

# 控制与决策

Control and Decision

## 随机变批次长度的反馈辅助PD型量化迭代学习控制

王晶, 周楠, 王森, 沈栋, 李伯群

引用本文:

王晶, 周楠, 王森, 等. 随机变批次长度的反馈辅助PD型量化迭代学习控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(10): 2569–2576.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0273>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 航天器输入受限的鲁棒自适应姿态跟踪控制

Robust adaptive attitude tracking control of spacecraft with constrained inputs

控制与决策. 2021, 36(9): 2297–2304 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0013>

### 基于数据驱动的非线性网络系统自适应迭代学习控制

Data driven adaptive learning control of nonlinear network system

控制与决策. 2021, 36(6): 1523–1528 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1182>

### 输入约束不确定系统的点对点迭代学习控制与优化

Point-to-point iterative learning control and optimization for uncertain systems with constrained input

控制与决策. 2021, 36(6): 1435–1441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0908>

### 基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm

控制与决策. 2021, 36(1): 173–179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

### 一种基于稀疏系数匹配学习的图像去雾算法

An image dehazing method based on learning framework with sparse coefficient matching

控制与决策. 2020, 35(11): 2797–2802 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1764>

# 随机变批次长度的反馈辅助PD型量化迭代学习控制

王晶<sup>1†</sup>, 周楠<sup>1</sup>, 王森<sup>1</sup>, 沈栋<sup>2</sup>, 李伯群<sup>3</sup>

(1. 北京化工大学信息科学与技术学院, 北京 100029; 2. 中国人民大学数学学院, 北京 100872;  
3. 辽宁科技大学电子与信息工程学院, 辽宁鞍山 114051)

**摘要:** 针对离散线性系统, 研究批次长度随机变化的反馈辅助PD型量化迭代学习控制问题. 考虑系统信号经量化后传输到控制器或执行器的情况, 给出两种量化方案: 跟踪误差信号量化和控制输入信号量化. 基于两种不同的量化信号, 在批次长度和初始条件随机变化前提下设计反馈辅助PD型迭代学习控制算法. 采用扇形界的处理方法和堆积系统框架, 推导数学期望下的学习收敛条件: 在误差信号量化情况下, 所提出控制算法可以保证跟踪误差渐近收敛到零; 在控制输入信号量化情况下, 所提出控制算法能够保证跟踪误差有界收敛. 仿真示例对比验证了两种量化方案下所提出方法的有效性和优越性.

**关键词:** 迭代学习控制; 反馈辅助PD策略; 数据量化; 随机变批次长度; 初始状态条件

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0273

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 王晶, 周楠, 王森, 等. 随机变批次长度的反馈辅助PD型量化迭代学习控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(10): 2569-2576.

## Feedback-assisted PD-type quantized iterative learning control with randomly iteration varying lengths

WANG Jing<sup>1†</sup>, ZHOU Nan<sup>1</sup>, WANG Sen<sup>1</sup>, SHEN Dong<sup>2</sup>, LI Bo-qun<sup>3</sup>

(1. College of Information Science and Technology, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China; 2. School of Mathematics, Renmin University of China, Beijing 100872, China; 3. School of Electronic and Information Engineering, University of Science and Technology LiaoNing, Anshan 114051, China)

**Abstract:** The feedback-assisted PD-type quantized iterative learning control problem is studied for discrete linear systems with iteration-varying trial lengths. Considering that the system signal is transmitted to the controller or actuator after being quantized. Two quantization schemes are given, including tracking error signal quantization and control input signal quantization. In the case of iteration-varying trial lengths and iteration-varying initial state conditions, a feedback-assisted PD-type update law is developed based on the quantized signal. The learning convergence condition under mathematical expectations derived with the sector bound method and the lifting representation: tracking error signal quantization can obtain zero tracking error, and control input signal quantization only guarantee that the tracking error converges to a bound. Simulation examples are provided to demonstrate the effectiveness and superiority of the proposed scheme under the two quantization schemes.

**Keywords:** iterative learning control; feedback-assisted PD strategy; data quantization; iteration-varying lengths; initial state conditions

## 0 引言

自 Arimoto 提出迭代学习控制(ILC)以来, 其研究在理论和应用领域均受到广泛关注, 并取得了诸多突出成果<sup>[1]</sup>. 传统 ILC 需要确保各种重复条件, 如相同的跟踪轨迹、初始状态、批次长度、系统设备等<sup>[2]</sup>. 但在工程领域, 严格的重复性条件很难实时保证, 阻碍了 ILC 的实际应用, 促使学者们致力于放宽

或者消除重复性条件.

本文重点研究批次长度可变的迭代学习控制. 实际工程中考虑到安全性和/或受控系统的运行能力, 批次长度可能是迭代变化的, 如交通系统<sup>[3]</sup>、机械臂<sup>[4]</sup>、双足机器人步进系统<sup>[5]</sup>、列车控制系统<sup>[6]</sup>等. 针对这些迭代批次长度不同的系统, 提出新的变批次长度的迭代学习控制方法. 文献[7-8]在线性离

收稿日期: 2020-03-12; 修回日期: 2020-06-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61973023, 61573050, 61673045); 北京市自然科学基金项目(4202052).

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: jwang@mail.buct.edu.cn.

散和连续系统中引入迭代平均算子,得到了数学期望下的学习收敛条件.文献[9]提出了非线性系统的自适应ILC,采用复合能量函数(CEF)完成系统的收敛性分析.文献[10]针对非线性分数阶微分系统设计一种包含积分项的非线性输入输出方程ILC,给出了几类具有局部平均算子的学习律的收敛性分析结果.文献[11]针对一类批次长度变化的非线性多智能体系统一致性跟踪问题,引入随机变量描述非均匀现象,提出一种分布式迭代学习控制方法.文献[12]引入随机矩阵和迭代平均算子,给出了随机变批次长度离散线性时变/时不变系统ILC的统一表达式.

近20年来,网络控制系统(NCS)在自动控制领域引起了广泛关注.为了满足系统带宽要求,量化数据是一种有效的技术手段,但基于数据量化的ILC设计及性能分析还处于起步阶段.文献[13]给出了量化ILC的早期研究,表明量化输出数据时跟踪误差仅收敛到一个小范围,其上限取决于量化密度.为实现零误差跟踪性能,文献[14]提出量化跟踪误差方法,使用P型迭代学习律保证零误差收敛.文献[15]提出量化控制输入更新信号,采用二维模型理论给出了系统渐近稳定性条件.此外,在随机系统也取得了一定的成果<sup>[16]</sup>.上述工作只考虑相同批次长度的量化ILC,且多采用典型的开环学习方式.在实际中,将反馈控制与ILC结合成闭环学习方法,修正更及时,例如文献[17]提出的反馈辅助ILC算法,通过较少次迭代即可达到更优的性能.

变长度和量化都是系统信息的损失,本文旨在探讨数据在两种损失情形下的ILC控制.主要内容如下:在离散线性系统下,考虑两种量化方案,并给出了批次长度和初始状态随机变化条件下的反馈辅助PD型量化迭代学习控制器设计;采用堆积系统框架,推导了所提控制算法的收敛条件;通过数值仿真对比反馈辅助PD型量化学习律与P型、PD型量化学习律的控制效果,验证了所提出方法可以很好地提高学习过程的收敛速度.

## 1 问题提出

考虑如下离散线性时不变系统:

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= Ax_k(t) + Bu_k(t), \\ y_k(t) &= Cx_k(t). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $k = 1, 2, \dots$ 为迭代次数; $t \in \{0, 1, \dots, N_k\}$ 为迭代中的不同时刻; $x_k(t)$ 、 $u_k(t)$ 、 $y_k(t)$ 分别为状态、输入和输出; $A$ 、 $B$ 、 $C$ 为适当维数的矩阵,满足 $CB$ 列满秩. $CB$ 列满秩是ILC收敛的一个充分必要

条件<sup>[18]</sup>,其物理意义是系统相对阶数为1.定义期望轨迹 $y_d(t)$ , $t \in \{0, 1, \dots, N_d\}$ .

**假设1** 期望轨迹 $y_d(t)$ 可实现,即存在唯一的控制输入 $u_d(t)$ 和一个期望的初始状态 $x_d(0)$ ,使得

$$\begin{aligned} x_d(t+1) &= Ax_d(t) + Bu_d(t), \\ y_d(t) &= Cx_d(t). \end{aligned} \quad (2)$$

**假设2** 初始状态 $x_k(0)$ 在围绕 $x_d(0)$ 的小范围内随机变化,其数学期望满足 $E\{x_k(0)\} = x_d(0)$ .

定义超向量 $\mathbf{u}_k$ 、 $\mathbf{y}_k$ 和 $\mathbf{e}_k$ ,得到等价的堆积系统

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= H\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k, \\ \mathbf{e}_k &= \mathbf{y}_d - \mathbf{y}_k. \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= [u_k(0), u_k(1), \dots, u_k(N_d - 1)]^T, \\ \mathbf{y}_k &= [y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(N_d)]^T, \\ \mathbf{e}_k &= [e_k(1), e_k(2), \dots, e_k(N_d)]^T, \\ \mathbf{d}_k &= [CAx_1(0), CA^2x_2(0), \dots, CA^{N_d}x_k(0)]^T, \\ H &= \begin{bmatrix} h_1 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_d} & h_{N_d-1} & \dots & h_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$\mathbf{d}_k$ 为相应的初始状态, $H$ 为下三角Toeplitz矩阵, $h_i = CA^{i-1}B$ , $i \in N_d$ .

同理,系统(2)可重新描述为

$$\mathbf{y}_d = H\mathbf{u}_d + \mathbf{d}_d. \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_d &= [u_d(0), u_d(1), \dots, u_d(N_d - 1)]^T, \\ \mathbf{y}_d &= [y_d(1), y_d(2), \dots, y_d(N_d)]^T, \\ \mathbf{d}_d &= [CAx_d(0), CA^2x_d(0), \dots, CA^{N_d}x_d(0)]^T. \end{aligned}$$

记 $N_d$ 为预期的迭代长度, $N_k$ 为不同批次内随机变化的实际迭代长度, $N_m$ 为最小的迭代长度.本文只考虑实际长度不大于预期长度的情况,即 $N_k$ 在集合 $\{N_m, N_m + 1, \dots, N_d\}$ 内随机变化.简单地将 $N_d - N_k$ 缺失时间上的跟踪误差设置为零,因此改进的跟踪误差定义<sup>[19]</sup>为

$$e_k^*(t) = \begin{cases} e_k(t), & 0 \leq t \leq N_k; \\ 0, & N_k + 1 \leq t \leq N_d. \end{cases} \quad (5)$$

其中 $e_k(t) \triangleq y_d(t) - y_k(t)$ 为原始跟踪误差.

为了描述迭代长度的随机性,建立 $N_k$ 的模型.记 $j \triangleq N_d - N_m + 1$ 为可能的取值数量,令迭代长度取值 $N_m, \dots, N_d$ 的概率分别是 $p_1, \dots, p_j$ ,那么有

$p_i > 0, 1 \leq i \leq j$ , 且  $p_1 + p_2 + \dots + p_j = 1$ .

沿时间轴折叠, 将实际的跟踪误差描述为

$$\mathbf{e}_k^* = \underbrace{[e_k(1), \dots, e_k(N_k)]}_{N_k}, 0, \dots, 0]^T.$$

定义随机矩阵  $\Psi_k$ , 有

$$\Psi_k = \text{diag}\{1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}.$$

那么改进的跟踪误差可表示为

$$\mathbf{e}_k^* = \Psi_k \mathbf{e}_k. \tag{6}$$

计算  $\Psi_k$  的数学期望, 有

$$E(\Psi_k) = \sum_1^j \Psi_k p_i = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1, \sum_1^j p_i, \dots, p_i\} \triangleq \bar{P}.$$

采用对数量化器, 定义  $U$  为量化级数, 有

$$U = \{\pm z_i : z_i = \mu^i z_0, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \cup \{0\},$$

$$0 < \mu < 1, z_0 > 0, \tag{8}$$

其中  $\mu$  为量化密度. 定义  $Q(\cdot)$  为所选量化器, 有

$$Q(v) = \begin{cases} z_i, & \frac{1}{1+\zeta} z_i < v \leq \frac{1}{1-\zeta} z_i; \\ 0, & v = 0; \\ -Q(-v), & v < 0. \end{cases} \tag{9}$$

其中:  $v$  为任意常数,  $\zeta = \frac{1-\mu}{1+\mu}$ . 该量化器对称且时不变, 其量化密度与级数均与系统不稳定性有关<sup>[20]</sup>.

采用扇形界性质处理量化误差<sup>[21]</sup>, 有

$$Q(e_k(t)) - e_k(t) = \Delta e_k(t) \cdot e_k(t),$$

$$|\Delta e_k(t)| \leq \zeta. \tag{10}$$

**引理1** 矩阵  $A \in R^{n \times n}$  如果满足  $\rho(A) < 1$ , 其中  $\rho(A)$  为矩阵  $A$  的谱半径, 则至少存在一个矩阵范数  $\|\cdot\|_S$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\|A\|_S)^k = 0$ .

根据量化器位置不同, 考虑两种量化 ILC 方案.

**方案1** 量化跟踪误差信号.

改进前次和当前次迭代输出信号, 经量化后构成控制输入修正项. 提出反馈辅助PD型量化 ILC

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_1 Q(e_k^*(t+1)) + \Gamma_2 Q(e_k^*(t)) + K Q(e_{k+1}^*(t)). \tag{11}$$

如果学习增益  $\Gamma_2 = 0, K = 0$ , 则为P型 ILC, 有

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_1 Q(e_k^*(t+1)). \tag{12}$$

如果学习增益  $K = 0$ , 则为PD型 ILC, 有

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_1 Q(e_k^*(t+1)) + \Gamma_2 Q(e_k^*(t)). \tag{13}$$

其中:  $e_k^*(t)$  为误差信号改进,  $\Gamma_1, \Gamma_2, K$  为学习增益.

**方案2** 量化控制输入信号.

改进前次和当前次迭代输出信号, 构成控制输入修正项, 控制输入  $u_{k+1}(t)$  经量化后, 再传输到执行器, 即对象端实际接收的控制输入信号为  $\bar{u}_{k+1}(t)$ . 提出反馈辅助PD型量化 ILC

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_1 e_k^*(t+1) + \Gamma_2 e_k^*(t) + K e_{k+1}^*(t),$$

$$\bar{u}_{k+1}(t) = Q(u_{k+1}(t)). \tag{14}$$

如果学习增益  $\Gamma_2 = 0, K = 0$ , 则为P型 ILC, 有

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_1 e_k^*(t+1),$$

$$\bar{u}_{k+1}(t) = Q(u_{k+1}(t)). \tag{15}$$

如果学习增益  $K = 0$ , 则为PD型 ILC, 有

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_1 e_k^*(t+1) + \Gamma_2 e_k^*(t),$$

$$\bar{u}_{k+1}(t) = Q(u_{k+1}(t)). \tag{16}$$

其中:  $e_k^*(t)$  为误差信号改进,  $\Gamma_1, \Gamma_2, K$  为学习增益.

## 2 主要结论

利用堆积系统, 给出两种量化 ILC 的收敛条件.

### 2.1 方案1收敛性分析

**定理1** 对于系统(1)和更新律(11), 假设1和假设2成立, 如果满足下列条件:

$$\frac{|1 - p_i h_1 \Gamma_1 - p_i h_1 \Gamma_2| + \zeta |p_i h_1 \Gamma_1| + \zeta |p_i h_1 \Gamma_2|}{|1 + p_i h_1 K| + \zeta |p_i h_1 K|} < 1,$$

则系统可实现零误差跟踪,  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(e_k) = 0, \forall t$ .

**证明** 根据扇形界性质(10), 学习律(11)写为

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma_1 (1 + \Delta e_k^*(t+1)) e_k^*(t+1) + \Gamma_2 (1 + \Delta e_k^*(t)) e_k^*(t) + K (1 + \Delta e_{k+1}^*(t)) e_{k+1}^*(t). \tag{17}$$

结合式(6), 将式(17)改写为超向量形式, 有

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + L_1 \mathbf{e}_k^* + L_2 \mathbf{e}_k^* + L_3 \mathbf{e}_{k+1}^* = \mathbf{u}_k + L_1 \Psi_k \mathbf{e}_k + L_2 \Psi_k \mathbf{e}_k + L_3 \Psi_k \mathbf{e}_{k+1}. \tag{18}$$

其中

$$L_1 = \text{diag}(\Gamma_1 (1 + \Delta e_k^*(1)) \quad \Gamma_1 (1 + \Delta e_k^*(2)) \quad \dots \rightarrow \leftarrow \Gamma_1 (1 + \Delta e_k^*(N_d))),$$

$$L_2 = \text{diag}(\Gamma_2 (1 + \Delta e_k^*(0)) \quad \Gamma_2 (1 + \Delta e_k^*(1)) \quad \dots \rightarrow$$

$$\leftarrow \Gamma_2(1 + \Delta e_k^*(N_d - 1))),$$

$$L_3 =$$

$$\text{diag}(K(1 + \Delta e_k^*(0)) \quad K(1 + \Delta e_k^*(1)) \quad \dots \rightarrow$$

$$\leftarrow K(1 + \Delta e_k^*(N_d - 1))).$$

定义  $\delta \mathbf{u}_k \triangleq \mathbf{u}_d - \mathbf{u}_k$ ,  $\mathbf{u}_d$  两边同时减去式(18),得

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_{k+1} &= \delta \mathbf{u}_k - L_1 \mathbf{e}_k^* - L_2 \mathbf{e}_k^* - L_3 \mathbf{e}_{k+1}^* = \\ \delta \mathbf{u}_k - L_1 \Psi_k \mathbf{e}_k - L_2 \Psi_k \mathbf{e}_k - L_3 \Psi_k \mathbf{e}_{k+1}. \end{aligned} \quad (19)$$

由式(3)和(4)得到

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_d - \mathbf{y}_k = H \delta \mathbf{u}_k + \mathbf{d}_d - \mathbf{d}_k. \quad (20)$$

将式(20)代入(19),得

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_{k+1} &= \\ (I - L_1 \Psi_k H) \delta \mathbf{u}_k - L_2 \Psi_k H \delta \mathbf{u}_k - \\ L_3 \Psi_k H \delta \mathbf{u}_{k+1} - L_1 \Psi_k (\mathbf{d}_d - \mathbf{d}_k) - \\ L_2 \Psi_k (\mathbf{d}_d - \mathbf{d}_k) - L_3 \Psi_k (\mathbf{d}_d - \mathbf{d}_{k+1}). \end{aligned} \quad (21)$$

由假设2可知

$$E(\mathbf{d}_d - \mathbf{d}_k) = E(\mathbf{d}_d) - E(\mathbf{d}_k) = 0. \quad (22)$$

式(21)包含随机因子  $\Psi_k$ , 且与  $\delta \mathbf{u}_k$ 、 $\delta \mathbf{u}_{k+1}$  无关, 结合式(7)和(22), 对式(21)两端取期望, 得

$$\begin{aligned} E(\delta \mathbf{u}_{k+1}) &= \\ (I + L_3 \bar{P}H)^{-1} (I - L_1 \bar{P}H - L_2 \bar{P}H) E(\delta \mathbf{u}_k). \end{aligned} \quad (23)$$

对式(23)两边取范数, 得

$$\begin{aligned} \|E(\delta \mathbf{u}_{k+1})\| &\leq \\ \|(I + L_3 \bar{P}H)^{-1} (I - L_1 \bar{P}H - L_2 \bar{P}H)\| \|E(\delta \mathbf{u}_k)\|. \end{aligned} \quad (24)$$

记  $M = (I + L_3 \bar{P}H)^{-1} (I - L_1 \bar{P}H - L_2 \bar{P}H)$ , 矩阵  $M$  是一个下三角矩阵, 其对角线元素为

$$\begin{bmatrix} \frac{1 - h_1 \Gamma_1 (1 + \Delta e_k^*(1)) - h_1 \Gamma_2 (1 + \Delta e_k^*(0))}{1 + h_1 K (1 + \Delta e_k^*(0))} \\ \frac{1 - h_1 \Gamma_1 (1 + \Delta e_k^*(2)) - h_1 \Gamma_2 (1 + \Delta e_k^*(1))}{1 + h_1 K (1 + \Delta e_k^*(1))} \\ \vdots \\ \frac{1 - p_i h_1 \Gamma_1 (1 + \Delta e_k^*(N_d)) - p_i h_1 \Gamma_2 (1 + \Delta e_k^*(N_d - 1))}{1 + p_i h_1 K (1 + \Delta e_k^*(N_d - 1))} \end{bmatrix}.$$

根据引理1, 若对于所有  $k$ , 满足  $\rho(M) < 1$ , 则总可以找到一个适当的范数矩阵使得  $\|M\| \leq \sigma < 1$ . 此时由式(24)可知,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E(\delta \mathbf{u}_k)\| = 0$ .

结合式(10)扇形界性质可知

$$\rho(M) \leq$$

$$\frac{|1 - p_i h_1 \Gamma_1 - p_i h_1 \Gamma_2| + \zeta |p_i h_1 \Gamma_1| + \zeta |p_i h_1 \Gamma_2|}{|1 + p_i h_1 K| + \zeta |p_i h_1 K|}.$$

因此, 若满足

$$\frac{|1 - p_i h_1 \Gamma_1 - p_i h_1 \Gamma_2| + \zeta |p_i h_1 \Gamma_1| + \zeta |p_i h_1 \Gamma_2|}{|1 + p_i h_1 K| + \zeta |p_i h_1 K|} < 1,$$

则  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E(\delta \mathbf{u}_k)\| = 0$ . 由式(20)和(22)可知,  $E(\mathbf{e}_k) = HE(\delta \mathbf{u}_k)$ , 那么  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{e}_k) = 0, \forall t$ .  $\square$

**推论1** 对于系统(1), 采用P型学习律(12), 假设1和假设2成立, 如果满足下列条件:

$$|1 - p_i h_1 \Gamma_1| + \zeta |p_i h_1 \Gamma_1| < 1,$$

则系统可实现零误差跟踪,  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{e}_k) = 0, \forall t$ .

**推论2** 对于系统(1), 采用PD型学习律(13), 假设1和假设2成立, 如果满足下列条件:

$$|1 - p_i h_1 \Gamma_1 - p_i h_1 \Gamma_2| + \zeta |p_i h_1 \Gamma_1| + \zeta |p_i h_1 \Gamma_2| < 1,$$

则系统可实现零误差跟踪,  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{e}_k) = 0, \forall t$ .

**注1** 上述推论与定理1证明过程类似, 此略.

## 2.2 方案2收敛性分析

**定理2** 对于系统(1)和更新律(14), 假设1和假设2成立, 如果满足下列条件:

$$\frac{|1 - h_1 p_i \Gamma_1 - h_1 p_i \Gamma_2| + \zeta |h_1 p_i \Gamma_1| + \zeta |h_1 p_i \Gamma_2| + \zeta}{|1 + h_1 p_i K| + \zeta |h_1 p_i K|}$$

$$< 1,$$

则系统可实现有界误差跟踪,  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{e}_k) \leq \frac{Hb}{1 - \omega}$ ,  $\forall t$ , 其中  $\omega$  为适当的常数.

对象端接收到的控制输入信号为  $\bar{\mathbf{u}}_{k+1}(t) = Q(u_{k+1}(t))$ , 等价堆积系统为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= H \bar{\mathbf{u}}_k + \mathbf{d}_k, \\ \mathbf{y}_d &= H \bar{\mathbf{u}}_d + \mathbf{d}_d. \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_k &= [\bar{u}_k(0), \bar{u}_k(1), \dots, \bar{u}_k(N_d - 1)]^T, \\ \bar{\mathbf{u}}_d &= [\bar{u}_d(0), \bar{u}_d(1), \dots, \bar{u}_d(N_d - 1)]^T. \end{aligned}$$

**证明** 根据式(10)中所提的扇形界性质, 可以得到

$$\bar{\mathbf{u}}_{k+1}(t) = Q(u_{k+1}(t)) = (1 + \Delta u_{k+1}(t)) u_{k+1}(t). \quad (26)$$

将式(26)描述为如下超向量的形式:

$$\bar{\mathbf{u}}_{k+1} = (I + \Delta_{k+1}) \mathbf{u}_{k+1}, \quad (27)$$

其中  $\Delta_{k+1} = \text{diag}(\Delta u_{k+1}(0) \quad \dots \quad \Delta u_{k+1}(N_d - 1))$ .

结合定理1的推导过程, 式(14)中的学习律可描述为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k + \Gamma_1 \mathbf{e}_k^* + \Gamma_2 \mathbf{e}_k^* + K \mathbf{e}_{k+1}^* = \\ \mathbf{u}_k + \Gamma_1 \Psi_k \mathbf{e}_k + \Gamma_2 \Psi_k \mathbf{e}_k + K \Psi_k \mathbf{e}_{k+1}. \end{aligned}$$

那么, 系统量化后的实际控制输入为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{k+1} = & \\ & (I + \Delta_{k+1})\mathbf{u}_k + (I + \Delta_{k+1})\Gamma_1\bar{\Psi}_k\mathbf{e}_k + \\ & (I + \Delta_{k+1})\Gamma_2\bar{\Psi}_k\mathbf{e}_k + (I + \Delta_{k+1})K\bar{\Psi}_k\mathbf{e}_{k+1}. \end{aligned} \quad (28)$$

定义  $\delta\bar{\mathbf{u}}_k \triangleq \bar{\mathbf{u}}_d - \bar{\mathbf{u}}_k$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_d$  两边同时减去式(28), 得

$$\begin{aligned} \delta\bar{\mathbf{u}}_{k+1} = & \\ & \bar{\mathbf{u}}_d - (I + \Delta_{k+1})\mathbf{u}_k - (I + \Delta_{k+1})\Gamma_1\bar{\Psi}_k\mathbf{e}_k - \\ & (I + \Delta_{k+1})\Gamma_2\bar{\Psi}_k\mathbf{e}_k - (I + \Delta_{k+1})K\bar{\Psi}_k\mathbf{e}_{k+1}. \end{aligned} \quad (29)$$

结合式(25)可以得到

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{y}_d - \mathbf{y}_k = H\delta\bar{\mathbf{u}}_k + \mathbf{d}_d - \mathbf{d}_k. \quad (30)$$

将式(30)代入(29), 得

$$\begin{aligned} \delta\bar{\mathbf{u}}_{k+1} = & \\ & \bar{\mathbf{u}}_d - (I + \Delta_{k+1})\mathbf{u}_k - (I + \Delta_{k+1})\Gamma_1\bar{\Psi}_kH\delta\bar{\mathbf{u}}_k - \\ & (I + \Delta_{k+1})\Gamma_1\bar{\Psi}_k(\mathbf{d}_d - \mathbf{d}_k) - \\ & (I + \Delta_{k+1})\Gamma_2\bar{\Psi}_kH\delta\bar{\mathbf{u}}_k - (I + \Delta_{k+1})\Gamma_2\bar{\Psi}_k(\mathbf{d}_d - \mathbf{d}_k) - \\ & (I + \Delta_{k+1})K\bar{\Psi}_kH\delta\bar{\mathbf{u}}_{k+1} - \\ & (I + \Delta_{k+1})K\bar{\Psi}_k(\mathbf{d}_d - \mathbf{d}_{k+1}). \end{aligned} \quad (31)$$

因为  $I + \Delta_k$  是可逆矩阵, 由式(27)可得  $\mathbf{u}_k = (I + \Delta_k)^{-1}\bar{\mathbf{u}}_k$ , 那么有

$$\begin{aligned} (I + \Delta_{k+1})\mathbf{u}_k = & (I + \Delta_{k+1})(I + \Delta_k)^{-1}\bar{\mathbf{u}}_k = \\ & (I + \Delta_{k+1})(I + \Delta_k)^{-1}\bar{\mathbf{u}}_d - \\ & (I + \Delta_{k+1})(I + \Delta_k)^{-1}\delta\bar{\mathbf{u}}_k. \end{aligned} \quad (32)$$

结合式(32), 式(31)可改写为

$$\begin{aligned} \delta\bar{\mathbf{u}}_{k+1} = & (I - (I + \Delta_{k+1})(I + \Delta_k)^{-1})\bar{\mathbf{u}}_d + \\ & (I + \Delta_{k+1})(I + \Delta_k)^{-1}\delta\bar{\mathbf{u}}_k - \\ & (I + \Delta_{k+1})\Gamma_1\bar{\Psi}_kH\delta\bar{\mathbf{u}}_k - \\ & (I + \Delta_{k+1})\Gamma_1\bar{\Psi}_k(\mathbf{d}_d - \mathbf{d}_k) - \\ & (I + \Delta_{k+1})\Gamma_2\bar{\Psi}_kH\delta\bar{\mathbf{u}}_k - \\ & (I + \Delta_{k+1})\Gamma_2\bar{\Psi}_k(\mathbf{d}_d - \mathbf{d}_k) - \\ & (I + \Delta_{k+1})K\bar{\Psi}_kH\delta\bar{\mathbf{u}}_{k+1} - \\ & (I + \Delta_{k+1})K\bar{\Psi}_k(\mathbf{d}_d - \mathbf{d}_{k+1}). \end{aligned} \quad (33)$$

式(33)包含随机因子  $\bar{\Psi}_k$ , 且与  $\delta\bar{\mathbf{u}}_k$ 、 $\delta\bar{\mathbf{u}}_{k+1}$  无关.

结合式(7)和(22), 对式(33)两端取期望, 得

$$\begin{aligned} E(\delta\bar{\mathbf{u}}_{k+1}) = & \\ & \frac{(I - (I + \Delta_{k+1})(I + \Delta_k)^{-1})E(\bar{\mathbf{u}}_d)}{I + (I + \Delta_{k+1})K\bar{P}H} + \\ & \frac{((I + \Delta_{k+1})(I + \Delta_k)^{-1} - (I + \Delta_{k+1})\Gamma_1\bar{P}H - \rightarrow}{I +} \end{aligned}$$

$$\leftarrow \frac{(I + \Delta_{k+1})\Gamma_2\bar{P}H)E(\delta\bar{\mathbf{u}}_k)}{(I + \Delta_{k+1})K\bar{P}H}. \quad (34)$$

对式(34)两边取范数, 得

$$\begin{aligned} \|E(\delta\bar{\mathbf{u}}_{k+1})\| \leq & \\ & \left\| \frac{(I + \Delta_{k+1})(I + \Delta_k)^{-1} - (I + \Delta_{k+1})\Gamma_1\bar{P}H - \rightarrow}{I +} \right. \\ & \left. \leftarrow \frac{(I + \Delta_{k+1})\Gamma_2\bar{P}H}{(I + \Delta_{k+1})K\bar{P}H} \right\| \|E(\delta\bar{\mathbf{u}}_k)\| + b. \end{aligned} \quad (35)$$

其中  $\frac{I - (I + \Delta_{k+1})(I + \Delta_k)^{-1}}{I + (I + \Delta_{k+1})K\bar{P}H} \|E(\bar{\mathbf{u}}_d)\| \leq b$ . 记

$$\begin{aligned} R = & \\ & \frac{(I + \Delta_{k+1})(I + \Delta_k)^{-1} - (I + \Delta_{k+1})\Gamma_1\bar{P}H - \rightarrow}{I +} \\ & \leftarrow \frac{(I + \Delta_{k+1})\Gamma_2\bar{P}H}{(I + \Delta_{k+1})K\bar{P}H}. \end{aligned}$$

矩阵  $R$  是一个下三角矩阵, 其对角线元素为

$$\left[ \begin{array}{c} \frac{1 + \Delta u_{k+1}(0)}{1 + \Delta u_k(0)} - h_1\Gamma_1(1 + \Delta u_{k+1}(0)) - \rightarrow \\ \leftarrow \frac{h_1\Gamma_2(1 + \Delta u_{k+1}(0))}{(1 + \Delta u_{k+1}(0))Kh_1} \\ \frac{1 + \Delta u_{k+1}(1)}{1 + \Delta u_k(1)} - h_1\Gamma_1(1 + \Delta u_{k+1}(1)) - \rightarrow \\ \leftarrow \frac{h_1\Gamma_2(1 + \Delta u_{k+1}(1))}{(1 + \Delta u_{k+1}(1))Kh_1} \\ \vdots \\ \frac{1 + \Delta u_{k+1}(N_d - 1)}{1 + \Delta u_k(N_d - 1)} - h_1p_i\Gamma_1(1 + \Delta u_{k+1}(N_d - 1)) - \rightarrow \\ \leftarrow \frac{h_1p_i\Gamma_2(1 + \Delta u_{k+1}(N_d - 1))}{(1 + \Delta u_{k+1}(N_d - 1))Kp_ih_1} \end{array} \right]$$

根据引理 1, 若对于所有  $k$ , 满足  $\rho(R) < 1$ , 则总可以找到一个适当的范数矩阵使得  $\|R\| \leq \omega < 1$ . 此时由式(35)可知,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E(\delta\bar{\mathbf{u}}_k)\| \leq \frac{b}{1 - \omega}$ .

结合式(10)扇形界性质可知

$$\begin{aligned} \rho(R) \leq & \\ & \frac{|1 - h_1p_i\Gamma_1 - h_1p_i\Gamma_2| + \zeta|h_1p_i\Gamma_1| + \zeta|h_1p_i\Gamma_2| + \zeta}{|1 + h_1p_iK| + \zeta|h_1p_iK|}. \end{aligned}$$

因此, 若满足

$$\begin{aligned} \frac{|1 - h_1p_i\Gamma_1 - h_1p_i\Gamma_2| + \zeta|h_1p_i\Gamma_1| + \zeta|h_1p_i\Gamma_2| + \zeta}{|1 + h_1p_iK| + \zeta|h_1p_iK|} < 1, \end{aligned}$$

则  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E(\delta\bar{\mathbf{u}}_k)\| \leq \frac{b}{1 - \omega}$ . 由式(22)和(30)可知,  $E(\mathbf{e}_k) = HE(\delta\bar{\mathbf{u}}_k)$ , 那么,  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(\mathbf{e}_k) \leq \frac{Hb}{1 - \omega}, \forall t. \square$

**推论3** 对于系统(1),采用P型学习律(15),假设1和假设2成立,如果满足下列条件:

$$|1 - h_1 p_i \Gamma_1| + \zeta |h_1 p_i \Gamma_1| + \zeta < 1,$$

则  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(e_k) = \frac{Hb}{1 - \phi_1}, \forall t$ , 其中  $\phi_1$  为适当的常数.

**推论4** 对于系统(1),采用PD型学习律(16),假设1和假设2成立,如果满足下列条件:

$$|1 - h_1 p_i \Gamma_1 - h_1 p_i \Gamma_2| +$$

$$\zeta |h_1 p_i \Gamma_1| + \zeta |h_1 p_i \Gamma_2| + \zeta < 1,$$

则  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(e_k) = \frac{Hb}{1 - \phi_2}, \forall t$ , 其中  $\phi_2$  为适当的常数.

**注2** 上述推论与定理2证明过程类似,此略.

### 3 数值仿真

考虑如下线性系统:

$$x_k(t+1) = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.22 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_k(t) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u_k(t),$$

$$y_k(t) = [1 \ 0.5] x_k(t),$$

$$y_d(t) = \sin(8t/50) \sin(4t/50), t \in [0, 100].$$

预期迭代长度  $N_d = 100$ , 令实际迭代长度  $N_k$  在  $70 \sim 100$  之间随机变化, 满足离散均匀分布  $p_i = 1/31$ . 系统初始状态满足  $E\{x_k(0)\} = x_d(0) = [0 \ 0]^T$ , 初始输入选为  $u_0(t) = 0, h_1 = CB = 1$ . 给定量化器参数  $z_0 = 2$ , 为了分析量化密度对跟踪性能的影响, 进一步模拟不同密度下的例子, 即将量化密度参数  $\mu$  分别设置为  $0.85, 0.6$ , 相应的  $\zeta$  值为  $0.08, 0.25$ . 该算法执行 20 次迭代, 考虑系统在两种量化方案下, 反馈辅助 PD 型量化学习律、PD 型量化学习律、P 型量化学习律的收敛性能.

**仿真1** 量化跟踪误差信号.

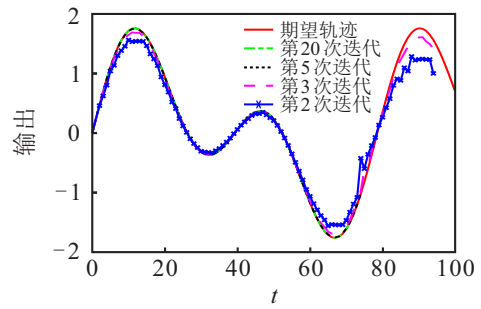
分别选择学习增益  $\Gamma_1 = 0.9, \Gamma_2 = 0.05, K = 0.06, \mu = 0.85$ .

图1(a)~(c)分别描述在第2、3、5、20次迭代时, 3种学习律的输出曲线, 可以看出反馈辅助PD型量化学习律在第5次迭代时, 几乎实现零误差跟踪, 具有更快的收敛速度.

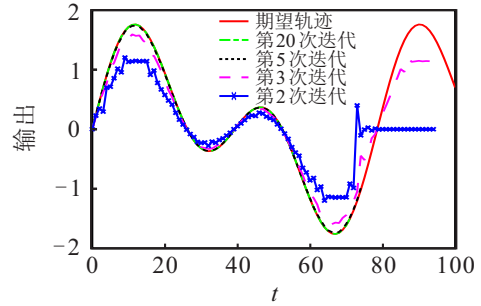
为了解量化水平对跟踪性能的影响, 图2分别考虑量化密度为  $0.85, 0.6$  的情况, 对比了不同学习律下系统沿迭代轴的跟踪误差, 可以看出量化密度越大, 3种学习律的跟踪性能越好. 对比图2(a)和(b)可知, 在量化跟踪误差信号方案下, 不同尺度的量化密度对系统性能的影响不大.

**仿真2** 量化控制输入信号.

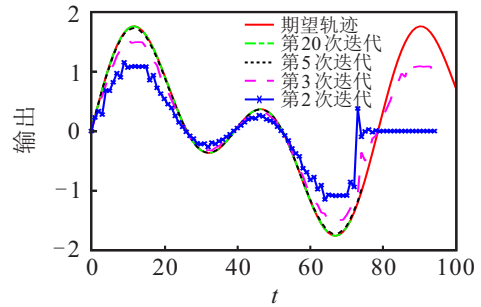
分别选择学习增益  $\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = 0.09, K = 0.4, \mu = 0.85$ .



(a) 反馈辅助PD型学习律系统输出及期望轨迹

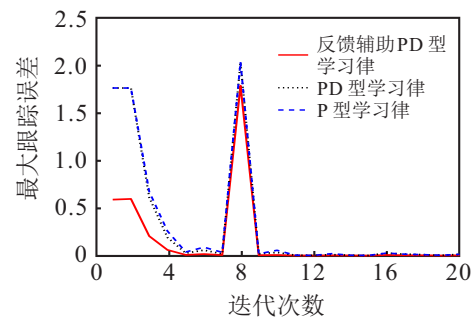


(b) PD型学习律系统输出及期望轨迹

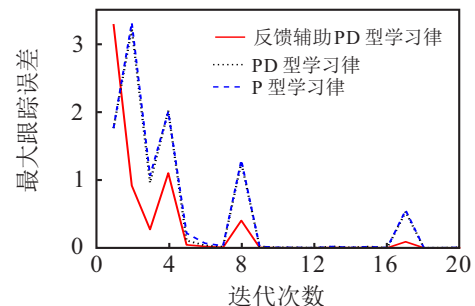


(c) P型学习律系统输出及期望轨迹

图1 量化跟踪误差信号



(a) 量化密度  $\mu = 0.85$



(b) 量化密度  $\mu = 0.6$

图2 不同学习律沿迭代轴的跟踪误差(仿真1)

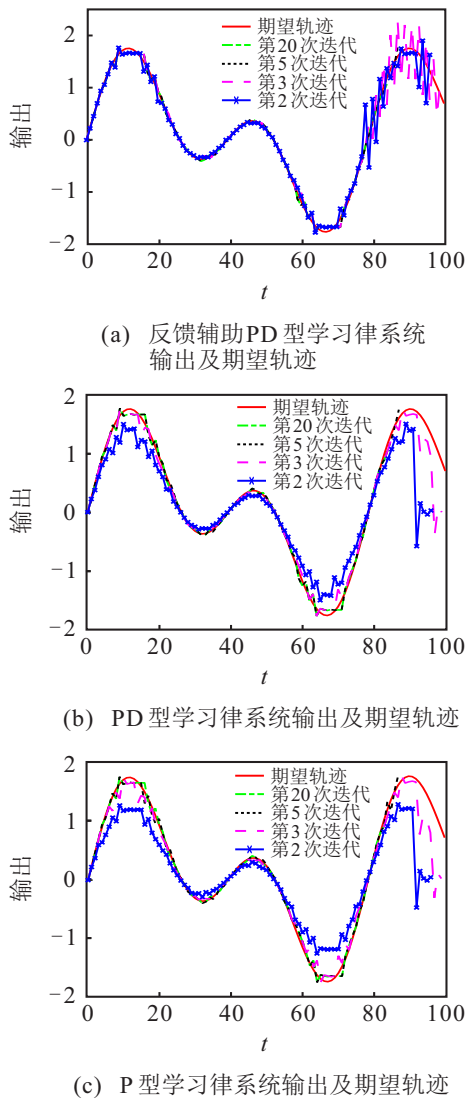


图3 量化控制输入信号

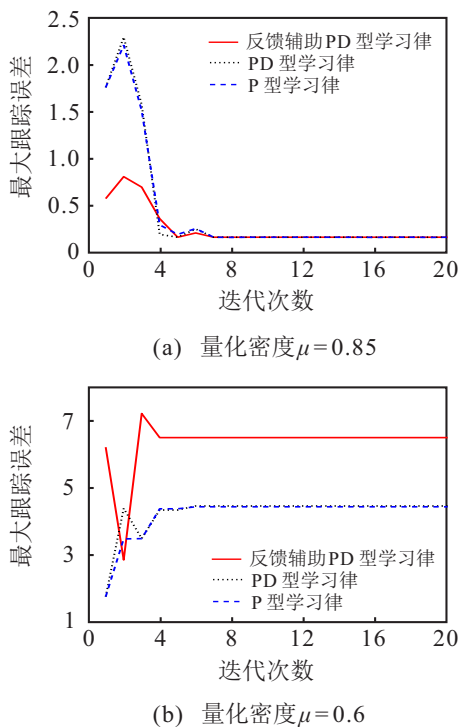


图4 不同学习律沿迭代轴的跟踪误差(仿真2)

图3(a)~(c)显示出反馈辅助PD型量化学习律仍然具有更快的收敛速度,但3种学习律都能保证跟踪误差收敛到一个非零界.图4依旧对比了量化密度为0.85、0.6的情况,可以看出量化密度越大,3种学习律的跟踪性能越好.对比图4(a)和(b)可知,在量化控制输入信号方案下,量化密度对系统跟踪性能存在较大影响,较小的量化密度(如 $\mu = 0.6$ )会导致批次最大跟踪误差增加.

### 4 结论

本文针对随机变批次长度的离散线性系统,设计反馈辅助PD型量化迭代学习控制算法.为处理可变的批次长度,在设计控制方案中将原始跟踪误差作修正.考虑两种量化方案,导出了堆积系统下的学习收敛条件.后续将深入分析量化密度对控制系统性能的影响,寻找合理的量化密度阈值确定方法,确定引入量化策略的必要条件等.此外,本文工作针对单输入单输出系统完成,所提出控制算法在多变量系统中的可实施性和收敛条件分析等问题也需要更进一步的研究.

### 参考文献(References)

- [1] 曹伟, 孙明. 离散时变多智能体系统有限时间一致性迭代学习控制[J]. 控制与决策, 2019, 34(4): 891-896. (Cao W, Sun M. Finite-time consensus iterative learning control of discrete time-varying multi-agent systems[J]. Control and Decision, 2019, 34(4): 891-896.)
- [2] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robots by learning[J]. Journal of Robotic Systems, 1984, 1(2): 123-140.
- [3] Yan F, Yan G W, Ren M F, et al. A novel control strategy for balancing traffic flow in urban traffic network based on iterative learning control[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2018, 508: 519-531.
- [4] Zeng C, Shen D, Wang J R. Adaptive learning tracking for robot manipulators with varying trial lengths[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(12): 5993-6014.
- [5] Zhang W, Wang L J, Shen D. Iterative learning control for biped walking robot with varying iteration lengths[C]. Chinese Control and Decision Conference. Yinchuan: IEEE, 2016: 4203-4208.
- [6] Yu Q X, Bu X H, Chi R H, et al. Modified P-type ILC for high-speed trains with varying trial lengths[C]. Data Driven Control and Learning Systems Conference. Enshi: IEEE, 2018: 1006-1010.
- [7] Li X F, Xu J X, Huang D Q. An iterative learning control approach for linear systems with randomly varying trial lengths[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(7): 1954-1960.
- [8] Wei Y S, Wang C L. Iterative learning control for linear continuous-time systems with vector relative degree

under varying trail length[C]. Data Driven Control and Learning Systems Conference. Enshi: IEEE, 2018: 256-261.

[9] Li X F, Shen D, Xu J X. Adaptive iterative learning control for MIMO nonlinear systems performing iteration-varying tasks[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(16): 9206-9231.

[10] Liu S D, Wang J R. Fractional order iterative learning control with randomly varying trial lengths[J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(2): 967-992.

[11] Liang J Q, Bu X H, Wang Q F, et al. Iterative consensus control for a class of nonlinear multi-agent systems with randomly varying iteration lengths[C]. International Conference on Control and Automation (ICCA). Edinburgh: IEEE, 2019: 1014-1019.

[12] Li X F, Xu J X. Lifted system framework for learning control with different trial lengths[J]. International Journal of Automation and Computing, 2015, 12(3): 273-280.

[13] Bu X H, Wang T H, Hou Z S, et al. Iterative learning control for discrete-time systems with quantised measurements[J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(9): 1455-1460.

[14] Xu Y, Shen D, Bu X H. Zero-error convergence of iterative learning control using quantized error information[J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2017, 34(3): 1061-1077.

[15] Yin Y L, Bu X H, Yan S K, et al. Robust quantized ILC design for linear systems using a 2-D model[C]. Chinese Control and Decision Conference. Yinchuan: IEEE, 2016: 4209-4214.

[16] Shen D, Xu Y. Iterative learning control for discrete-time stochastic systems with quantized information stochastic systems with quantized information[J]. IEEE/CAA

Journal of Automatica Sinica, 2016, 3(1): 59-67.

[17] Sun M X, Wang H F, Bi H B. Feedback-aided iterative learning control[C]. Chinese Control and Decision Conference. Guiyang: IEEE, 2013: 675-680.

[18] Huang S N, Tan K K, Lee T H. Necessary and sufficient condition for convergence of iterative learning algorithm[J]. Automatica, 2002, 38(7): 1257-1260.

[19] Shen D, Zhang W, Xu J X. Iterative learning control for discrete nonlinear systems with randomly iteration varying lengths[J]. Systems & Control Letters, 2016, 96: 81-87.

[20] 李牧. 网络化系统最优动态量化器设计与稳定性分析[D]. 北京: 北京理工大学, 2015: 1-120. (Li M. Optimal dynamic quantizer design and stability analysis of networked control systems[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2015: 1-120.)

[21] Fu M Y, Xie L H. The sector bound approach to quantized feedback control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(11): 1698-1711.

作者简介

王晶(1972-), 女, 教授, 博士生导师, 从事数据驱动的复杂过程建模、优化、控制及故障诊断等研究, E-mail: jwang@mail.buct.edu.cn;

周楠(1994-), 女, 硕士生, 从事鲁棒迭代学习控制的研究, E-mail: zhounan\_zara@163.com;

王森(1994-), 男, 博士生, 从事鲁棒控制、迭代学习控制、网络系统控制等研究, E-mail: wangsmmm@126.com;

沈栋(1982-), 男, 教授, 博士, 从事迭代学习控制、复杂通信条件的网络控制系统等研究, E-mail: dshen@ieee.org;

李伯群(1970-), 男, 教授, 博士, 从事工业过程建模、智能解耦控制等研究, E-mail: lbqhylyxab@163.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)

下 期 要 目

多模态多目标优化综述 ..... 岳彩通, 等

应用服务器集群能耗与性能平衡的在线实时优化 ..... 熊 智, 等

区间数可重入混合流水车间调度与预维护协同优化 ..... 董 君, 等

基于深度强化学习与迭代贪婪的流水车间调度优化 ..... 王 凌, 等

基于改进烟花算法的并联冷机负荷分配优化 ..... 于军琪, 等

高超声速飞行器间歇故障改进自适应容错控制 ..... 胡开宇, 等

基于深度学习的四旋翼无人机地面效应补偿降落控制设计 ..... 鲜 斌, 等

基于平衡鲸鱼优化算法的无人车路径规划 ..... 蔡雨岑, 等

一种求解约束多目标问题的协作进化算法 ..... 王 蕊, 等

基于边缘峰度度量的特征缩减模糊聚类算法 ..... 潘兴广, 等