text{Angle}(s, V_i)}{\alpha}}, & \text{Angle}(s, V_i) > \alpha. \end{cases} \quad (7)$$

**定义5** 双模态标量函数(bimodal scalarizing function, BSF): 多目标优化问题, 利用BSF函数将其转化为单目标优化问题的方法如下:

$$\min F(s, V_i) = \begin{cases} \text{con}(s) + \theta d_2(s, V_i), & s \in P_{V_i}; \\ (\text{con}(s) + \theta d_2(s, V_i))R(s, V_i), & s \notin P_{V_i}. \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\text{con}(s) = \sum_{i=1}^m f_i(s), \quad (9)$$

$\text{con}(s)$ 为 $s$ 各个维度的目标值之和;  $d_2(s, V_i)$ 为 $s$ 到参考向量 $V_i$ 的垂直距离, 如式(3)所示. 关联解的 $R$ 值为1, 非关联解的 $R$ 值等于解与参考向量的夹角与生境角度比值的平方根, 因生境角度 $\alpha$ 一定, 所以解与参考向量夹角越大,  $R$ 越大. 其中 $\text{con}$ 用来衡量解的收敛性, 垂直距离 $d_2$ 和角度比值因子 $R$ 用来衡量解的多样性, 惩罚参数 $\theta$ 用来调节收敛性和多样性的平衡.

本文使用了角度比值因子, 降低了惩罚的力度. 通过综合垂直距离和角度距离, 能够更好地衡量高维空间中种群的多样性.

与PBI标量函数相比, 本标量函数最大的改进在于衡量收敛性方式的改变以及对非关联解使用了双重多样性惩罚机制. PBI衡量一个解的收敛性是通过计算解到参考向量的投影距离 $d_1$ , 但是本文使用的参考向量指导选择策略, 需要同时衡量解在不同参考向量上的收敛性. 因 $d_1$ 会随着参考向量的不同而发生变化, 继续使用 $d_1$ 会出现解 $s$ 在某个参考向量上收敛度高而在别的参考向量上收敛度变差的情况, 无法准确衡量解的收敛程度. 而使用 $\text{con}(s)$ 则避免了这种现象. 另外BSF对非关联解使用双重多样性惩罚

机制,第1重多样性惩罚为垂直距离 $d_2$ ,第2重为角度比值因子 $R$ . 标量函数综合考虑垂直距离和角度这两类多样性指标,对非关联解使用了更严格的评价标准,达到保护生境内关联解的目的.

BSF函数与PBI函数的等高线对比如图3所示,BSF等高线是由关联解与非关联解两段组成,在角度子空间内的关联解的等高线的斜率比PBI的更大,解的可更新区域的面积更大,更有利于种群靠近理想PF;而对于子空间外的非关联解,由于使用双重惩罚机制更好地保证了多样性,更新区域面积比PBI更小,可以更新的解离权向量越近,越有利于种群的多样性. 简单说来,与PBI相比,使用双模态标量函数对关联解更重视收敛性,对非关联解更重视多样性.

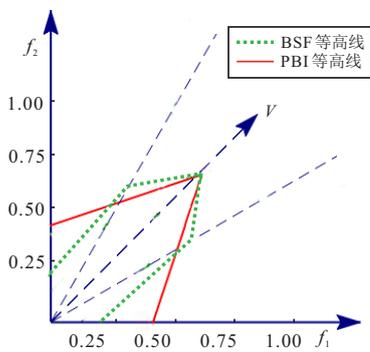


图3 BSF和PBI等高线对比

### 2.3.3 与RVEA的区别

1) 选择范围不同. 本文使用基于弱关联的参考向量指导策略(见算法2),扩大参考向量的选择范围,而RVEA的参考向量仅局限于从其关联解中选择出精英解.

**算法2** 基于弱关联的参考向量指导选择策略.

输入: 种群 $P_t$ ,参考向量 $V_i$ ;

输出: 精英解 $s^*$ .

step 1: for each  $s \in P_t$

step 2: 计算  $\text{Angle}(s, V_i)$ ; //参考式(6)

step 3: 计算  $R(s, V_i)$ ; //参考式(7)

step 4: end for

step 5:  $\theta =$  参数自适应( $R(s, V_i)$ );

step 6: for each  $s \in P_t$

step 7: 计算  $F(s, V_i)$ ; //参考式(8)

step 8: end for

step 9:  $s^* = \arg \max F(s, V_i), s \in P_t$ ; //从种群选择适应度最优的个体 $s^*$

step 10:  $R(s^*, V_i) = \inf$ ; //将个体删除,以免重复选择.

如图4所示, $V_1$ 有关联解 $\{A, B, C, D\}$ , $V_2$ 无关联解,面对这种分布不均匀的情况使用RVEA的选择策略, $V_1$ 会选择 $C$ 作为精英解, $V_2$ 由于无关联解无法

筛选出精英解;而弱关联中即使参考向量无关联解,但是每一个参考向量都能考察整个种群,从而每一个参考向量都能从中选择出适应度值最高的解作为精英解. 所以 $V_1$ 选择 $C$ , $V_2$ 选择 $B$ ,因为 $B$ 离 $V_2$ 最近,即使在收敛性上不如 $D$ ,但为了更好地维持种群多样性,选择 $B$ 作为精英解.

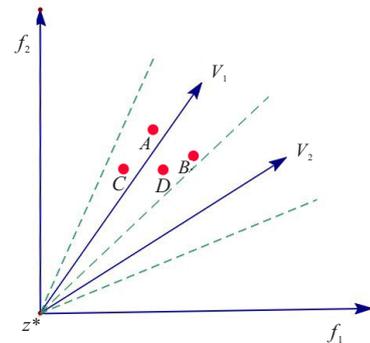


图4 种群分布不均匀情况

在复杂问题中,由于经常出现参考向量无关联解的情况,使用RVEA中的参考向量指导选择策略,无关联解的参考向量无法选择出精英解遗传到下一代,会发生种群规模萎缩的现象,无法保证种群的稳定性. 基于弱关联的参考向量指导选择策略能在平衡种群收敛性与多样性的情况下,保持种群规模不变.

2) 标量函数不同. RVEA算法使用角度惩罚距离APD作为标量函数,在衡量多样性时,APD仅使用解与参考向量之间的夹角作为评价标准,而BSF中关联解使用解到参考向量的垂直距离 $d_2$ 来衡量解的多样性,若为非关联解则综合考虑 $d_2$ 和夹角.

如图5所示,面对这种收敛不平衡的情况,使用APD标量函数去评价解时,虽然 $B$ 的收敛性远大于 $A$ ,但是由于 $B$ 与向量 $V$ 之间的夹角更大,使用APD标量函数需要接受更严格的多样性惩罚,最终 $B$ 的适应度值可能会不如 $A$ . 假设 $A, B$ 为向量 $V$ 的关联解时,本文采用的BSF使用垂直距离 $d_2$ 来衡量解的多样性. 由于 $d_2$ 会因为解的收敛性而改变,解越收敛 $d_2$ 越小. 尽管 $A$ 和 $B$ 与参考向量的夹角不同,但是 $B$ 点

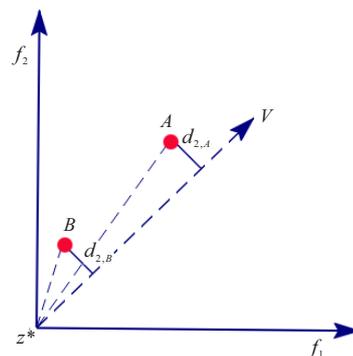


图5 种群收敛不平衡情况

更收敛,垂直距离  $d_{2,A}$  和  $d_{2,B}$  相等,  $A$  和  $B$  所受到的多样性惩罚相等,所以  $B$  的适应度值要优于  $A$ 。

两种标量函数相比,双模态标量函数能排除部分收敛性极差的解,避免其带来种群收敛性能上的退化,更好地保证算法在高维多目标上的收敛速度。

### 2.4 自适应的惩罚参数 $\theta$

由于惩罚参数  $\theta$  容易影响算法的性能,为了处理不同类型的高维多目标问题,本算法设计自适应的惩罚参数。

**定义6** 生境数:假设  $V_i$  为参考向量,  $C_i$  为  $V_i$  的角度子空间,则  $V_i$  的生境数  $crowd_i$  为子空间  $C_i$  范围内解的数量,其如下计算:

$$crowd_i = \text{count}(\{x|x \in S_i\}), i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (10)$$

**定义7** 自适应的惩罚参数:假设  $V_i$  为单位参考向量,  $crowd_i$  为该参考向量的生境数.  $V_i$  的自适应惩罚参数  $\theta_i$  定义为

$$\theta_i = M \frac{e^{\sqrt{\frac{t}{t_{\max}}}}}{crowd_i + 1}, i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (11)$$

其中:  $M$  为目标数量,  $t$  为当前评价数,  $t_{\max}$  为最大评价次数。

由式(11)可以看出,每个参考向量都根据其子空间生境数自适应地调整惩罚参数  $\theta$ , 分母加1为避免当子空间内无解  $crowd$  为0的情况. 决定大小的有3个变量: 目标数  $M$ 、当前评价次数  $t$  以及关联的子空间生境数  $crowd$ . 当种群大小不变时,目标数  $M$  越大,目标空间中的解越稀疏,此时加大惩罚参数  $\theta$  的值,意味着函数更偏重于维持种群中的多样性,尽可能地寻找离参考向量更近的解;而  $crowd_i$  变大,则意味该参考向量子空间内的关联解比较多,可供选择的解变多,此时减小  $\theta$  值有利于挑选出收敛性高的解;根据当前评价次数  $t$  的变化,调整  $\theta$  大小,使得算法维持前期偏重于收敛性,后期偏重于多样性的进化策略。

本文设计的自适应参数方法,综合考虑了影响参考向量选择精英解的3个关键因素:目标数、生境数以及进化代数. 将其有效地结合在一起,能更好地平衡收敛性与多样性. 同时,每个参考向量都根据其子空间情况,自适应地调整惩罚参数,使得每个参考向量在选择精英解时做到不同情况不同处理。

### 2.5 WAEA算法复杂度分析

在一般的情况下,WAEA 每代的时间复杂度由算法1和算法2所主导,算法1中需要遍历每个参考向量,算法2中需要遍历种群中每个个体计算在该参考向量上的适应值. 参考向量的个数为  $N$ , 每代的种

群大小为  $2N$ , 因为在计算适应值的时候需要先计算  $con$  值,将个体的每个目标值相加;因此,本文算法的时间复杂度近似为  $O(MN^2)$ 。

## 3 实验与分析

为了验证 WAEA 算法的性能,本节将设置两组对比实验:第1组与同类型的基于分解的高维多目标进化算法进行比较;第2组与其他类型的表现优异的高维多目标进化算法进行对比。

### 3.1 实验部署

本文实验主要使用 DTLZ<sup>[18]</sup> 和 WFG<sup>[19]</sup> 测试集,这是多目标进化算法最常用的两个函数测试集,这些测试问题有许多不同的特征,挑战算法在不同方面的能力. 各个测试问题的主要特征如表1所示. 本实验的目标个数  $M \in \{5, 8, 10, 15\}$ , 决策变量维度  $D = M + K - 1$ , 对于 DTLZ1,  $K$  设置为5;对于 DTLZ2 ~ DTLZ4 和 WFG1 ~ WFG9,  $K$  设置为10. 本文实验在多目标进化软件包 PlatEMO<sup>[20]</sup> 上实现。

表1 测试问题的特征

问题	特征
DTLZ1	线性的、多模态的
DTLZ2	凹的
DTLZ3	凹的、多模态的
DTLZ4	凹的、有偏的
WFG1	混合的、有偏的
WFG2	凸的、不连续、多模、不可分解
WFG3	线性的、退化的、不可分解
WFG4	凹的、多模态的
WFG5	凹的、欺骗的
WFG6	凹的、不可分解
WFG7	凹的、有偏的
WFG8	凹的、有偏的、不可分解
WFG9	凹的、有偏的、多模、欺骗的、不可分解的

### 3.2 性能指标

本文算法使用评价指标为 HV 指标,该指标广泛地使用在进化算法领域,它的良好理论特征保证了它是一个非常公平的指标<sup>[21]</sup>。

设  $r = (r_1, r_2, \dots, r_M)^T$  为目标空间的一个参考点,  $S$  为算法运行后所得到的一组近似解集,  $r$  被解集  $S$  中的所有个体支配,本文在计算 HV 时所使用的参考点为  $1.1z^{\text{nad}}$ ,  $z^{\text{nad}}$  为 Pareto 前沿上的最差点. HV 计算方式为

$$HV(S, r) = \text{volume}(\bigcup_{s \in S} [f_1(x), r_1] \times \dots \times [f_M(x), r_M]). \quad (12)$$

HV 指标计算的是目标空间中以  $r$  为边界,解集  $S$  支配范围的体积<sup>[22]</sup>. HV 能同时度量当前解集的收敛性和多样性,值越大表示该算法性能越优。

### 3.3 实验设置

在这部分,先提出实验的一般性参数设置,之后每一个对比算法的具体参数设置将单独给出.实验的具体设置如下.

1) 终止条件:每个算法在种群迭代200代后终止.

2) 运行次数:每个算法独立运行30次,记录评价指标的平均值和标准差.

3) 显著性检验:为了更明显地区分算法性能的优劣,对比算法的指标值将进一步进行置信度为95%的Wilcoxon的秩和检验.

4) 参数设置:所有算法的交叉概率、变异概率、分布指数分别为1、1/D、20.各个算法的具体参数使用了其原论文中推荐的设置,其中:MOEA/DD的邻居选择概率 $\delta$ 为0.9; $\theta$ -DEA惩罚参数 $\theta$ 为5;RVEA的惩罚函数参数 $\alpha$ 和参考向量适应频率分别为2和0.1,WAEA $\sharp$ 为惩罚参数 $\theta$ 固定为5版本.目标个数为5、8、10、15的测试问题,对应种群大小分别为210、156、275、135.

### 3.4 WAEA与其他算法的实验比较

#### 3.4.1 与同类型算法比较

本小节将设计实验用WAEA算法与当前4种最具有代表性基于分解的高维多目标进化算法在相同测试环境下进行比较.这4种算法分别是NSGA-III<sup>[14]</sup>、MOEA/DD<sup>[23]</sup>、 $\theta$ -DEA<sup>[7]</sup>和RVEA<sup>[17]</sup>.与WAEA不同的是,NSGA-III仅仅在Pareto支配排序的临界层上使用参考向量指导选择;MOEA/DD算法结合了Pareto支配和PBI聚集函数; $\theta$ -DEA使用了聚类算子、参考向量指导簇内选择;RVEA则采用了变化的参考向量.本文所提出的WAEA算法针对弱关联的概念设计了全新的聚集函数.聚集函数对参考线关联解集与非关联解集采用了不同的评价标准,并且本文采用了自适应参数设计使得算法具有普适性.为了验证自适应化惩罚参数的有效性,还加入了固定惩罚参数版本WAEA $\sharp$ 与自适应参数版本WAEA进行对比.实验结果在表2中给出,最好的指标值用加粗字体突出.由表2可以看出,WAEA系列算法在全部的52个测试实例中有42个全局最优结果,NSGAIII、 $\theta$ -DEA、MOEA/DD和RVEA分别占据4、2、1、2个全局最优结果,这表明WAEA算法处理高维多目标问题时占有优势.本文的具体实验分析如下.

在DTLZ系列优化问题上,DTLZ1具有线性结构的PF,从实验结果看出WAEA在10个目标情况下获得最优结果,其他情况与其他算法各有优劣.对于DTLZ2~DTLZ4,则是球面PF,WAEA算法获得了大部分情况下的最优结果,展示出了较好的性能.

在WFG系列优化问题上,WFG1的设计是带有偏见和混合结构的PF,WAEA明显优于其他对比算法.WFG2是一种不连续的PF,WAEA虽然比NSGA-III稍差,但总体表现较好.WFG3是一种比较难处理的问题,具有退化的PF且决策变量不可以分离,在这个问题上,WAEA的HV值要优于所有的对比算法.WFG4~WFG9都被设计为凸面的PF,但在决策空间上具有不同的难度.综合统计结果可以看出,WAEA在WFG测试集上总体性能优越,WAEA算法在各种类型的测试函数上都表现出了良好的性能.

由上面两个测试集得出的实验结果可以看出,所提出的WAEA算法在DTLZ测试集中展现了良好的性能,在WFG测试集上展现的性能则非常优异.可以看出,本文所提出的算法性能优越.

在表2中观察,使用固定参数的WAEA $\sharp$ 算法与自适应参数的WAEA算法进行对比,从结果来看,无论是算法性能还是稳定性,WAEA算法都有着更好的表现.这表明使用自适应参数能更好地适应环境的变化.

WFG1有着复杂的Pareto前沿,从图6中5个算法在10目标WFG1问题上的表现能够观察到,MOEA/DD、RVEA多样性较差,而NSGA-III具有非常好的多样性.但是,由于WFG1问题的复杂性,其真实Pareto前沿上大部分解的目标值较小.由于NSGA-III偏重于多样性,其收敛性明显不足.只有 $\theta$ -DEA和WAEA表现大致相当,相对于其他3个算法体现出了明显的优势.

综合以上对比可得出结论:WAEA算法相对于同类型分解算法,在面对不规则、复杂的Pareto前沿的高维多目标问题时,存有较大的优势.参数自适应策略能够有效地提高算法性能,提高算法的稳定性.

#### 3.4.2 与其他类型算法比较

本组实验选择了其他各类具有代表性的高维多目标算法进行对比.这些对比算法分别是:基于修改支配关系的NSGAII-SDR算法<sup>[24]</sup>、基于收敛指标指导逐一选择策略One-by-One EA算法<sup>[25]</sup>、偏好与候选解同时进行进化的PICEA-g算法<sup>[26]</sup>以及改进的粒子群算法NMPISO<sup>[27]</sup>.实验设置、测试环境、种群大小与上文保持一致.

由于版面限制,本文只展示了算法在8目标和10目标问题上的实验结果,详情如表3所示.在26个测试实例中,WAEA算法分别有14、20、18、19个测试优于NSGAII-SDR、One-by-One EA、NMPISO、PICEA-g.相对这些对比算法而言,本文所提出的WAEA算法占有一定的优势.

表2 第1组实验在DTLZ1~DTLZ4, WFG1~WFG9测试问题上获得的HV值统计结果(均值和标准差)

problem	M	NSGA-III	$\theta$ -DEA	MOEADD	RVEA	WAEA $\ddagger$	WAEA
DTLZ1	5	9.615 7e-1 (7.11e-2)=	9.601 0e-1 (4.04e-2)=	<b>9.772 7e-1 (1.21e-3)+</b>	9.490 4e-1 (2.52e-2)+	9.435 9e-1 (1.05e-1)=	9.488 5e-1 (8.11e-2)
	8	6.539 0e-1 (3.16e-1)-	9.704 4e-1 (3.86e-2)+	9.721 0e-1 (5.18e-2)+	<b>9.798 5e-1 (5.67e-2)=</b>	5.904 6e-1 (3.87e-1)-	9.525 2e-1 (1.67e-1)
	10	8.084 3e-1 (2.61e-1)-	9.908 7e-1 (2.40e-2)-	9.916 7e-1 (1.19e-2)-	9.962 7e-1 (1.82e-3)-	5.999 8e-1 (4.20e-1)-	<b>9.988 9e-1 (2.01e-3)</b>
	15	4.693 5e-1 (3.79e-1)+	6.851 3e-1 (3.02e-1)+	9.575 0e-1 (6.03e-2)+	<b>9.700 3e-1 (5.15e-2)+</b>	9.408 7e-2 (1.72e-2)=	9.463 8e-2 (2.07e-2)
DTLZ2	5	8.085 9e-1 (7.16e-4)-	8.106 0e-1 (5.10e-4)-	8.102 8e-1 (4.41e-4)-	8.102 2e-1 (4.74e-4)-	8.105 7e-1 (6.33e-4)=	<b>8.109 0e-1 (5.29e-4)</b>
	8	9.060 4e-1 (3.12e-2)-	9.198 4e-1 (9.30e-4)-	9.196 0e-1 (8.00e-4)-	9.210 9e-1 (5.88e-4)-	<b>9.256 7e-1 (6.96e-4)+</b>	9.249 8e-1 (6.42e-4)
	10	9.402 6e-1 (3.13e-2)-	9.670 5e-1 (5.03e-4)-	9.670 8e-1 (4.67e-4)-	9.676 0e-1 (3.98e-4)-	<b>9.704 9e-1 (2.67e-4)+</b>	9.696 8e-1 (3.06e-4)
	15	9.291 8e-1 (2.81e-2)-	<b>9.884 0e-1 (5.32e-4)+</b>	9.852 4e-1 (1.99e-3)-	9.816 7e-1 (2.97e-2)=	9.703 3e-1 (1.89e-2)-	9.870 7e-1 (2.08e-3)
DTLZ3	5	2.769 3e-3 (1.52e-2)-	1.316 1e-1 (2.38e-1)-	2.961 0e-2 (1.07e-1)-	2.262 3e-2 (1.04e-1)-	3.913 9e-1 (2.51e-1)=	<b>4.479 2e-1 (2.58e-1)</b>
	8	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	2.583 6e-3 (1.41e-2)-	1.483 7e-2 (8.13e-2)-	<b>3.284 8e-1 (3.79e-1)+</b>	1.997 6e-1 (3.21e-1)
	10	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	7.275 6e-4 (3.61e-3)-	1.918 7e-1 (3.14e-1)-	2.040 8e-2 (1.09e-1)-	7.652 8e-1 (2.51e-1)-	<b>8.506 9e-1 (2.32e-1)</b>
	15	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	<b>4.537 8e-2 (3.62e-2)=</b>	4.337 3e-2 (3.72e-2)
DTLZ4	5	8.084 0e-1 (8.56e-4)-	8.107 1e-1 (3.85e-4)-	8.108 0e-1 (4.26e-4)-	8.107 3e-1 (6.30e-4)-	8.112 1e-1 (4.75e-4)=	<b>8.114 0e-1 (5.11e-4)</b>
	8	8.932 5e-1 (4.29e-2)-	9.200 5e-1 (9.46e-3)-	9.221 2e-1 (6.36e-4)-	9.222 9e-1 (4.21e-3)-	<b>9.287 5e-1 (7.35e-4)+</b>	9.277 3e-1 (5.73e-4)
	10	9.615 0e-1 (1.72e-2)-	9.695 6e-1 (3.28e-4)-	9.690 0e-1 (3.41e-4)-	9.697 0e-1 (2.24e-4)-	<b>9.726 6e-1 (2.09e-4)+</b>	9.720 2e-1 (2.34e-4)
	15	9.623 2e-1 (2.77e-2)-	<b>9.906 0e-1 (1.03e-4)+</b>	9.893 9e-1 (1.88e-3)=	9.895 5e-1 (1.86e-3)=	9.900 9e-1 (1.12e-3)=	9.904 1e-1 (1.30e-4)
WFG1	5	5.410 8e-1 (4.11e-2)-	6.452 4e-1 (4.01e-2)-	4.510 9e-1 (4.44e-2)-	6.126 3e-1 (5.58e-2)-	<b>7.447 3e-1 (4.68e-2)=</b>	7.243 4e-1 (6.95e-2)
	8	4.363 9e-1 (3.67e-2)-	6.209 8e-1 (5.80e-2)-	2.723 9e-1 (2.10e-2)-	5.064 2e-1 (5.89e-2)-	<b>8.453 2e-1 (8.81e-2)=</b>	8.093 5e-1 (8.38e-2)
	10	4.250 8e-1 (4.05e-2)-	7.007 2e-1 (6.37e-2)-	4.736 4e-1 (5.23e-2)-	6.360 9e-1 (7.22e-2)-	<b>9.707 7e-1 (2.09e-2)=</b>	9.535 8e-1 (4.26e-2)
	15	4.900 1e-1 (7.56e-2)-	8.073 8e-1 (7.29e-2)-	3.150 8e-1 (5.32e-2)-	6.430 9e-1 (8.37e-2)-	8.625 3e-1 (9.51e-2)=	<b>8.970 3e-1 (7.70e-2)</b>
WFG2	5	<b>9.818 6e-1 (3.53e-3)+</b>	9.818 4e-1 (2.57e-3)+	9.596 0e-1 (4.96e-3)-	9.775 2e-1 (3.71e-3)+	9.795 6e-1 (2.68e-3)+	9.748 5e-1 (3.27e-3)
	8	<b>9.845 7e-1 (6.76e-3)+</b>	9.769 6e-1 (6.34e-3)=	9.460 7e-1 (1.09e-2)-	9.575 8e-1 (8.37e-3)-	9.754 1e-1 (4.65e-3)-	9.781 6e-1 (3.85e-3)
	10	<b>9.929 5e-1 (5.55e-3)+</b>	9.853 8e-1 (4.96e-3)=	9.578 1e-1 (1.03e-2)-	9.702 6e-1 (4.89e-3)-	9.845 4e-1 (2.35e-3)-	9.868 2e-1 (2.81e-3)
	15	<b>9.800 0e-1 (8.58e-3)+</b>	8.541 5e-1 (7.38e-2)-	9.523 0e-1 (1.35e-2)=	9.402 8e-1 (3.49e-2)=	8.119 1e-1 (7.46e-2)-	8.887 4e-1 (8.30e-2)
WFG3	5	1.310 7e-1 (1.64e-2)-	1.523 7e-1 (1.67e-2)-	6.706 3e-2 (2.30e-2)-	1.0532e-1 (2.38e-2)-	<b>2.070 8e-1 (1.03e-2)+</b>	1.966 0e-1 (1.31e-2)
	8	3.284 4e-3 (7.47e-3)-	1.292 9e-2 (1.25e-2)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	1.2569e-1 (1.04e-2)-	<b>1.503 3e-1 (9.90e-3)</b>
	10	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	9.422 8e-2 (1.66e-2)-	<b>1.189 0e-1 (1.83e-2)</b>
	15	0.000 0e+0 (0.00e+0)=	0.000 0e+0 (0.00e+0)				
WFG4	5	7.743 9e-1 (4.29e-3)-	7.785 8e-1 (2.41e-3)-	7.559 0e-1 (3.21e-3)-	7.771 3e-1 (3.55e-3)-	7.850 5e-1 (2.75e-3)-	<b>7.882 2e-1 (2.62e-3)</b>
	8	8.598 0e-1 (7.36e-3)-	8.653 3e-1 (5.57e-3)-	7.748 7e-1 (1.18e-2)-	8.401 2e-1 (1.25e-2)-	8.906 7e-1 (4.13e-3)-	<b>8.929 7e-1 (3.40e-3)</b>
	10	9.005 4e-1 (9.11e-3)-	9.088 3e-1 (5.19e-3)-	7.677 9e-1 (2.02e-2)-	8.841 7e-1 (1.07e-2)-	<b>9.395 5e-1 (4.04e-3)+</b>	9.351 2e-1 (4.84e-3)
	15	8.948 0e-1 (1.83e-2)-	9.261 6e-1 (8.23e-3)-	8.604 3e-1 (6.92e-2)-	8.690 5e-1 (3.70e-2)-	6.894 6e-1 (1.50e-1)-	<b>9.577 1e-1 (1.73e-2)</b>
WFG5	5	7.473 0e-1 (2.21e-3)-	7.502 1e-1 (2.12e-3)-	7.197 0e-1 (3.25e-3)-	7.469 1e-1 (2.25e-3)-	7.495 7e-1 (2.98e-3)-	<b>7.521 0e-1 (2.65e-3)</b>
	8	8.329 7e-1 (3.23e-3)-	8.367 5e-1 (2.88e-3)-	7.313 1e-1 (1.30e-2)-	8.218 3e-1 (7.03e-3)-	8.519 0e-1 (1.40e-3)=	<b>8.522 7e-1 (1.63e-3)</b>
	10	8.716 6e-1 (3.38e-3)-	8.762 1e-1 (2.47e-3)-	7.120 0e-1 (1.75e-2)-	8.613 8e-1 (5.59e-3)-	<b>8.930 5e-1 (1.36e-3)+</b>	8.920 1e-1 (9.86e-4)
	15	8.664 0e-1 (7.85e-3)-	8.744 4e-1 (5.69e-3)-	5.809 1e-1 (4.60e-2)-	8.443 7e-1 (1.72e-2)-	8.218 1e-1 (5.32e-2)-	<b>8.967 8e-1 (4.37e-3)</b>
WFG6	5	7.130 4e-1 (1.28e-2)-	7.213 3e-1 (1.15e-2)-	6.941 2e-1 (1.81e-2)-	7.218 6e-1 (1.63e-2)-	7.267 2e-1 (1.88e-2)=	<b>7.319 7e-1 (1.20e-2)</b>
	8	8.070 8e-1 (2.46e-2)-	8.021 2e-1 (1.46e-2)-	7.068 8e-1 (3.03e-2)-	7.674 9e-1 (4.39e-2)-	8.266 4e-1 (1.81e-2)=	<b>8.279 9e-1 (1.92e-2)</b>
	10	8.427 1e-1 (1.71e-2)-	8.447 3e-1 (1.66e-2)-	7.196 8e-1 (2.67e-2)-	7.978 6e-1 (2.77e-2)-	<b>8.707 8e-1 (1.34e-2)=</b>	8.689 8e-1 (1.51e-2)
	15	8.298 5e-1 (3.43e-2)-	8.611 0e-1 (1.96e-2)=	6.734 1e-1 (8.17e-2)-	5.994 6e-1 (7.69e-2)-	7.366 9e-1 (1.11e-1)-	<b>8.744 3e-1 (2.78e-2)</b>
WFG7	5	7.811 1e-1 (3.46e-3)-	7.916 9e-1 (2.42e-3)-	7.553 4e-1 (7.37e-3)-	7.874 3e-1 (3.21e-3)-	7.982 9e-1 (1.48e-3)-	<b>8.023 4e-1 (1.05e-3)</b>
	8	8.663 0e-1 (6.41e-3)-	8.823 7e-1 (6.25e-3)-	8.114 8e-1 (1.34e-2)-	8.441 9e-1 (9.42e-3)-	9.080 8e-1 (2.55e-3)=	<b>9.086 1e-1 (2.43e-3)</b>
	10	9.237 7e-1 (1.04e-2)-	9.284 9e-1 (4.89e-3)-	8.324 0e-1 (1.83e-2)-	9.005 5e-1 (7.29e-3)-	<b>9.543 8e-1 (1.85e-3)=</b>	9.533 2e-1 (2.45e-3)
	15	9.290 8e-1 (1.60e-2)-	9.481 5e-1 (7.82e-3)-	8.754 4e-1 (2.12e-2)-	7.140 0e-1 (1.84e-1)-	8.641 6e-1 (1.51e-1)-	<b>9.646 3e-1 (8.79e-3)</b>
WFG8	5	6.640 0e-1 (3.73e-3)-	6.659 9e-1 (3.18e-3)-	6.478 5e-1 (1.23e-2)-	6.648 4e-1 (4.41e-3)-	6.799 8e-1 (2.56e-3)=	<b>6.813 6e-1 (3.28e-3)</b>
	8	7.329 2e-1 (1.57e-2)-	7.262 6e-1 (9.72e-3)-	6.884 7e-1 (2.98e-2)-	6.253 7e-1 (6.65e-2)-	<b>7.682 5e-1 (7.86e-3)=</b>	7.660 3e-1 (6.98e-3)
	10	8.091 6e-1 (1.16e-2)-	8.023 1e-1 (1.10e-2)-	6.980 8e-1 (5.82e-2)-	6.897 6e-1 (7.78e-2)-	8.390 7e-1 (5.85e-3)=	<b>8.433 8e-1 (1.09e-2)</b>
	15	7.797 0e-1 (5.04e-2)-	8.427 2e-1 (2.01e-2)-	8.137 0e-1 (6.18e-2)-	5.323 4e-1 (1.36e-1)-	7.720 5e-1 (1.06e-1)-	<b>8.752 0e-1 (8.26e-3)</b>
WFG9	5	7.234 7e-1 (1.02e-2)-	7.415 3e-1 (9.82e-3)-	6.872 8e-1 (1.54e-2)-	7.275 2e-1 (1.12e-2)-	7.447 0e-1 (2.46e-2)-	<b>7.544 0e-1 (4.56e-3)</b>
	8	7.356 9e-1 (4.82e-2)-	7.908 8e-1 (2.57e-2)-	6.217 7e-1 (4.06e-2)-	7.466 1e-1 (3.64e-2)-	<b>8.226 9e-1 (1.87e-2)=</b>	8.191 0e-1 (2.47e-2)
	10	8.299 9e-1 (3.51e-2)-	8.410 1e-1 (1.49e-2)-	6.301 4e-1 (3.49e-2)-	7.973 6e-1 (2.39e-2)-	8.682 4e-1 (1.83e-2)=	<b>8.719 5e-1 (9.24e-3)</b>
	15	7.812 2e-1 (5.81e-2)-	8.092 7e-1 (3.44e-2)-	6.026 2e-1 (7.60e-2)-	6.967 0e-1 (5.53e-2)-	7.456 1e-1 (1.24e-1)-	<b>8.647 2e-1 (5.59e-2)</b>
+ / - / =		5/45/2	5/42/5	3/46/3	3/44/5	9/20/23	

\* 本文实验平台为PlatEMO V2.0. +表示该结果经过秩和检验后显著优于WAEA算法, -表示该结果经过秩和检验后显著劣于WAEA算法, =表示实验结果无明显优劣.

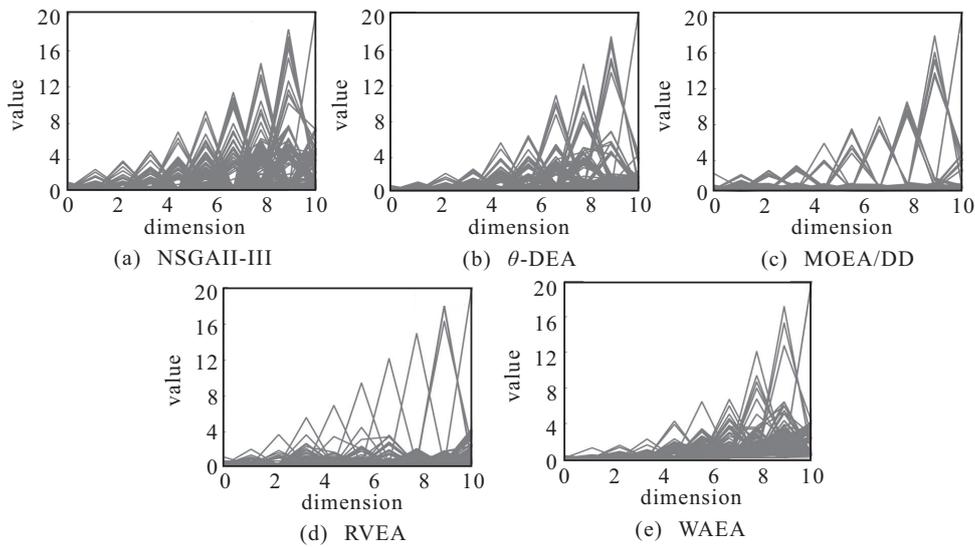


图6 第1组实验各算法在10目标WFG1问题上的非支配前沿

表3 第2组实验在DTLZ1~DTLZ4, WFG1~WFG9测试问题上获得的HV值统计结果(均值和标准差)

Problem	M	NSGAII-III	onebyoneEA	PICEA-g	NMPSO	WAEA
DTLZ1	8	9.393 8e-1 (2.46e-2)-	<b>9.761 9e-1 (3.56e-3)+</b>	8.665 0e-1 (1.47e-1)-	7.698 7e-1 (3.13e-1)-	9.525 2e-1 (1.67e-1)
	15	9.436 1e-1 (9.00e-2)+	<b>9.497 0e-1 (4.79e-2)+</b>	7.333 4e-1 (1.23e-1)+	2.702 4e-2 (1.05e-1)-	9.463 8e-2 (2.07e-2)
DTLZ2	8	8.830 7e-1 (9.55e-2)-	9.039 2e-1 (3.74e-3)-	9.005 3e-1 (2.48e-2)-	<b>9.270 1e-1 (2.36e-3)+</b>	9.249 8e-1 (6.42e-4)
	15	9.690 3e-1 (1.81e-2)-	9.455 1e-1 (1.14e-2)-	8.137 8e-1 (6.23e-2)-	9.231 4e-1 (2.92e-2)-	<b>9.870 7e-1 (2.08e-3)</b>
DTLZ3	8	<b>5.058 4e-1 (4.00e-1)+</b>	2.139 5e-1 (3.34e-1)=	2.237 1e-2 (6.21e-2)=	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	1.997 6e-1 (3.21e-1)
	15	<b>3.812 5e-1 (4.49e-1)=</b>	6.768 9e-2 (2.19e-1)+	2.260 7e-3 (6.21e-3)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	4.337 3e-2 (3.72e-2)
DTLZ4	8	3.979 0e-1 (7.74e-2)-	9.140 5e-1 (1.40e-2)-	8.870 9e-1 (2.38e-2)-	9.178 2e-1 (1.74e-2)=	<b>9.2773e-1 (5.73e-4)</b>
	15	7.452 8e-1 (2.81e-2)-	9.778 2e-1 (3.35e-3)-	9.395 1e-1 (1.31e-2)-	9.649 5e-1 (7.93e-2)-	<b>9.904 1e-1 (1.30e-4)</b>
WFG1	8	6.531 8e-1 (5.35e-2)-	4.686 9e-1 (5.00e-2)-	<b>8.919 5e-1 (3.80e-2)+</b>	4.716 8e-1 (8.23e-2)-	8.093 5e-1 (8.38e-2)
	15	8.734 0e-1 (7.01e-2)=	4.013 4e-1 (6.02e-2)-	<b>9.712 8e-1 (4.74e-2)+</b>	4.933 3e-1 (7.10e-2)-	8.970 3e-1 (7.70e-2)
WFG2	8	9.689 7e-1 (4.75e-3)-	9.753 8e-1 (5.14e-3)-	<b>9.942 5e-1 (1.68e-3)+</b>	9.844 9e-1 (7.06e-3)+	9.781 6e-1 (3.85e-3)
	15	9.798 8e-1 (5.75e-3)+	9.682 1e-1 (1.53e-2)+	9.858 1e-1 (1.49e-2)+	<b>9.917 1e-1 (5.81e-3)+</b>	8.887 4e-1 (8.30e-2)
WFG3	8	7.269 4e-3 (1.22e-2)-	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	<b>1.558 5e-1 (8.27e-3)+</b>	0.000 0e+0 (0.00e+0)-	1.503 3e-1 (9.90e-3)
	15	<b>0.000 0e+0 (0.00e+0)=</b>	0.000 0e+0 (0.00e+0)=	0.000 0e+0 (0.00e+0)=	0.000 0e+0 (0.00e+0)=	0.000 0e+0 (0.00e+0)
WFG4	8	8.858 9e-1 (5.57e-3)-	7.142 3e-1 (1.93e-2)-	7.927 6e-1 (5.54e-2)-	8.647 0e-1 (5.95e-3)-	<b>8.929 7e-1 (3.40e-3)</b>
	15	9.047 3e-1 (1.05e-1)-	7.561 1e-1 (1.88e-2)-	7.150 7e-1 (6.27e-2)-	8.642 1e-1 (2.02e-2)-	<b>9.577 1e-1 (1.73e-2)</b>
WFG5	8	8.440 8e-1 (4.97e-3)-	6.753 3e-1 (1.52e-2)-	8.264 8e-1 (1.10e-2)-	8.324 5e-1 (2.93e-3)-	<b>8.522 7e-1 (1.63e-3)</b>
	5	<b>8.995 6e-1 (3.55e-3)+</b>	7.162 7e-1 (1.20e-2)-	6.666 8e-1 (2.90e-2)-	8.313 6e-1 (1.62e-2)-	8.967 8e-1 (4.37e-3)
WFG6	8	<b>8.292 8e-1 (1.71e-2)=</b>	5.641 9e-1 (2.77e-2)-	8.130 5e-1 (1.94e-2)-	7.223 8e-1 (1.52e-3)-	8.279 9e-1 (1.92e-2)
	15	8.557 6e-1 (7.50e-2)=	5.341 7e-1 (5.40e-2)-	7.049 5e-1 (4.35e-2)-	7.347 3e-1 (1.21e-2)-	<b>8.744 3e-1 (2.78e-2)</b>
WFG7	8	9.055 6e-1 (4.64e-3)-	6.834 5e-1 (1.48e-2)-	8.933 5e-1 (5.63e-3)-	8.969 4e-1 (4.83e-3)-	<b>9.086 1e-1 (2.43e-3)</b>
	15	8.261 6e-1 (1.07e-1)-	7.466 0e-1 (4.00e-2)-	7.949 1e-1 (5.55e-2)-	9.451 7e-1 (1.50e-2)-	<b>9.646 3e-1 (8.79e-3)</b>
WFG8	8	7.770 3e-1 (1.40e-2)+	3.985 2e-1 (5.86e-2)-	7.494 0e-1 (4.70e-3)-	<b>7.796 2e-1 (5.31e-3)+</b>	7.660 3e-1 (6.98e-3)
	15	7.946 9e-1 (9.19e-2)-	3.964 4e-1 (1.20e-1)-	7.361 9e-1 (4.81e-2)-	<b>8.875 2e-1 (1.10e-2)+</b>	8.752 0e-1 (8.26e-3)
WFG9	8	<b>8.451 7e-1 (6.36e-3)+</b>	6.413 3e-1 (3.54e-2)-	8.037 1e-1 (3.30e-2)-	7.541 9e-1 (6.80e-2)-	8.1910e-1 (2.47e-2)
	15	8.482 2e-1 (7.38e-2)=	6.237 5e-1 (3.78e-2)-	6.827 0e-1 (2.89e-2)-	7.099 9e-1 (7.84e-2)-	<b>8.647 2e-1 (5.59e-2)</b>
+ / - / =		6/14/6	4/20/2	6/18/2	5/19/2	

\* 本文实验平台为 PlatEMO V2.0。+ 表示该结果经过秩和检验后显著优于 WAEA 算法，- 表示该结果经过秩和检验后显著劣于 WAEA 算法，= 表示实验结果无明显优劣。

为了更直观地了解 WAEA 算法与对比算法的差异, 在三维坐标系中观察这 5 种算法所得到的近似 PF。在 3 目标 DTLZ1 问题上的表现如图 7 所示, 其

中小圆点为真实 PF 上采样的 10 000 个解, 大圆点为各算法所得到的最终解。在 DTLZ1 问题上, NSGAII-SDR 多样性不足, 这是由于其使用了新的支配方法,

在解的生境范围内只考虑解的收敛性来确定支配关系; PICEA-g 的大部分解都分布在 PF 面的边缘, 这是由于其采用偏好向量与候选解共同进化, 会相互影响, 而 DTLZ1 的 PF 面为线性平面, 根据适应度分配原则, 偏好向量的适应度值在平面的边缘会获得更高的适应度值, 造成偏好向量朝着边缘方向聚集的现象, 影响了候选解的选择; NMP SO 在使用改进粒子群算法搜索后再使用一般的进化算法去搜索, 加速消耗计算资源, 所以存在明显的收敛性不足; 只有 WAEA 算法在收敛性和多样性方面都有着不错的表现, 这主要归功于使用了基于弱关联概念的双模态标量函数, 其能综合考虑种群的分布情况和候选解的收敛性, 为候选解分配恰当的适应度值。

### 3.4.3 实验结论

通过上面两组对比实验, 可以得出结论: 本文所提的 WAEA 算法能够很好地平衡收敛性和多样性, 在处理不规则、复杂的 Pareto 前沿的高维多目标问题时, 存在较大的优势. 对于各种类型的测试函数, 本文算法依然能保持良好的性能. 这主要由于 WAEA 算法利用了弱关联概念, 使用双模态标量函数同时评价关联解和非关联解, 能够更好地考虑到全局信息, 选择出精英解. 双模态标量函数中综合使用两种多样性测量指标也能更好地维持种群多样性. 同时, 其采用的自适应参数设计能够动态调整惩罚参数, 对不同情况有不同的处理, 能够更快地适应环境。

## 4 结论

本文提出了一种基于弱关联的进化算法来处理高维多目标问题. 与其他基于分解的算法不同的是, 本文先使用基于角度子空间的关联策略为参考向量找到其关联解; 再使用弱关联的概念, 将精英解的选择范围扩大到整个种群, 双模态标量函数同时评价种群中所有解, 从中选择出适应度最佳的解进行遗传. 通过实验对比, 本文所提出的算法在处理 3~15 个目标的复杂 Pareto 前沿问题时表现良好, 能够更好地平衡多样性与收敛性. 在各种类型的测试问题上也表现出来了良好的稳定性。

本文所提出的算法目前主要处理的是无约束高维多目标优化问题, 然而, 现实中的多目标优化问题往往更复杂, 需要考虑多种复杂约束, 所以针对实际需求设计有效的约束处理方法, 并扩展到解决约束高维多目标优化问题是下一步研究的方向. 此外, 对于大规模优化问题, 通过决策者偏好可以指导算法关注重点区域提高搜索效率, 因此有效融入偏好信息, 提高算法在求解大规模高维多目标优化时的性能也是未来值得深入研究的问题。

### 参考文献 (References)

- [1] Giagkiozis I, Purshouse R C, Fleming P J. An overview of population-based algorithms for multi-objective optimisation[J]. International Journal of Systems Science, 2015, 46(9): 1572-1599.
- [2] Farina M, Amato P. On the optimal solution definition for many-criteria optimization problems[C]. 2002 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society Proceedings. New Orleans: IEEE, 2002: 233-238.
- [3] Wang R, Purshouse R C, Fleming P J. Preference-inspired co-evolutionary algorithm using adaptively generated goal vectors[C]. 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Cancun: IEEE, 2013: 916-923.

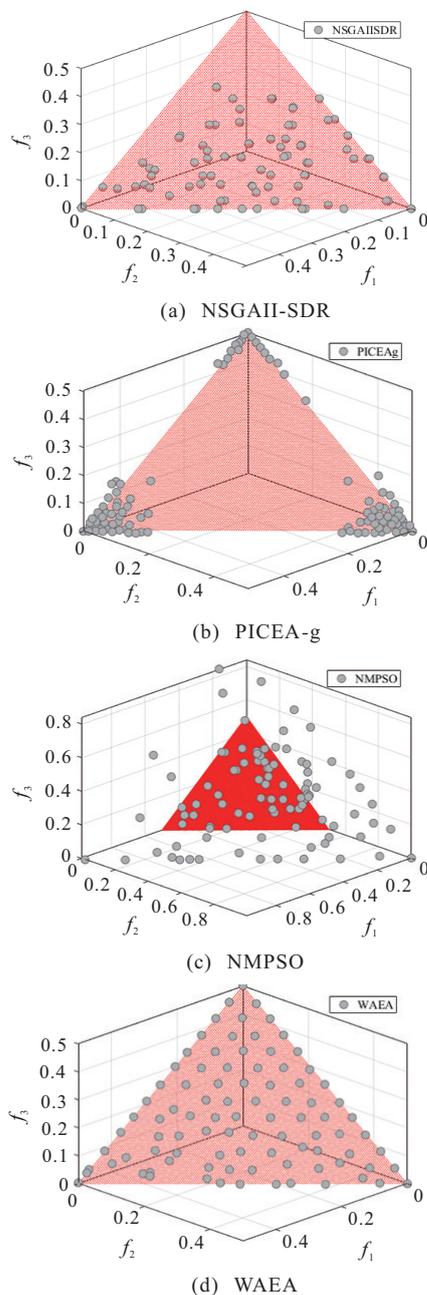


图7 第2组实验各算法在3目标DTLZ1问题上的非支配解集

- [4] 孙靖, 巩敦卫. 进化高维多目标优化研究进展[J]. 控制理论与应用, 2018, 35(7): 928-938.  
(Sun J, Gong D W. Recent advances in evolutionary many-objective optimization[J]. Control Theory & Applications, 2018, 35(7): 928-938.)
- [5] Deb K, Mohan M, Mishra S. Towards a quick computation of well-spread Pareto-optimal solutions[C]. International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. 2003: 222-236.
- [6] Yang S X, Li M Q, Liu X H, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(5): 721-736.
- [7] Yuan Y, Xu H, Wang B, et al. A new dominance relation-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 20(1): 16-37.
- [8] While L, Hingston P, Barone L, et al. A faster algorithm for calculating hypervolume[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2006, 10(1): 29-38.
- [9] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization[J]. Evolutionary Computation, 2011, 19(1): 45-76.
- [10] Zitzler E, Thiele L, Laumanns M, et al. Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2003, 7(2): 117-132.
- [11] Sun Y N, Yen G G, Yi Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 173-187.
- [12] Zhang Q F, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6): 712-731.
- [13] Das I, Dennis J E. Normal-boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems[J]. Siam Journal on Optimization, 1996, 8(3): 631-657.
- [14] Jain H, Deb K. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based nondominated sorting approach, part II: Handling constraints and extending to an adaptive approach[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(4): 602-622.
- [15] Deb K, Agrawal R B. Simulated binary crossover for continuous search space[J]. Complex Systems, 1994, 9: 1-34.
- [16] Wang R, Zhou Z B, Ishibuchi H, et al. Localized weighted sum method for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(1): 3-18.
- [17] Cheng R, Jin Y C, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016, 20(5): 773-791.
- [18] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable multi-objective optimization test problems[C]. Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. Honolulu: IEEE, 2002: 825-830.
- [19] Huband S, Hingston P, Barone L, et al. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2006, 10(5): 477-506.
- [20] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. PlatEMO: A Matlab platform for evolutionary multi-objective optimization[J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2017, 12(4): 73-87.
- [21] Beume N, Naujoks B, Emmerich M. SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 181(3): 1653-1669.
- [22] 袁源. 基于分解的多目标进化算法及其应用[D]. 北京: 清华大学, 2015.  
(Yuan Y. Decomposition-based multi-objective evolutionary algorithms and their applications[D]. Beijing: Tsinghua University, 2015.)
- [23] Li K, Deb K, Zhang Q F, et al. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 19(5): 694-716.
- [24] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 331-345.
- [25] Liu Y P, Gong D W, Sun J, et al. A many-objective evolutionary algorithm using A one-by-one selection strategy[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(9): 2689-2702.
- [26] Wang R, Purshouse R C, Fleming P J. Preference-inspired coevolutionary algorithms for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(4): 474-494.
- [27] Lin Q Z, Liu S B, Zhu Q L, et al. Particle swarm optimization with a balanceable fitness estimation for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(1): 32-46.

### 作者简介

董明刚(1977—), 男, 教授, 博士, 从事智能计算及应用、人工智能等研究, E-mail: d2015mg@qq.com;

曾慧斌(1996—), 男, 硕士生, 从事智能计算、多目标优化的研究, E-mail: zenghuibin1996@163.com;

敬超(1983—), 男, 副教授, 博士, 从事智能计算、强化学习等研究, E-mail: jingchao@glut.edu.cn.

(责任编辑: 孙艺红)