

# 控制与决策

Control and Decision

有向切换拓扑条件下多航天器分组姿态协同控制

周绍磊, 王帅磊, 刘伟

引用本文:

周绍磊, 王帅磊, 刘伟. 有向切换拓扑条件下多航天器分组姿态协同控制[J]. *控制与决策*, 2021, 36(10): 2389–2398.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0311>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[航天器输入受限的鲁棒自适应姿态跟踪控制](#)

Robust adaptive attitude tracking control of spacecraft with constrained inputs

*控制与决策*. 2021, 36(9): 2297–2304 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0013>

[多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制](#)

Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1049–1058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968>

[基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 \$H\_\infty\$ 控制](#)

Non-fragile  $H_\infty$  control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1087–1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

[输入饱和的充液航天器抗干扰有限时间滑模控制](#)

Anti-disturbance finite-time sliding mode control for liquid-filled spacecraft with input saturation

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1078–1086 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0820>

[基于模型依赖驻留时间的异步切换控制](#)

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time

*控制与决策*. 2021, 36(3): 609–618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

# 有向切换拓扑条件下多航天器分组姿态协同控制

周绍磊<sup>†</sup>, 王帅磊, 刘伟

(海军航空大学 研究生管理大队, 山东 烟台 264001)

**摘要:** 针对有向切换拓扑条件下多航天器分组姿态协同控制问题, 提出一种基于变量代换和矩阵分解的控制方法. 首先, 给出分组情况下系统 Laplacian 矩阵特征值的性质, 并对航天器姿态模型进行变量代换, 将非线性系统的分组姿态协同问题转化为线性系统的分组一致问题; 然后, 通过分解 Laplacian 矩阵, 将分组一致问题转化为线性切换系统的稳定性问题, 从而通过 Lyapunov 稳定性理论进行分析, 给出系统拓扑的最小驻留时间; 最后, 对包含两个分组的系统进行仿真, 结果表明了所提出控制方法的有效性.

**关键词:** 航天器; 姿态协同控制; 分组; 切换拓扑; 矩阵分解; 驻留时间

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0311

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 周绍磊, 王帅磊, 刘伟. 有向切换拓扑条件下多航天器分组姿态协同控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(10): 2389-2398.

## Group attitude coordinated control of multi-spacecraft with directed switching topologies

ZHOU Shao-lei<sup>†</sup>, WANG Shuai-lei, LIU Wei

(Graduate Students-Brigade, Naval Aviation University, Yantai 264001, China)

**Abstract:** A control method based on variables substitution and matrix decomposition is proposed for group attitude coordinated control of multi-spacecraft with directed switching topologies. Firstly, the paper provides the properties of the eigenvalues of the Laplacian matrix. The variable in the spacecraft attitude model is substituted, which turns the group attitude coordinated control problem of a nonlinear system into the group consensus problem of a linear system, and then it is turned into the stability problem of a switched linear system by decomposing the Laplacian matrix. It is analyzed using the Lyapunov stability theory, and the results show the minimum dwell time is presented. Simulation is carried out on a system with two subgroups, and the results show that effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** spacecraft; attitude coordinated control; group; switching topologies; matrix decomposition; dwell time

## 0 引言

随着航天器相关技术的发展及应用, 姿态协同控制问题的相关研究也得到了广泛关注. 多航天器系统的姿态协同控制问题是航天技术领域的重要问题之一, 基于多智能体理论和一致性理论, 多航天器系统的姿态协同控制问题一般采用分布式的控制结构. 目前, 采用不同的模型描述方法, 已有基于修正罗德里格斯参数<sup>[1-2]</sup>、四元数<sup>[3]</sup>以及特殊正交群<sup>[4-6]</sup>等模型的研究.

基于有向拓扑结构, 针对仅有部分个体具有领导者信息的情况, 文献[7]提出了一种有限时间姿态跟踪方法, 该方法设计了一种快速终端滑模面; 文献[8]

提出了一种有限时间观测器估计领导者的姿态; 文献[9]针对同样的问题, 提出了基于反步法的控制方法, 该方法采用了多层神经网络估计系统的不确定性. 进一步地, 考虑姿态受限的情况, 文献[10]提出了一种滑模估计器重建领导者的姿态和角速度信息.

对于无领导者的系统, 文献[11]在通信拓扑随机失效的情况下, 提出了一种使多航天器系统达到几乎必然姿态一致的控制方法. 文献[12]针对基于无向拓扑结构的多航天器编队, 设计了自适应非奇异快速终端滑模面, 并能够自由调整姿态和角速度误差的权重. 文献[13]针对带有多个领导者的无向拓扑多刚体系统设计了一种包含控制方法, 使跟随者的状态收

收稿日期: 2020-03-19; 修回日期: 2020-06-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61273058).

责任编辑: 林崇.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: zhouslsd@sina.com.

敛到领导者张成的凸包中. 文献[14]证明了对于采用四元数描述的多航天器姿态协同问题, 相比快速滑模, 终端滑模能够更快地使系统收敛. 文献[15]在事件触发机制的基础上, 设计了含有星间状态偏差的事件驱动函数, 将系统连续通信变为依赖事件的间歇通信, 从而节省了系统内的通信资源. 为了估计角速度, 文献[16]构造了扩张观测器并设计了有限时间滑模控制器, 使系统姿态在有限时间内达到一致, 提高了系统收敛的速度.

在一些任务中, 需要系统中的个体同时保持多种姿态进行作业. 例如, 协调多颗SAR卫星调整姿态以对准地面目标<sup>[3]</sup>; 或是控制无人机调整视觉设备的角度, 使整个无人机编队能够对目标进行有效监控. 这种将系统划分为不同组群并使每个组群的姿态都能收敛的情况, 称为分组姿态协同, 并可以引入分组一致的相关概念<sup>[17-18]</sup>进行解决. 分组一致是指, 对于包含若干个体的系统, 在保持拓扑结构连通性的条件下, 将系统划分为多个分组, 每个分组中个体的状态收敛到一个固定或时变状态. 文献[19]对无向拓扑多刚体系统设计了基于修正罗德里格斯参数描述的控制输入, 实现了渐近分组姿态协同, 该研究中系统拓扑是固定的. 文献[20]在每个分组中引入领导者, 并以所有领导者为节点构造了无向连通的领导者网络, 设计了领导者的控制输入, 使不同分组的领导者达到反一致, 从而通过领导者牵引跟随者, 使多航天器系统达到分组姿态协同.

现有多航天器系统的姿态协同控制研究大多是在固定拓扑上进行的, 并且系统中个体的姿态最终都能收敛到同一姿态. 而在实际应用中, 受各种因素的影响, 例如通信链接断开或增加等, 系统拓扑结构发生变化经常是不可避免的. 因此, 有必要在切换拓扑条件下开展进一步的研究. 文献[21]同时考虑了时变时滞与切换拓扑, 每一对航天器之间的时滞都不相同, 并且系统拓扑是无向的. 文献[22]在系统具有模型不确定性及外部扰动的前提下, 设计了一种包含绝对姿态误差的滑模面. 文献[23]在联合连通拓扑的基础上, 通过给定切换信号实现系统在多个非连通拓扑间的切换, 该系统中存在一个领导者, 因此首先设计了包含姿态及其导数的辅助变量, 并进一步构造跟随者与领导者的差值, 从而使系统中跟随者的姿态均能收敛到领导者的姿态. 文献[24]同样研究了带领导者的情况, 采用Euler-Lagrange形式的姿态方程, 在缺少角速度信息的条件下解决了联合连通切换拓扑姿态跟踪问题. 文献[25]考虑了避撞条件, 由于航

天器间相对距离的变化, 导致通信链接发生断开及重连, 从而系统拓扑产生切换, 该研究设计了一种鲁棒控制器, 能够在节点失效的情况下改变通信拓扑. 以上研究从多个问题入手, 对多航天器姿态协同问题进行了讨论, 但总体而言, 在切换拓扑条件下的姿态协同控制研究仍然较少.

本文在有向切换拓扑条件下, 对多航天器系统分组姿态协同控制问题进行了研究. 与文献[23-24]方法类似, 将多航天器系统的拓扑结构考虑为有向图并给定切换信号, 系统拓扑依赖信号值的变化在多个备选拓扑间切换. 这一方法的优势在于系统拓扑在任意时刻是确定的. 由于缺少对分组情况下有向拓扑结构相关性质的研究, 首先提出了3条假设条件, 以便设计符合要求的有向拓扑, 并对其进行分析. 与现有研究相比, 本文的创新之处在于: 1) 证明了分组情况下有向拓扑Laplacian矩阵特征值的性质. 若系统有向拓扑满足本文给定的假设条件, 则Laplacian矩阵的非零特征值均为正整数, 这一结论显著缩小了非零特征值的取值范围. 2) 采用变量代换的方法, 将有向切换拓扑条件下非线性的分组姿态协同问题转换为线性切换系统分组一致问题, 并进一步转换为线性切换系统的渐近稳定问题, 降低了分析难度, 便于应用Lyapunov稳定性理论进行研究.

## 1 基础知识与问题描述

### 1.1 航天器姿态动力模型

考虑由 $N$ 个航天器组成的多航天器系统, 每个航天器按照顺序记为 $1, 2, \dots, N$ . 系统中存在 $s$ 个分组, 按照顺序记为 $g_1, g_2, \dots, g_s$ . 每个分组内航天器的数量记为 $n_i$ 且 $\sum n_i = N$ . 采用修正罗德里格斯参数(modified Rodrigues parameters, MRPs)描述航天器的姿态, 系统中第 $i$ 个航天器的姿态方程为

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_i(t) = \mathbf{G}_i(t)\omega_i(t), \\ \mathbf{J}\dot{\omega}_i(t) = (\mathbf{J}\omega_i(t)) \times \omega_i(t) + \mathbf{u}_i(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\sigma_i(t) \in \mathbf{R}^3$ 为该航天器的姿态,  $\omega_i(t) \in \mathbf{R}^3$ 为该航天器的角速度,  $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 为该航天器的转动惯量, 假设系统中所有航天器的转动惯量均相同,  $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbf{R}^3$ 为航天器的控制输入,  $\mathbf{G}_i(t)$ 定义为如下算子:

$$\mathbf{G}_i(t) = \frac{1 - \|\sigma_i(t)\|^2}{4} \mathbf{I}_3 + \frac{\hat{\sigma}_i(t) + \sigma_i(t)\sigma_i^T(t)}{2}, \quad (2)$$

$\mathbf{I}$ 为单位矩阵. 映射 $\hat{x}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 表示为

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

且 $\hat{x}\mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ .

1.2 多航天器系统拓扑结构及切换

考虑到系统拓扑是切换的, 假设共有  $\kappa$  种备选拓扑, 则定义切换信号为

$$h(t) : [0, +\infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, \kappa\}. \quad (4)$$

给定系统拓扑的切换时刻序列为  $0 < t_0 < t_1 < \dots$ . 在每个时间区间  $[t_k, t_{k+1})$  内, 系统拓扑是固定的, 驻留时间为  $\tau = t_{k+1} - t_k$ . 将系统中的航天器作为节点, 与多航天器系统对应的有向图可以用  $G = (V, \varepsilon^{h(t)}, \mathbf{A}^{h(t)})$  表示. 其中:  $V = (v_1, v_2, \dots, v_N)$  为节点组成的集合,  $\varepsilon^{h(t)} \subseteq V \times V$  为边组成的集合,  $\mathbf{A}^{h(t)} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  为系统的邻接矩阵,  $a_{ij}$  为矩阵  $\mathbf{A}^{h(t)}$  中的元素. 于是  $\mathbf{A}^{h(t)} \in \mathbf{R}^{N \times N}$  可以记作分块矩阵

$$\mathbf{A}^{h(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}(t) & \mathbf{A}_{21}(t) & \dots & \mathbf{A}_{s1}(t) \\ \mathbf{A}_{12}(t) & \mathbf{A}_{22}(t) & \dots & \mathbf{A}_{s2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{1s}(t) & \mathbf{A}_{2s}(t) & \dots & \mathbf{A}_{ss}(t) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

与  $\mathbf{A}^{h(t)}$  相应的 Laplacian 矩阵为  $\mathbf{L}^{h(t)}$ , 该矩阵的元素定义为

$$\begin{cases} l_{ii}(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}, \\ l_{ij}(t) = -a_{ij}, i \neq j. \end{cases} \quad (6)$$

$\mathbf{L}^{h(t)}$  也可记作分块形式

$$\mathbf{L}^{h(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11}(t) & -\mathbf{A}_{21}(t) & \dots & -\mathbf{A}_{s1}(t) \\ -\mathbf{A}_{12}(t) & \mathbf{L}_{22}(t) & \dots & -\mathbf{A}_{s2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{A}_{1s}(t) & -\mathbf{A}_{2s}(t) & \dots & \mathbf{L}_{ss}(t) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

对于分组  $g_j$  中的航天器  $i$ , 存在映射  $\Gamma(i) = g_j$ .

1.3 相关定义、引理及假设

对于多航天器系统, 分组姿态协同定义如下.

定义1 称多航天器系统达到分组姿态协同, 当且仅当系统中航天器的姿态和角速度满足

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\sigma_i(t) - \sigma_j(t)\| = 0, \Gamma(i) = \Gamma(j); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\omega_i(t) - \omega_j(t)\| = 0, \Gamma(i) = \Gamma(j). \end{cases} \quad (8)$$

对于系统 Laplacian 矩阵, 有如下引理.

引理1 切换拓扑条件下的系统 Laplacian 矩阵  $\mathbf{L}^{h(t)}$  可以分解为  $\mathbf{L}^{h(t)} = \mathbf{M}^{h(t)} \mathbf{E}^{[26]}$ , 其中  $\mathbf{M}^{h(t)} = \mathbf{L}^{h(t)} \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1}$ ,  $\mathbf{E} = \text{diag}(\mathbf{E}_i)$ , 且有

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}_{n_i \times (n_i - 1)}. \quad (9)$$

由于系统是分组的, 每个分组都对应系统拓扑图

的一个子图. 针对系统拓扑有如下假设.

假设1 多航天器系统中, 每个分组  $g_i$  构成的子图都包含一簇有向生成树, 并且不存在环, 也不存在指向该生成树根节点的边.

假设2 对多航天器系统中任意两个分组  $g_i$  和  $g_j$  构成的一对子图, 仅存在唯一的节点  $k \in g_i$  和  $m, n \in g_j$ , 使得  $a_{mk} = 1$  且  $a_{nk} = -1$ .

假设3 对多航天器系统中的分组进行适当的编号后, Laplacian 矩阵总可以记作分块上三角矩阵, 即

$$\mathbf{L}^{h(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11}(t) & -\mathbf{A}_{21}(t) & \dots & -\mathbf{A}_{s1}(t) \\ & \mathbf{L}_{22}(t) & \dots & -\mathbf{A}_{s2}(t) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathbf{L}_{ss}(t) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

2 切换拓扑条件下分组姿态协同控制

2.1 Laplacian 矩阵特征值的性质

在展开分组姿态协同控制的研究前, 首先给定分组条件下有向拓扑 Laplacian 矩阵特征值的性质.

定理1 若包含  $s$  个分组的有向拓扑满足假设 1~假设 3, 则系统 Laplacian 矩阵具有  $s$  个零特征值, 并且其余  $N - s$  个非零特征值为正整数.

证明 当系统中任意 2 个分组间都不存在连接时, 系统拓扑由  $s$  个独立的子图组成. 不连通情况下的系统 Laplacian 矩阵记作

$$\mathbf{L}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{L}_s \end{bmatrix}. \quad (11)$$

根据假设 1,  $\mathbf{L}_i$  可以写成上三角矩阵或下三角矩阵, 因此  $\mathbf{L}_i$  的特征值等于对角线上的元素. 根据 Laplacian 矩阵的定义可知, 对角线上的元素均为非负整数, 因此  $\mathbf{L}_i$  的特征值都为非负整数. 根据假设 1 可知, 每个分组内仅有根节点的入度为零, 因此  $\mathbf{L}_i$  有且仅有一个零特征值, 其余非零特征值都为正整数. 从而  $\mathbf{L}_u$  有  $s$  个零特征值, 其余  $N - s$  个非零特征值都为正整数. 若分组间存在连接且满足假设 2 和假设 3, 则此种情况下的 Laplacian 矩阵  $\mathbf{L}_c$  可以写作

$$\mathbf{L}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \mathbf{L}_s \end{bmatrix}. \quad (12)$$

于是有

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{L}_u) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{L}_c). \quad (13)$$

$\mathbf{L}_c$  和  $\mathbf{L}_u$  具有相同的特征值, 即  $\mathbf{L}_c$  也有  $s$  个零特征值, 且其  $N - s$  个非零特征值为正整数.  $\square$

注1 分组情况下, 基于有向拓扑的相关研究中,

大多假设系统 Laplacian 矩阵的非零特征值具有正实部,但目前仍缺乏对该假设的理论支持,现有研究也没有说明如何设计拓扑结构使系统具有这样的性质. 本文首先给定了3条假设条件,并通过定理1对满足这3个假设的有向拓扑 Laplacian 矩阵非零特征值的性质进行分析,表明了满足假设的条件下, Laplacian 矩阵的非零特征值都为正整数. 这一结论显著缩小了非零特征值的取值范围,为相关研究的假设提供了理论基础,并为分组情况下有向拓扑的设计提供了依据.

**注2** 在满足假设1的条件下,每个分组的 Laplacian 矩阵的首行元素都为零. 现有基于有向拓扑的 leader-following 问题中,常见做法是将 leader 考虑为系统内的一个节点进行研究,并采用两类条件: 1) 系统内所有 follower 都能够获取 leader 的信息; 2) 系统内仅有部分 follower 能够获取 leader 的信息. 事实上,本文中每个分组的拓扑结构与第2类 leader-following 问题的拓扑结构是相同的,并且就结果而言,每个分组内航天器的姿态和角速度状态都会收敛到根节点的姿态和角速度,这与 leader-following 问题的效果和结论也是一致的. 因此,客观上说,本文同时解决了带有多个 leader 的姿态协同问题.

## 2.2 变量代换及问题转换

在设计控制输入前,首先对系统模型的变量进行适当的代换. 令

$$\begin{cases} \mathbf{q}_i(t) = \boldsymbol{\sigma}_i(t), \\ \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{G}_i(t)\boldsymbol{\omega}_i(t). \end{cases} \quad (14)$$

航天器姿态动力方程(1)可以改写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_i(t) = \mathbf{v}_i(t), \\ \dot{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{f}_i(t) + \mathbf{h}_i(t)\mathbf{u}_i(t). \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{f}_i(t) = \dot{\mathbf{G}}_i(t)\mathbf{g}_i(t) - \mathbf{G}_i(t)\mathbf{J}^{-1}\mathbf{g}_i(t) \times \mathbf{J}\mathbf{g}_i(t), \quad (16)$$

$$\mathbf{g}_i(t) = \mathbf{G}_i^{-1}(t)\mathbf{v}_i(t), \quad \mathbf{h}_i(t) = \mathbf{G}_i(t)\mathbf{J}^{-1}. \quad (17)$$

至此,变量代换完毕. 对建立在新变量  $\mathbf{q}_i(t)$  和  $\mathbf{v}_i(t)$  上的系统模型(15),设计控制输入为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(t) = & \mathbf{h}_i^{-1}(t) \left[ -\mathbf{f}_i(t) - \alpha \sum_{j \in \Gamma(i)} a_{ij}(\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t)) - \right. \\ & \left. \beta \sum_{j \in \Gamma(i)} a_{ij}(\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_j(t)) \right] + \\ & \mathbf{h}_i^{-1}(t) \sum_{j \notin \Gamma(i)} a_{ij}(\alpha \mathbf{q}_j(t) + \beta \mathbf{v}_j(t)). \end{aligned} \quad (18)$$

其中:系数  $\alpha > 0, \beta > 0$ . 将控制输入代入式(15),得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i(t) = & -\alpha \sum_{j \in \Gamma(i)} a_{ij}(\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t)) - \\ & \beta \sum_{j \in \Gamma(i)} a_{ij}(\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_j(t)) + \\ & \sum_{j \notin \Gamma(i)} a_{ij}(\alpha \mathbf{q}_j(t) + \beta \mathbf{v}_j(t)). \end{aligned} \quad (19)$$

根据假设2可知,对于所有的  $j \notin \Gamma(i)$ ,有  $\sum a_{ij} = 0$ ,于是存在  $\sum a_{ij}\mathbf{q}_i(t) = 0$  且  $\sum a_{ij}\mathbf{v}_i(t) = 0$ ,从而得到

$$\sum_{j \notin \Gamma(i)} a_{ij}(\alpha \mathbf{q}_i(t) + \beta \mathbf{v}_i(t)) = 0. \quad (20)$$

将式(20)代入(19),可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i(t) = & -\alpha \sum_{j \in \Gamma(i)} a_{ij}(\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t)) - \\ & \beta \sum_{j \in \Gamma(i)} a_{ij}(\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_j(t)) + \\ & \sum_{j \notin \Gamma(i)} a_{ij}(\alpha \mathbf{q}_j(t) + \beta \mathbf{v}_j(t)) - \\ & \sum_{j \notin \Gamma(i)} a_{ij}(\alpha \mathbf{q}_i(t) + \beta \mathbf{v}_i(t)) = \\ & -\alpha \sum_{j=1}^N a_{ij}(\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_j(t)) - \\ & \beta \sum_{j=1}^N a_{ij}(\mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_j(t)). \end{aligned} \quad (21)$$

结合式(15)和(21),并令

$$\begin{cases} \mathbf{q}(t) = [\mathbf{q}_1^T(t), \mathbf{q}_2^T(t), \dots, \mathbf{q}_N^T(t)]^T, \\ \mathbf{v}(t) = [\mathbf{v}_1^T(t), \mathbf{v}_2^T(t), \dots, \mathbf{v}_N^T(t)]^T, \end{cases} \quad (22)$$

可以得到建立在  $\mathbf{q}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$  上的闭环方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_3 \\ -\alpha \mathbf{L}^{h(t)} \otimes \mathbf{I}_3 & -\beta \mathbf{L}^{h(t)} \otimes \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

当

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}_i(t) = \mathbf{q}_j(t), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_j(t) \end{cases} \quad (24)$$

时,意味着

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma}_i(t) = \boldsymbol{\sigma}_j(t), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\omega}_i(t) = \boldsymbol{\omega}_j(t). \end{cases} \quad (25)$$

至此,便将多航天器系统的分组姿态协同控制问题转换为  $\mathbf{q}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$  的渐近分组一致问题.

对同一分组中的编号相邻的两个航天器  $i$  和  $i+1$ ,定义变量

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_i(t) = \mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_{i+1}(t), \\ \tilde{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_{i+1}(t). \end{cases} \quad (26)$$

于是得到

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_3 \mathbf{q}(t), \\ \tilde{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{E} \otimes \mathbf{I}_3 \mathbf{v}(t). \end{cases} \quad (27)$$

为便于表示,记向量  $\mathbf{z}(t)$  为

$$\mathbf{z}(t) = [\tilde{\mathbf{q}}^T(t) \ \tilde{\mathbf{v}}^T(t)]^T, \quad (28)$$

并将式(27)和(28)代入(23),得到

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{W}^{h(t)} \mathbf{z}(t), \quad (29)$$

其中

$$\mathbf{W}^{h(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N-s} \otimes \mathbf{I}_3 \\ -\alpha \mathbf{E} \mathbf{M}^{h(t)} \otimes \mathbf{I}_3 & -\beta \mathbf{E} \mathbf{M}^{h(t)} \otimes \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

$h(t)$  为这一矩阵与该信号所对应的拓扑是相关的. 当

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_i(t) = \mathbf{0}; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (31)$$

时,意味着式(24)成立. 于是渐近分组一致问题便进一步转换为渐近稳定问题.

### 2.3 分组姿态协同控制

下面给出有向切换拓扑条件下多航天器分组姿态协同控制的相关定理.

**定理 2** 在有向切换拓扑满足假设 1 和假设 3 的条件下,给定形如式(18)的控制输入,若参数  $\alpha$  和  $\beta$  满足

$$\frac{4\alpha}{\beta^2} \leq \min \lambda_i^{h(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, 3(N-s), \quad (32)$$

其中  $\lambda_i^{h(t)}$  为矩阵  $\mathbf{E} \mathbf{M}^{h(t)} \otimes \mathbf{I}_3$  的特征值,则矩阵  $\mathbf{W}^{h(t)}$  是 Hurwitz 矩阵.

**证明** 根据 Kronecker 积的性质可知,在数值上,矩阵  $\mathbf{E} \mathbf{M}^{h(t)} \otimes \mathbf{I}_3$  的特征值等于矩阵  $\mathbf{E} \mathbf{M}^{h(t)}$  的特征值. 令  $\mu$  表示矩阵  $\mathbf{W}^{h(t)}$  的特征值,于是得到

$$\det[\mu \mathbf{I} - \mathbf{W}^{h(t)}] = \prod_{i=1}^{6(N-s)} (\mu^2 + \beta \mu \lambda_i^{h(t)} + \alpha \lambda_i^{h(t)}). \quad (33)$$

令

$$\mu^2 + \beta \mu \lambda_i^{h(t)} + \alpha \lambda_i^{h(t)} = 0, \quad (34)$$

解得

$$\begin{cases} \mu_1 = -\frac{\beta \lambda_i^{h(t)}}{2} + \frac{\sqrt{\beta^2 (\lambda_i^{h(t)})^2 - 4\alpha \lambda_i^{h(t)}}}{2}, \\ \mu_2 = -\frac{\beta \lambda_i^{h(t)}}{2} - \frac{\sqrt{\beta^2 (\lambda_i^{h(t)})^2 - 4\alpha \lambda_i^{h(t)}}}{2}. \end{cases} \quad (35)$$

由于  $\lambda_i^{h(t)} > 0$  为正整数且  $\beta > 0$ ,只需

$$\beta^2 (\lambda_i^{h(t)})^2 - 4\alpha \lambda_i^{h(t)} \geq 0, \quad (36)$$

即可使  $\mu_1$  和  $\mu_2$  都为负实数. 根据式(36)得到

$$\frac{4\alpha}{\beta^2} \leq \lambda_i^{h(t)}. \quad (37)$$

当式(32)成立时,能够保证  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  都为负实数,于是矩阵  $\mathbf{W}^{h(t)}$  是 Hurwitz 矩阵.  $\square$

**定理 3** 当参数  $\alpha$  和  $\beta$  满足条件(32)时,给定正定对称矩阵  $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{6(N-s) \times 6(N-s)}$  及正定对称矩阵  $\mathbf{P}^{h(t)}$ ,使下式成立:

$$(\mathbf{W}^{h(t)})^T \mathbf{P}^{h(t)} + \mathbf{P}^{h(t)} \mathbf{W}^{h(t)} = -\mathbf{Q}. \quad (38)$$

若系统拓扑的驻留时间  $\tau$  都大于最小驻留时间

$$\tau_0 = \max \left( \frac{b}{c} \ln \frac{b}{a} \right). \quad (39)$$

其中:  $a = \min \lambda_i(\mathbf{P}^{h(t)})$ ,  $b = \max \lambda_i(\mathbf{P}^{h(t)})$ ,  $c = \min \lambda_i(\mathbf{Q})$ . 则切换系统在给定的切换信号下是渐近稳定的.

**证明** 在时间区间  $[t_k, t_{k+1})$  内选定 Lyapunov 函数为

$$V_k = \mathbf{z}^T(t) \mathbf{P}^{h(t)} \mathbf{z}(t). \quad (40)$$

显然  $V_k \geq 0$ , 并且容易得到

$$a \|\mathbf{z}(t)\|^2 \leq V_k \leq b \|\mathbf{z}(t)\|^2. \quad (41)$$

对 Lyapunov 函数求导,得到

$$\dot{V}_k = -\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) \leq -\frac{c V_k}{b}, \quad (42)$$

因此  $\dot{V}_k \leq 0$ . 由式(42),得到

$$\ln V_k(\mathbf{z}(t_{k+1})) - \ln V_k(\mathbf{z}(t_k)) \leq -\frac{c\tau}{b}. \quad (43)$$

整理得到

$$V_k(\mathbf{z}(t_{k+1})) \leq e^{-c\tau/b} V_k(\mathbf{z}(t_k)). \quad (44)$$

由式(41)和(44),可知

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}(t_{k+1})\|^2 &\leq \frac{V_k(\mathbf{z}(t_{k+1}))}{a} \leq \\ &\frac{e^{-c\tau/b} V_k(\mathbf{z}(t_k))}{a} \leq e^{-c\tau/b} \frac{b}{a} \|\mathbf{z}(t_k)\|^2. \end{aligned} \quad (45)$$

因此当

$$e^{-c\tau/b} \frac{b}{a} \leq 1 \quad (46)$$

成立时,总有

$$\|\mathbf{z}(t_{k+1})\|^2 \leq \|\mathbf{z}(t_k)\|^2 \quad (47)$$

成立. 由于拓扑切换不改变  $\mathbf{z}(t_k)$  的值,在拓扑切换时刻  $t_0, t_1, \dots$ , 可得到单调递减序列  $\|\mathbf{z}(t_0)\|^2, \|\mathbf{z}(t_1)\|^2, \dots$ , 从而可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t_k)\| = 0, \quad (48)$$

切换系统是渐近稳定的. 根据式(46),解得系统的最

小驻留时间如式(39)所示. □

综上,当切换拓扑的驻留时间满足式(39)时,切换系统是渐近稳定的,从而系统(23)能够渐近达到分组一致,多航天器系统能够渐近达到分组姿态协同.

### 3 仿真结果与验证

为了验证所设计控制方法的有效性,利用Matlab平台进行仿真.设计一个由9个航天器组成的系统,其中航天器1~航天器4组成 $g_1$ ,航天器5~航天器9组成 $g_2$ ,并假设所有航天器的转动惯量 $J/(kg \cdot m^2)$ 都为单位矩阵 $I_3$ .系统的6种备选拓扑如图1所示,解

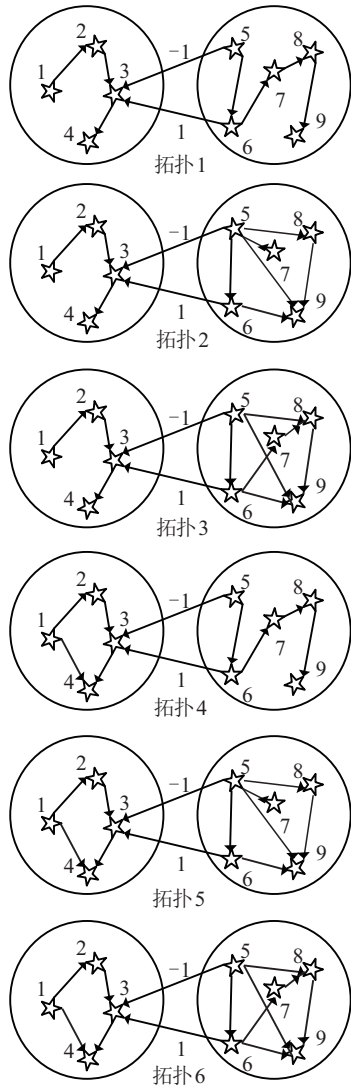


图1 6种备选拓扑

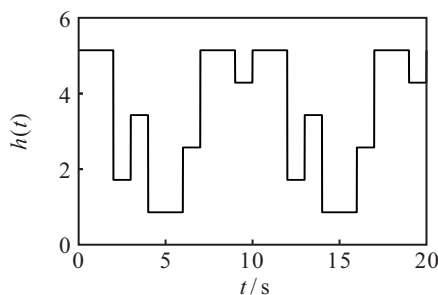
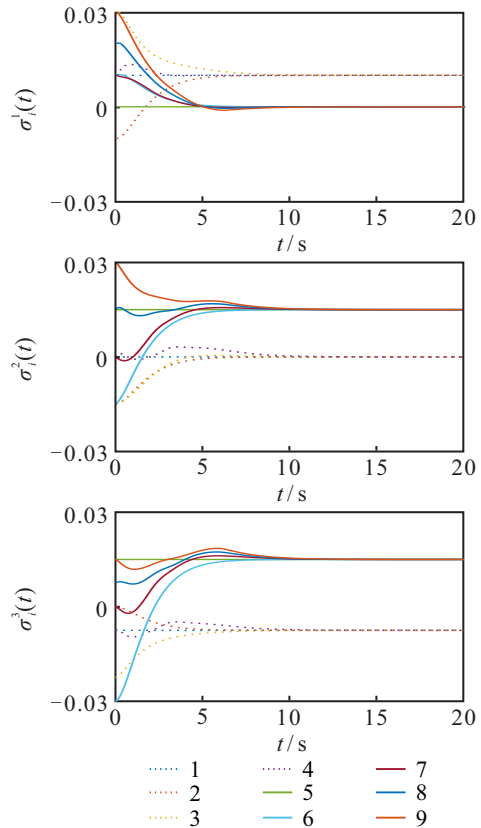


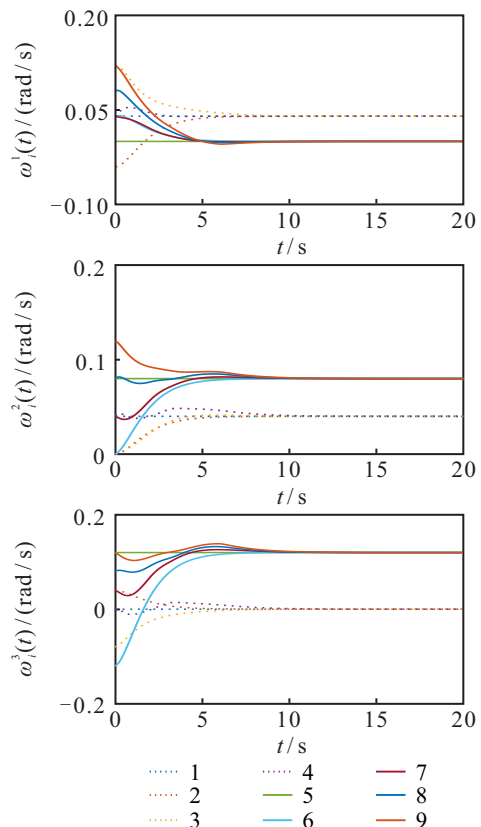
图2 系统拓扑切换信号

得  $\min \lambda_i^{h(t)} = 1$ . 根据式(32),若选取参数  $\alpha = 1$ , 则  $\beta \geq 2$ , 因此令  $\beta = 2$ .

通常在求解形如式(38)的Lyapunov方程时,可



(a) 航天器姿态时间响应在3个方向的分量



(b) 航天器角速度时间响应在3个方向的分量

图3 姿态和角速度在3个方向的分量(航天器静态)

以令  $Q = I$ . 在本仿真案例中, 由于矩阵  $W^{h(t)} \in R^{42 \times 42}$  维数较高, 仍取  $Q = I$  会导致矩阵  $P^{h(t)}$  的精度过低. 为了保证矩阵  $P^{h(t)}$  具有足够的精度, 令  $Q = 50I$ . 由式(39)计算可知, 切换拓扑的最小驻留时间为  $\tau_0 = 0.8671$  s. 在此基础上, 给定系统拓扑的切换信号如图2所示. 仿真时间共20 s, 因此多航天器系统拓扑共计切换14次. 由图2可见, 每种备选拓扑的驻留时间至少为1 s, 显然都大于最小驻留时间.

限于篇幅, 此处不列举所有航天器的初始姿态和角速度(rad/s). 为便于说明结果, 仅将两个分组的根节点, 即航天器1和航天器5的初始姿态和初始角速度列出. 首先考虑航天器1和航天器5为静态的情况, 初始姿态和角速度为

$$\begin{cases} \sigma_1 = [0.01 & 0.01 & 0]^T, \\ \omega_1 = [0 & 0 & 0]^T; \\ \sigma_5 = [0 & 0.02 & 0.03]^T, \\ \omega_5 = [0 & 0 & 0]^T. \end{cases}$$

系统中航天器姿态和角速度的时间响应在3个方向上的分量如图3所示, 纵坐标中  $\sigma$  和  $\omega$  的上角标表示3个方向的分量.

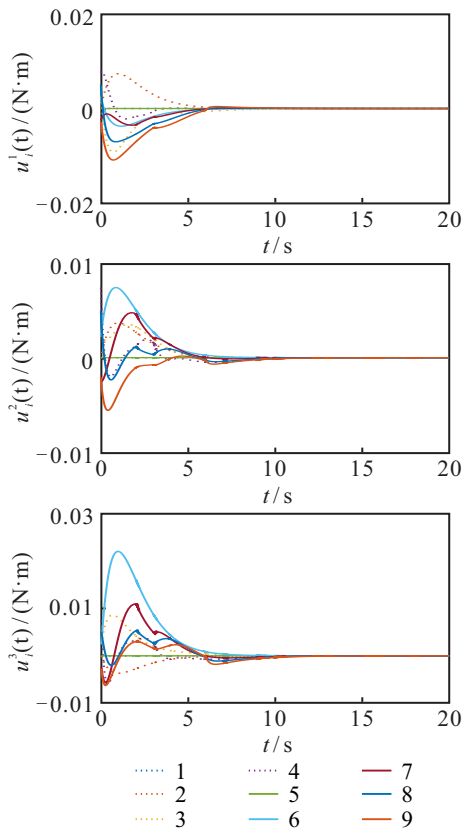
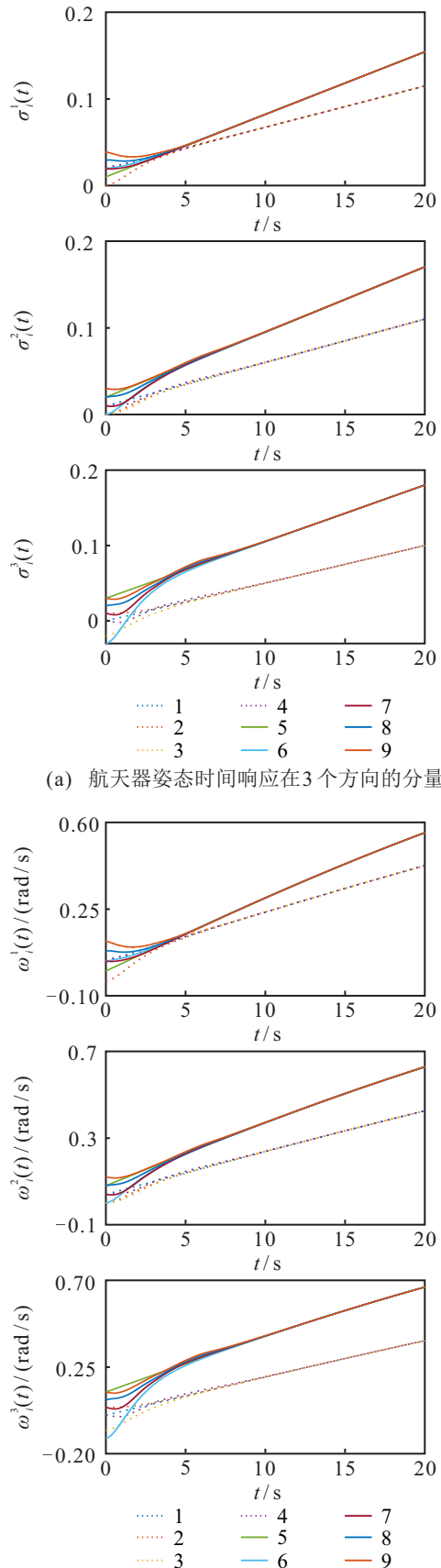


图4 控制输入在3个方向的分量(航天器静态)

由图3可见, 多航天器系统能够达到式(8)所定义的分组姿态协同, 并且由于在所有的备选拓扑中, 航天器1与航天器5分别为所在分组的根节点, 2个

分组中航天器的姿态和角速度分别收敛到航天器1与航天器5的姿态和角速度.

控制输入的时间响应如图4所示. 图4表明, 随着



(a) 航天器姿态时间响应在3个方向的分量

(b) 航天器角速度时间响应在3个方向的分量

图5 姿态和角速度在3个方向的分量(航天器动态)

多航天器系统逐渐达到分组姿态协同,同一分组中航天器间的姿态和角速度误差逐渐减小,控制输入最终收敛到零.

图3和图4的仿真案例中,航天器1和航天器5的初始角速度为零,因此其姿态和角速度是恒定的.下面考虑航天器1和航天器5为动态的情况,即初始角速度不为零.令

$$\begin{cases} \sigma_1 = [0.01 & 0.01 & 0]^T, \\ \omega_1 = [0.01 & 0 & 0]^T, \\ \sigma_5 = [0.01 & 0.01 & 0]^T, \\ \omega_5 = [0 & 0.01 & 0.02]^T. \end{cases}$$

其他航天器的初始状态和条件不变,仿真结果如图5和图6所示.

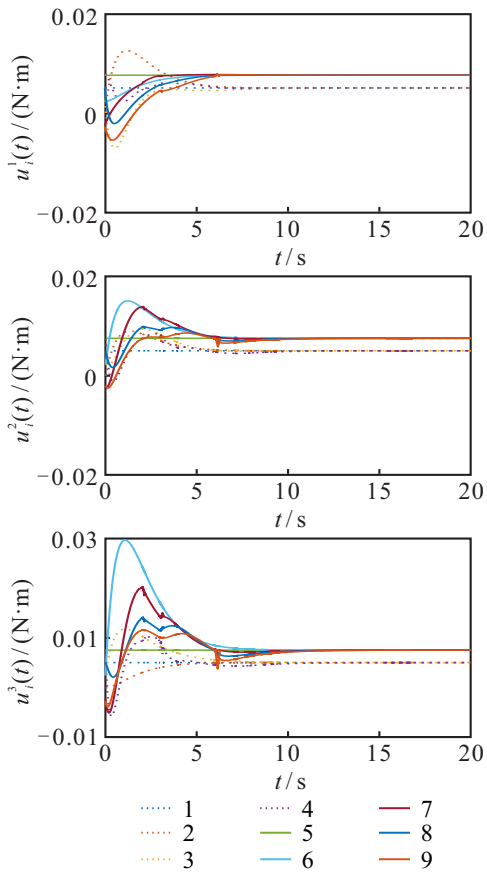
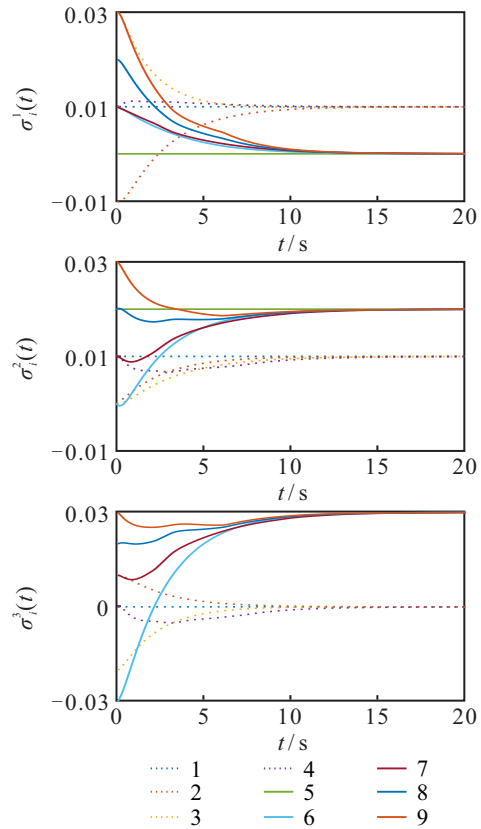


图6 控制输入在3个方向的分量(航天器动态)

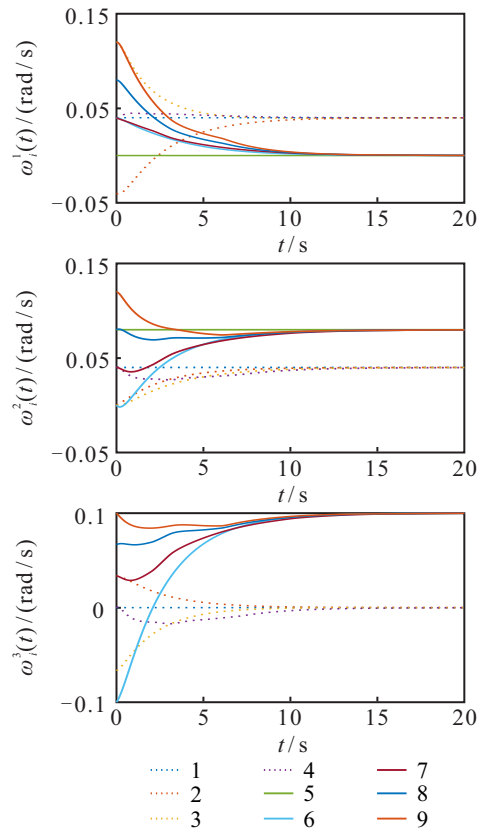
由图5和图6可见,在给定控制输入的作用下,即使航天器1和航天器5的姿态是动态的,每个分组中的其他航天器仍然能够与其达到姿态协同.

采用相同的切换信号和备选拓扑,分别采用静态和动态两种条件将文献[19]中设计的控制输入进行复现,仿真时间为20s,所得仿真结果如图7和图8所示.

由图7和图8可见,文献[19]设计的控制输入也能够使多航天器系统在有向切换拓扑条件下达到分



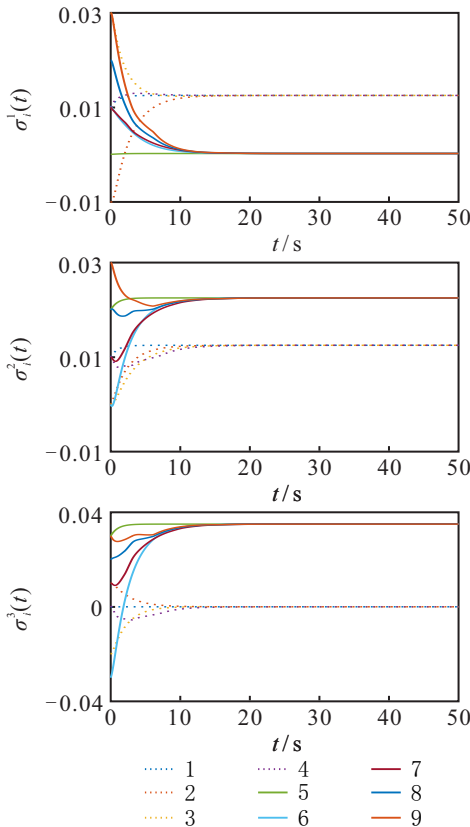
(a) 航天器姿态时间响应在3个方向的分量



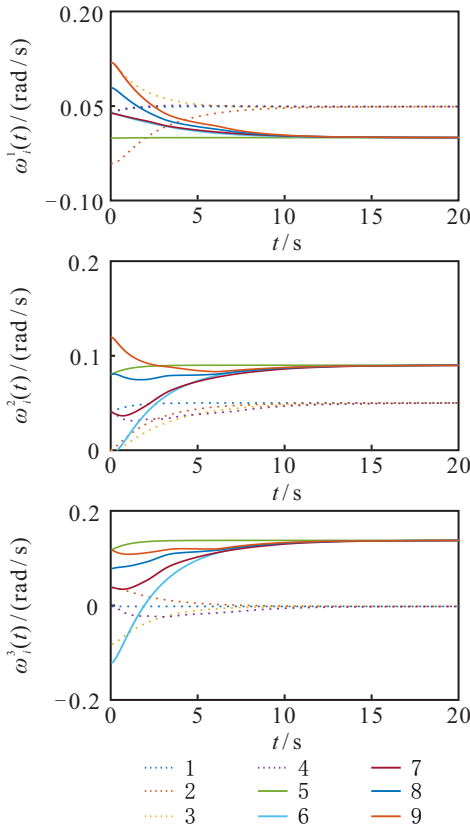
(b) 航天器角速度时间响应在3个方向的分量

图7 静态条件下文献[19]的仿真结果

组姿态协同,但所用时间较长,控制效率相比本文设计的控制输入更低.因此,从效率上而言,本文提出的控制输入具有显著优势.



(a) 航天器姿态时间响应在3个方向的分量



(b) 航天器角速度时间响应在3个方向的分量

图8 动态条件下文献[19]的仿真结果

### 4 结论

本文研究了有向切换拓扑条件下多航天器系统的姿态分组姿态协同问题. 所提出的假设条件保证

了Laplacian矩阵的非零特征值为正整数. 在此基础上进行变量代换, 实现了分组姿态协同问题到切换系统稳定问题的转换. 针对分组内根节点为静态的和动态的两种情况, 所设计的控制输入均能使系统达到分组姿态协同. 由于系统模型较为理想, 后续研究将继续考虑带有扰动的情况.

### 参考文献(References)

[1] Ren W. Distributed cooperative attitude synchronization and tracking for multiple rigid bodies[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2009, 18(2): 383-392.

[2] 党宏涛, 伊国兴, 李清华. 基于有向图的航天器编队飞行自适应姿态协同控制[J]. 导航定位与授时, 2015, 2(2): 7-12.  
(Dang HT, Yi G X, Li Q H. Adaptive attitude cooperative control for spacecraft formation flying under directed communication topology[J]. Navigation Positioning & Timing, 2015, 2(2): 7-12.)

[3] Fu J B, Liu M, Li H Y, et al. Coordinated attitude control for synthetic aperture radar satellites with quantization and communication delay[J]. International Journal of Control, Automation, and Systems, 2019, 17(7): 1770-1780.

[4] 马鸣宇, 董朝阳, 马思迁, 等. 基于SO(3)的多四旋翼无人机编队协同控制[J]. 控制理论与应用, 2018, 35(9): 1229-1238.  
(Ma M Y, Dong C Y, Ma S Q, et al. Coordinated control of multiple quadrotors formation on SO(3)[J]. Control Theory & Applications, 2018, 35(9): 1229-1238.)

[5] 马鸣宇, 董朝阳, 马思迁, 等. 多航天器反步滑模SO(3)协同控制[J]. 宇航学报, 2018, 39(6): 664-673.  
(Ma M Y, Dong C Y, Ma S Q, et al. Coordinated attitude control of multiple spacecraft via backstepping sliding mode method on SO(3)[J]. Journal of Astronautics, 2018, 39(6): 664-673.)

[6] 马鸣宇, 董朝阳, 王青, 等. 基于时变增益ESO的多航天器SO(3)姿态协同控制[J]. 北京航空航天大学学报, 2018, 44(9): 1797-1807.  
(Ma M Y, Dong C Y, Wang Q, et al. Cooperative attitude control on SO(3) for multiple spacecraft with time-varying gain ESO[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2018, 44(9): 1797-1807.)

[7] 张海博, 胡庆雷, 马广富, 等. 多航天器系统分布式有限时间姿态协同跟踪控制[J]. 控制与决策, 2014, 29(9): 1593-1598.  
(Zhang H B, Hu Q L, Ma G F, et al. Distributed finite-time attitude coordinated tracking control for multiple spacecraft systems[J]. Control and Decision, 2014, 29(9): 1593-1598.)

- 2014, 44(9): 1593-1598.)
- [8] Cheng Y Y, Du H, He Y G, et al. Distributed finite-time attitude regulation for multiple rigid spacecraft via bounded control[J]. *Information Sciences*, 2016, 328: 144-157.
- [9] 王文佳, 李传江, 孙延超, 等. 考虑状态约束的航天器编队分布式姿态协同跟踪控制[J]. *控制与决策*, 2018, 33(9): 1584-1590.  
(Wang W J, Li C J, Sun Y C, et al. Distributed attitude coordinated tracking control for spacecraft formation with state constraints[J]. *Control and Decision*, 2018, 33(9): 1584-1590.)
- [10] Li D Y, Ma G F, Li C J, et al. Distributed attitude coordinated control of multiple spacecraft with attitude constraints[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2018, 54(5): 2233-2245.
- [11] Rezaee H, Abdollahi F. Almost sure attitude consensus in multispacecraft systems with stochastic communication links[J]. *IFAC-Papers OnLine*, 2017, 50(1): 9392-9397.
- [12] Zhang C X, Wang J H, Zhang D X, et al. Synchronization and tracking of multispacecraft formation attitude control using adaptive sliding mode[J]. *Asian Journal of Control*, 2019, 21(2): 832-846.
- [13] Ma L, Wang S C, Min H B, et al. Distributed finite-time attitude containment control of multi-rigid-body systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(5): 2187-2203.
- [14] Zong Q, Shao S K. Decentralized finite-time attitude synchronization for multiple rigid spacecraft via a novel disturbance observer[J]. *Isa Transactions*, 2016, 65: 150-163.
- [15] 王智鹏, 郭凤至, 孙兆伟, 等. 事件驱动的卫星编队姿态分布式协同控制[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2018, 50(10): 41-47.  
(Wang Z P, Guo F Z, Sun Z W, et al. Event-triggered distributed attitude coordination control of satellite formation[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2018, 50(10): 41-47.)
- [16] 周健, 龚春林, 粟华, 等. 复杂约束下的编队姿态有限时间协同控制方法[J]. *宇航学报*, 2018, 39(12): 1340-1347.  
(Zhou J, Gong C L, Li H, et al. Finite-time distributed synchronization of spacecraft formation attitude with complex constraints[J]. *Journal of Astronautics*, 2018, 39(12): 1340-1347.)
- [17] Yu J Y, Wang L. Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays[J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(6): 340-348.
- [18] Yu J Y, Wang L. Group consensus of multi-agent systems with directed information exchange[J]. *International Journal of Systems Science*, 2012, 43(2): 334-348.
- [19] 周绍磊, 王帅磊, 刘伟, 等. 基于分组一致性的刚体集群姿态协同控制[J]. *中国科学: 技术科学*, 2020, 50(5): 493-505.  
(Zhou S L, Wang S L, Liu W, et al. Rigid body swarms attitude cooperative control based on group consensus[J]. *Scientia Sinica Technologica*, 2020, 50(5): 493-505.)
- [20] Weng S X, Dong Y, Xie X P, et al. Distributed event-triggered cooperative attitude control of multiple groups of rigid bodies on manifold  $SO(3)$ [J]. *Information Sciences*, 2016, 370: 636-649.
- [21] Meng Z Y, You Z, Li G H, et al. Cooperative attitude control of multiple rigid bodies with multiple time-varying delays and dynamically changing topologies[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010: 621594(1-19).
- [22] Liang H Z, Sun Z W, Wang J Y. Robust decentralized attitude control of spacecraft formations under time-varying topologies, model uncertainties and disturbances[J]. *Acta Astronautica*, 2012, 81(2): 445-455.
- [23] Ma L, Wang S C, Min H B, et al. Distributed attitude consensus for multiple rigid spacecraft under jointly connected switching topologies[J]. *Journal of Control Science and Engineering*, 2016: 2540914(1-9).
- [24] Yang H J, You X, Hua C C. Attitude tracking control for spacecraft formation with time-varying delays and switching topology[J]. *Acta Astronautica*, 2016, 126: 98-108.
- [25] Zhang J Q, Ye D, James D B, et al. Finite-time relative orbit-attitude tracking control for multi-spacecraft with collision avoidance and changing network topologies[J]. *Advances in Space Research*, 2019, 63(3): 1161-1175.
- [26] Liu W, Zhou S L, Wu Q P, et al.  $H_\infty$  consensus of multi-agent systems in directed networks with Lipschitz non-linear dynamics[J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2017, 39(12): 1877-1884.

## 作者简介

周绍磊(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器控制与制导模式识别与机器学习等研究, E-mail: zhoulsd@sina.com;

王帅磊(1991—), 男, 博士生, 从事多智能体系统的研究, E-mail: 201011231807@mail.bnu.edu.cn;

刘伟(1986—), 男, 讲师, 博士, 从事飞行器编队控制、多智能体系统一致性等研究, E-mail: weilu.sd.china@hotmail.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)