

# 控制与决策

Control and Decision

基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识

王宏伟, 柴秀俊

引用本文:

王宏伟, 柴秀俊. 基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识[J]. 控制与决策, 2021, 36(12): 2946–2954.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0671>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 \$H\_\infty\$ 控制](#)

Non-fragile  $H_\infty$  control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model

控制与决策. 2021, 36(5): 1087–1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

[基于模型依赖驻留时间的异步切换控制](#)

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time

控制与决策. 2021, 36(3): 609–618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

[基于多维泰勒网的超前d步预测模型](#)

d-step-ahead predictive model based on multi-dimensional Taylor network

控制与决策. 2021, 36(2): 345–354 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0722>

[一种改进的紧格式无模型自适应控制方法](#)

An improved compact form model free adaptive control method

控制与决策. 2021, 36(2): 436–442 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0635>

[基于KRLS的非均匀采样非线性系统辨识](#)

Identification of non-uniformly sampled nonlinear systems based on KRLS

控制与决策. 2021, 36(12): 3049–3055 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0962>

# 基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识

王宏伟<sup>1,2†</sup>, 柴秀俊<sup>2</sup>

(1. 大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024; 2. 新疆大学 电气工程学院, 乌鲁木齐 830047)

**摘要:** 从概率统计方法出发, 提出一种基于高斯混合模型聚类与递推最小二乘算法的非均匀采样系统的多模型建模方法. 首先, 采用高斯混合模型作为调度函数, 使用最大期望 (EM) 算法迭代更新估计高斯混合模型中参数, 从而通过每个子系统的高斯概率密度函数计算和比较来确定子系统的激活情况; 其次, 采用递推最小二乘算法估计局部子系统参数; 然后, 使用鞅收敛定理对所提出的算法性能进行分析; 最后, 通过非均匀采样系统的多模型建模来证明所提出方法的有效性.

**关键词:** 高斯混合模型聚类; 调度函数; 非均匀采样系统; 非线性系统; 辨识

中图分类号: TP13

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0671

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 王宏伟, 柴秀俊. 基于高斯混合模型聚类的非均匀采样系统的多模型切换辨识[J]. 控制与决策, 2021, 36(12): 2946-2954.

## Multi-model switching identification for non-uniformly sampled systems based on Gaussian mixture model clustering

WANG Hong-wei<sup>1,2†</sup>, CHAI Xiu-jun<sup>2</sup>

(1. School of Control Science and Control Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. School of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830047, China)

**Abstract:** Based on the probabilistic method, the multi-model modeling method of non-uniformly sampled systems based on the Gaussian mixture model clustering and recursive least square algorithm is proposed. Firstly, the Gaussian mixture model is used as the scheduling function, and the Expectation-Maximization (EM) algorithm is used to iteratively update and estimate the parameters of the Gaussian mixture model, so that the activation of each subsystem can be determined by calculating and comparing the Gaussian probability density function of each subsystem. Secondly, the recursive least square algorithm is used to estimate the parameters of the local subsystem. Thirdly, the martingale convergence theorem is used to analyze the performance of the proposed algorithm. Finally, the effectiveness of the proposed method is proved by the multi-model modeling for the non-uniformly sampled system.

**Keywords:** Gaussian mixture model clustering; scheduling function; nonuniformly sampled system; nonlinear systems; identification

## 0 引言

在实际工业系统中, 系统呈现出多变量、多耦合、多工况、强非线性、强时滞等特点, 没有统一的数学模型, 可采用多种类型模型对其进行描述, 例如径向基神经网络模型、支持向量机模型、非线性多项式模型、正交神经网络模型、小波神经网络模型等<sup>[1-3]</sup>. 但这些模型结构难以确定, 参数维数较大, 计算量也较大. 文献[4-6]提出基于“分解-合成”原理的多模型方法解决此类系统的建模问题. “分解-合成”的原理就是: 根据某种分解原则或者实际多工况情况, 将系统

分解成多个局部子系统或者局部子模型或者局部工作区, 对于局部子系统、局部子模型或者局部工作区用线性模型描述, 从而整个系统可以用硬切换的多模型或者软切换的多模型来描述.

在多模型建模方法中, 系统的多模型可以看作是非线性调度函数与相应的局部子系统融合. 多模型建模的辨识问题需要解决调度函数的确定、结构辨识和参数辨识等问题. 文献[7]提出了一种多模型建模方法. 该方法类似于径向基函数神经网络 (RBF) 建模, 其变化是 RBF 中的权值用线性回归模型来代替,

收稿日期: 2020-05-31; 修回日期: 2020-10-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61863034).

责任编委: 柴利.

†通讯作者. E-mail: 1195201627@qq.com.

使得多模型可以看作后件为多项式回归的RBF的扩展形式. 文献[8-9]针对多模型的参数辨识问题, 提出了局部参数估计算法(local parameters estimation)和全局参数估计算法(global parameters estimation), 通过仿真验证了所提出算法具有计算量小、速度快、鲁棒性强等优点. 对于多模型的在线建模, 文献[10]基于减法聚类, 提出递推在线聚类算法, 可以在每次采样时刻调整非线性调度函数, 在线调整更新局部子系统结构和参数.

另一方面, 随着网络技术的发展, 网络控制系统逐步渗透到各类工程应用领域. 为了节约传感器节点的能源消耗, 降低控制器的运算负荷, 减少执行器机构的磨损, 网络控制系统中经常采用基于事件驱动传感器、执行器和控制器, 从而导致输入输出数据的实际采样间隔呈现非均匀性<sup>[11]</sup>. 此外, 由于人工采样的不确定性, 数据存储中的压缩处理以及传输过程中的丢失与时延等因素, 非均匀采样系统在实际过程中普遍存在<sup>[12]</sup>. 目前, 大多数与非均匀采样系统相关的辨识方面理论和方法都集中在线性系统, 而在非线性系统方面的研究成果不多. 文献[13]利用提升变量技术推导了非均匀采样数据的Hammerstein系统的输入输出表达形式, 构造辅助模型增广最小二乘辨识算法. 文献[14]和文献[15]基于提升传递函数模型, 分别研究了非均匀采样数据的Wiener系统和Hammerstein-Wiener系统的辨识问题, 提出了梯度迭代算法和递阶多新息的随机梯度算法.

在非均匀采样非线性系统(NUNS)中, 一些研究者提出了基于模糊模型软切换的多模型建模方法, 与基于模块化的Hammerstein模型、Wiener模型、Hammerstein-Wiener模型建模方法相比, 多模型建模可以处理多变量、多工况、强非线性、强时滞的非线性系统. 文献[16-18]提出了基于模糊竞争学习、模糊聚类的非均匀采样非线性系统的辨识方法. 通过将模糊模型的隶属度函数作为调度函数实现软切换的多模型建模. 在上述处理方法中, 调度函数的设计是非常重要的环节, 其设计过程可以看作是分类过程. 尽管在分类环节上, 可以采用模糊聚类、减法聚类、近邻聚类等方法, 但其聚类结果受初值和外界噪声的影响, 并且不容易收敛. 为此, 本文从概率统计方法出发, 提出一种基于高斯混合聚类与递推最小二乘方法的非均匀采样系统的多模型建模, 其创新点是: 1) 利用提升变量技术, 将非均匀采样的非线性系统分解为局部工作点附近线性模型, 整个系统动态过程可看作局部线性模型切换来描述. 2) 采用高斯混合

模型作为调度函数, 使用最大期望(EM)算法迭代更新估计高斯混合模型中参数. 这种聚类方法特点是使高斯混合模型最大化地拟合所有采样数据的分布, 不受聚类初值和外界噪声的影响. 3) 每个子系统通过高斯混合模型聚类的高斯概率密度函数计算和比较来确定子系统的激活情况. 4) 采用鞅收敛定理对算法的收敛性能进行分析, 在分类错误率有限、输入信息满足持续激励的条件下, 系统参数估计值收敛于参数真值.

## 1 问题的提出

### 1.1 NUNS系统的多模型描述

对于NUNS系统, 其结构如图1所示. 其中:  $H_T$  为非均匀保持器, 刷新间隔为  $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\}$ , 它将计算机传递来的离散信号  $u(kT + t_i)$  ( $t_0 = 0, t_i = t_{i-1} + \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_i, i = 1, 2, \dots, p$ ) 经过刷新产生连续控制信号  $u(t)$ , 控制信号  $u(t)$  经过非线性连续时间对象  $S_n$  产生输出信号  $y(t)$ ; 输出信号  $y(t)$  经过采样器  $S_T$  产生离散输出信号  $y(kT)$ , 采样帧周期为  $T = t_p = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_p$ .



图1 NUNS非线性系统结构

图1中的非均匀保持器  $H_T$  具有如下特性:

$$u(t) = \begin{cases} u(kT), & kT \leq t < kT + t_1, \\ u(kT + t_1), & kT + t_1 \leq t < kT + t_2, \\ \vdots \\ u(kT + t_{p-1}), & kT + t_{p-1} \leq t < (k+1)T. \end{cases} \quad (1)$$

图1中非线性连续系统的状态空间方程为

$$S_n : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \Gamma(\mathbf{x}(t), u(t)), \\ y(t) = h(\mathbf{x}(t)). \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{x}(t)$  为状态变量,  $\mathbf{x}(t) \in R^n$ ;  $y(t)$  为输出变量,  $y(t) \in R^1$ ;  $u(t)$  为输入变量,  $u(t) \in R^1$ . 令  $\mathbf{x}(kT + T)$  为式(2)的离散方程的解, 其离散状态方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(kT + T) = \Gamma[\mathbf{x}(kT), u(kT), u(kT + t_1), \\ \dots, u(kT + t_{p-1})], \\ y(kT) = h[\mathbf{x}(kT)]. \end{cases} \quad (3)$$

对于式(3)的非均匀采样离散系统, 可用多模型进行描述. 文献[10]给出多模型的一般描述情况, 即

$$y(kT) = \sum_{i=1}^c f_i(\zeta(kT))g_i(\varphi_i(kT)),$$

$$i = 1, 2, \dots, c. \tag{4}$$

其中:  $y(kT)$  为  $k$  时刻的输出,  $y(kT) \in R^1$ ;  $f_i(\cdot)$  为第  $i$  个调度函数;  $\zeta(kT)$  为系统的调度输入向量;  $g_i(\cdot)$  为第  $i$  个局部子系统函数;  $\varphi_i(kT)$  为第  $i$  个子系统的输入信息向量.

定义式(4)中的输入信息向量  $\varphi_i(kT)$ 、调度输入信息向量  $\zeta(kT)$  分别为

$$\begin{aligned} \varphi_i(kT) = & [-y(kT - T), -y(kT - 2T), \dots, -y(kT - n_{a_i}T), \\ & u(kT), u(kT - T), \dots, u(kT - n_{b_i}T), u(kT - T + t_1), \\ & \dots, u(kT - n_{b_i}T + t_1), \dots, u(kT - T + t_{p-1}), \\ & \dots, u(kT - n_{b_i}T + t_{p-1})]^T \in R^{n_i}, \\ n_i = & n_{a_i} + pn_{b_i} + 1; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \zeta(kT) = & [-y(kT - T), -y(kT - 2T), \dots, -y(kT - n_{a_\zeta}T), \\ & u(kT), u(kT - T), \dots, u(kT - n_{b_\zeta}T), u(kT - T + t_1), \\ & \dots, u(kT - n_{b_\zeta}T + t_1), \dots, u(kT - T + \\ & t_{p-1}), \dots, u(kT - n_{b_\zeta}T + t_{p-1})]^T \in R^{n_\zeta}, \\ n_\zeta = & n_{a_\zeta} + pn_{b_\zeta} + 1. \end{aligned} \tag{6}$$

其中:  $n_{a_i}$  和  $n_{b_i}$  分别为第  $i$  个子系统输出、输入阶次,

$n_{a_\zeta}$  和  $n_{b_\zeta}$  为调度输入信息向量阶次, 它们皆为先验已知, 子系统的总数  $c$  也是先验已知的.

调度函数的选取有多种形式, 文献[10]采用了高斯型函数作为开关调度函数. 此种开关调度函数的特点是: 开关函数作用时, 多个局部子系统中一个子系统被激活, 被激活的子系统对应的调度函数值为 1, 其他子系统对应的调度函数值为 0. 本文也采用此调度思想, 采用高斯型混合统计模型作为开关调度函数. 此时, 式(4)可以写为

$$y(kT) = g_i(\varphi_i(kT)), \tag{7}$$

$$i = \underset{q \in \{1, 2, \dots, c\}}{\text{arg max}} P(q|\zeta(kT)). \tag{8}$$

其中:  $P(q|\zeta(kT))$  是调度函数, 本文用第  $q$  个子系统的切换后验概率来描述.

由式(7)和(8)可以看出, 在  $kT$  时刻, 系统的某个子系统被激活, 被激活的子系统是由各个子系统的切换后验概率  $P(q|\zeta(kT))$  决定的. 如果第  $i$  个子系统切换概率最高, 则第  $i$  个子系统被激活. 因此, 式(7)和(8)表达的多模型系统结构可用图 2 来描述. 其切换工作原理是: 采集输入/输出数据  $\{u(kT + t_j), y(kT)\}$ , 通过调度函数的计算, 确定哪个子系统切换后验概率最大, 然后系统就切换到该子系统.

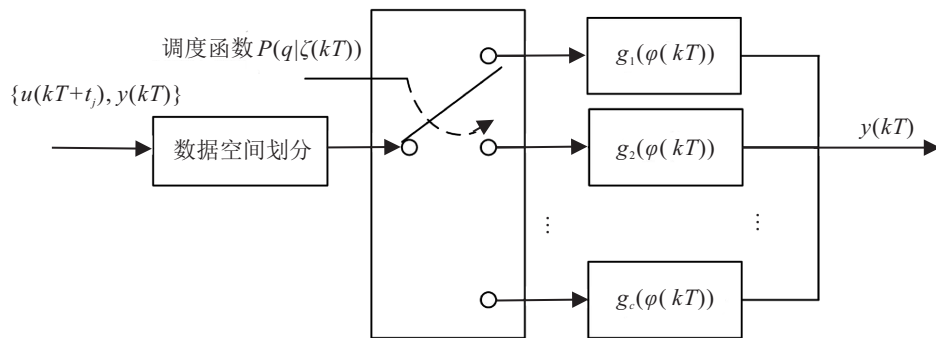


图 2 多模型系统的结构

为简化和表达方便, 将  $u(kT - jT)$ 、 $y(kT - jT)$  简写为  $u(k - j)$ 、 $y(k - j)$ ,  $u(kT - T + t_j)$  简记为  $u(k - 1 + t_j)$ . 在后面小节中, 将讨论基于高斯混合模型聚类的多模型建模问题.

### 1.2 系统局部模型的描述

由 1.1 小节可知, NUNS 系统可看作局部子系统在某种调度规则下的组合. 对于第  $i$  个局部子系统, 其状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}_i x(t) + \mathbf{B}_i u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}_i x(t). \end{cases} \tag{9}$$

其中:  $\mathbf{A}_i \in R^{n_i \times n_i}$ 、 $\mathbf{B}_i \in R^{n_i \times 1}$ 、 $\mathbf{C}_i \in R^{1 \times n_i}$  为相应的参数矩阵. 以  $T$  为帧周期, 根据文献[12]提出的方法对系统(9)进行离散化, 有

$$\begin{cases} x(k + 1) = \bar{\mathbf{A}}_i x(k) + \bar{\mathbf{B}}_i u(k), \\ y(t) = \bar{\mathbf{C}}_i x(t). \end{cases} \tag{10}$$

其中:  $\bar{\mathbf{A}}_i = e^{\mathbf{A}_i T} \in R^{n_i \times n_i}$ ;  $\bar{\mathbf{B}}_{\tau_j} = \int_0^{\tau_j} e^{\mathbf{A}_i t} dt \mathbf{B}_i \in R^{n_i \times 1}$ ;  $\bar{\mathbf{B}}_{ij} = e^{\mathbf{A}_i(T-t_j)} \bar{\mathbf{B}}_{\tau_j} \in R^{n_i \times 1}$ ;  $\bar{\mathbf{B}}_i = [\bar{\mathbf{B}}_{i1}, \bar{\mathbf{B}}_{i2}, \dots, \bar{\mathbf{B}}_{ip}] \in R^{n_i \times p}$ ;  $\bar{\mathbf{u}}(k) = [u(k), u(k + t_1), \dots, u(k + t_{p-1})]^T$ .

引入后移算子  $z^{-1}$ , 有  $z^{-1}u(k + t_j) = u(k + t_j -$

1). 由式(10)可得

$$y(k) = \sum_{j=1}^p \frac{z^{-n_i} \bar{\mathbf{C}}_i \text{adj}[z\mathbf{I}_{n_i} - \bar{\mathbf{A}}_i] \bar{\mathbf{B}}_{ij}}{z^{-n_i} \det[z\mathbf{I}_{n_i} - \bar{\mathbf{A}}_i]} u(k + t_{j-1}), \quad (11)$$

其中  $\mathbf{I}_{n_i}$  为  $n_i$  阶单位矩阵. 式(11)也可以表示为有理分式的形式, 即

$$y(k) = \sum_{j=1}^p \frac{B_{ij}(z)}{A_i(z)} u(k + t_{j-1}). \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} A_i(z^{-1}) &= 1 + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2} + \dots + a_{ina}z^{-n_{ai}}, \\ B_{i1}(z^{-1}) &= b_{i11}z^{-1} + b_{i12}z^{-2} + \dots + b_{i1n_b}z^{-n_{bi}}, \\ B_{ij}(z^{-1}) &= b_{ij1}z^{-1} + b_{ij2}z^{-2} + \dots + b_{ijn_b}z^{-n_{bi}}, \\ j &= 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

式(12)又可以整理为

$$y(k) = [1 - A_i(z^{-1})]y(k) + \sum_{j=1}^p B_{ij}(z^{-1})u(k + t_{j-1}). \quad (13)$$

$$[1 - A_i(z^{-1})]y(k) + \sum_{j=1}^p B_{ij}(z^{-1})u(k + t_{j-1}). \quad (14)$$

定义第  $i$  个局部子系统的参数向量  $\theta_i$  和输入信息向量  $\varphi_i(k)$  为

$$\theta_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ina_i}, b_{i11}, \dots, b_{i1n_{b_i}}, b_{i21}, \dots, b_{i2n_{b_i}}, \dots, b_{ip1}, \dots, b_{ipn_{b_i}}]^T \in R^{n_i},$$

$$\begin{aligned} \varphi_i(k) &= [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n_{a_i}), \\ &u(k), u(k-1), \dots, u(k-n_{b_i}), u(k-1+t_1), \\ &\dots, u(k-n_{b_i}+t_1), \dots, u(k-1+t_{p-1}), \\ &\dots, u(k-n_{b_i}+t_{p-1})]^T \in R^{n_i}, \end{aligned}$$

$$n_i = n_{a_i} + pn_{b_i} + 1.$$

考虑外界含有噪声, 式(7)和(8)可以写为

$$y(k) = g_i(\varphi_i(k)) + v(k) = \varphi_i^T(k)\theta_i + v(k), \quad (15)$$

$$i = \arg \max_{q \in \{1, 2, \dots, c\}} P(q|\zeta(k)). \quad (16)$$

## 2 基于高斯混合模型聚类的多模型建模

### 2.1 高斯混合模型聚类的EM算法

高斯混合模型是  $c$  个高斯概率分布模型的线性组合, 它假设所采样的样本可以分成  $c$  类, 每一类的样本服从一个高斯概率分布模型, 高斯混合模型聚类学习过程就是  $c$  个高斯分布概率密度函数参数的学习过程, 选择概率值高的那个类作为采样数据的最终归属类<sup>[19]</sup>. 首先, 给出高斯混合模型定义.

**定义 1** <sup>[19]</sup>(高斯混合模型) 假设观测调度输入向量集  $\Phi = \{\zeta(1), \zeta(2), \dots, \zeta(N)\}$ , 高斯混合模型具

有如下形式的概率分布模型:

$$P(\Phi|\mu, \Sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^c \alpha_i P(\Phi|\mu_i, \Sigma_i). \quad (17)$$

其中:  $\alpha_i$  为混合加权系数,  $\alpha_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^c \alpha_i = 1$ ;  $P(\Phi|\mu_i, \Sigma_i)$  为第  $i$  类的高斯分布密度函数;  $\mu_i, \Sigma_i$  分别为第  $i$  类的高斯分布密度函数的均值向量和协方差矩阵,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_c)$ ,  $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_c)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_c)$ .  $P(\Phi|\mu_i, \Sigma_i)$  的表达式为

$$\begin{aligned} P(\Phi|\mu_i, \Sigma_i) &= P(\zeta(k)|\mu_i, \Sigma_i) = \\ &\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\zeta(k) - \mu_i)^T (\Sigma_i)^{-1} (\zeta(k) - \mu_i)\right]}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma_i|^{\frac{1}{2}}}, \\ &k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (18)$$

由贝叶斯定理可知<sup>[19]</sup>,  $\zeta(k)$  属于第  $i$  类的后验概率, 有

$$P(i|\zeta(k)) = \frac{\alpha_i P(\zeta(k)|\mu_i, \Sigma_i)}{\sum_{i=1}^c \alpha_i P(\zeta(k)|\mu_i, \Sigma_i)}. \quad (19)$$

为了使高斯混合模型最大化地拟合调度输入样本集  $\Phi$ , 需要迭代更新模型参数  $\alpha_i, \mu_i$  和  $\Sigma_i$ . 设极大似然函数为

$$L(\Phi) = \sum_{k=1}^N \ln \left( \sum_{i=1}^c \alpha_i P(\zeta(k)|\mu_i, \Sigma_i) \right). \quad (20)$$

由于在每一轮迭代更新过程中, 需要重复使用后验概率  $P(i|\zeta(k))$ , 为了减小算法复杂度, 将  $P(i|\zeta(k))$  进行 0-1 离散化处理, 若

$$P(i|\zeta(k)) = \max P(q|\zeta(k)), \quad q = 1, 2, \dots, c, \quad (21)$$

则令  $P(i|\zeta(k)) = 1$ , 表示调度输入信息向量归为第  $i$  类; 否则令  $P(i|\zeta(k)) = 0$ . 至此, 将样本集化  $\Phi$  分为  $c$  个数据集  $S_1, S_2, \dots, S_c$ .

对于极大似然函数  $L(\Phi)$ , 分别令  $\partial L(\Phi)/\partial \mu_i = 0, \partial L(\Phi)/\partial \Sigma_i = 0$ , 可以得到  $\mu_i$  与  $\Sigma_i$  的更新公式为

$$\mu_i = \frac{\sum_{k=1}^{m^i} \zeta_i(k)}{m^i}, \quad (22)$$

$$\Sigma_i = \frac{\sum_{k=1}^{m^i} (\zeta_i(k) - \mu_i)(\zeta_i(k) - \mu_i)^T}{m^i}. \quad (23)$$

其中:  $\zeta_i(k)$  为第  $i$  类数据集  $S_i$  的调度输入信息向量;  $m^i$  为数据集  $S_i$  中调度信息向量的总数, 满足条件  $m^1 + m^2 + \dots + m^N = m$ .

对于混合系数  $\alpha_i$  的更新公式, 由上述推论可知

$$\alpha_i = \frac{m^i}{m}. \quad (24)$$

在迭代更新模型参数的过程中,当极大似然 $L(\Phi)$ 的增长小于给定阈值 $\gamma(\gamma > 0)$ 时,模型参数 $\alpha_i$ 、 $\mu_i$ 与 $\Sigma_i$ 停止更新.现将整个高斯混合聚类算法总结如下:

step 1: 令 $k = 1$ ,设置高斯混合模型的聚类参数 $c, \alpha_i, \mu_i, \Sigma_i, i = 1, 2, \dots, c$ .

step 2: 采集输入输出数据 $\{u(k + t_{j-1}), y(k) | j = 1, 2, \dots, p, k = 1, 2, \dots, N\}$ ,根据式(6)构造调度输入信息向量 $\zeta(k)$ .

step 3: 根据式(18)计算当前调度输入信息向量 $\zeta(k)$ 属于各个子系统的后验概率,并进行0-1离散化处理.

step 4: 通过式(21)~(23)更新高斯概率密度分布模型的参数 $\alpha_i, \mu_i, \Sigma_i, i = 1, 2, \dots, c$ .

step 5: 令 $k = k + 1$ ,如果 $k \leq N$ ,则返回step 4,否则转到step 6.

step 6: 如果极大似然函数 $L(\Phi) > \gamma$ ,则 $k = 1$ 转到step 4,否则聚类算法结束.

## 2.2 局部子系统的参数辨识

调度函数的高斯密度概率分布函数的参数 $c, \alpha_i, \mu_i, \Sigma_i$ 确定后,便可根据调度输入信息向量 $\zeta(k)$ 在各类概率大小情况,取隶属某类的最大概率, $i = \arg \max_{q \in \{1, 2, \dots, c\}} P(q | \zeta(k))$ ,从而得到切换信息的估值,构造新的输入信息估计向量 $\hat{\varphi}_i(k)$ ,对第 $i$ 个子系统进行参数辨识.此时,采用递推最小二乘辨识算法如下:

$$i = \arg \max_{q \in \{1, 2, \dots, c\}} P(q | \zeta(k)); \quad (25)$$

$$\hat{\theta}_i(k) = \hat{\theta}_i(k-1) + P_i(k) \hat{\varphi}_i(k) [y(k) - \hat{\varphi}_i^T(k) \hat{\theta}_i(k-1)], \quad q = i; \quad (26)$$

$$P_i^{-1}(k) = P_i^{-1}(k-1) + \hat{\varphi}_i(k) \hat{\varphi}_i^T(k); \quad (27)$$

$$P_i(0) = p_0 I_{n_i}, \quad q = i; \quad (28)$$

$$\hat{\theta}_q(k) = \hat{\theta}_q(k-1), \quad q \neq i; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_i(k) = & [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n_{a_i}), \\ & u(k), u(k-1), \dots, u(k-n_{b_i}), u(k-1+t_1), \\ & \dots, u(k-n_{b_i}+t_1), \dots, u(k-1+t_{p-1}), \\ & \dots, u(k-n_{b_i}+t_{p-1})]^T \in R^{n_i}, \\ n_i = & n_{a_i} + pn_{b_i} + 1. \end{aligned} \quad (30)$$

下面将整个参数辨识算法总结如下:

step 1: 令 $k = 1$ ,设置高斯混合模型的聚类参数 $c, \alpha_i, \mu_i, \Sigma_i, i = 1, 2, \dots, c$ .初始化 $\hat{\theta}(0) = \mathbf{1}/p_0$ 和

$P_i(0) = p_0 I_{n_i}$ ,其中 $\mathbf{1}$ 为元素都为1的适当维数的列向量.

step 2: 采集输入输出数据 $\{u(k + t_{j-1}), y(k) | j = 1, 2, \dots, p, k = 1, 2, \dots, N\}$ ,根据式(6)构造调度输入信息向量 $\zeta(k)$ .经过EM算法聚类后,得到 $\alpha_i, \mu_i, \Sigma_i, i = 1, 2, \dots, c$ ,并将 $\zeta(k)$ 分别分到 $c$ 个类中.

step 3: 基于 $c$ 类数据集,由式(24)~(29)辨识局部子系统的参数 $\hat{\theta}_i(k)$ .

step 4: 令 $k = k + 1$ ,如果 $k < N$ ,则返回step 3,否则辨识算法结束.

## 2.3 辨识算法性能分析

为了说明算法的收敛性能,对一些数学记号进行说明:

1)  $|X| = \det[X]$ 表示矩阵 $X$ 的行列式;

2)  $f(k) = o(g(k))$ 表示 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k)/g(k) = 0$ ;

3)  $f(k) = O(g(k))$ ,表示当 $k$ 足够大时, $f(k) \leq \delta_1 g(k)$ .

为了说明(24)~(29)算法的收敛性,给出如下引理.

**引理1** 设矩阵 $D \in R^{m \times n}, E \in R^{n \times m}$ ,则有如下列不等式成立<sup>[20]</sup>:

$$|I_m + DE| = |I_n + ED|, \quad (31)$$

其中 $I_m$ 和 $I_n$ 分别为 $m$ 阶和 $n$ 阶的单位矩阵.

限于篇幅,证明略.

为了更好地分析辨识算法性能,对各子系统被激活时间和子系统采样总数进行说明.对于系统(14),第1个子系统、第2个子系统、...、第 $c$ 个子系统的被激活的总时间分别为 $T_1, T_2, \dots, T_c$ ,采样次数总数分别为 $N_1, N_2, \dots, N_c$ ,满足 $N_1 + N_2 + \dots + N_c = N$ .对于第 $i$ 个子系统的激活时刻 $\{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{iN_i}\}, 0 < t_{i1} < t_{i2} < \dots < t_{iN_i}$ ,可以映射为一个整数序列集合 $\{k_i = 1, 2, \dots, N_i\}$ 内的次数采样.具体而言:第 $i$ 个子系统在采样时刻 $t_{i1}$ 被激活,则 $k_i = 1$ ,记为第1次采样;在采样时刻 $t_{i2}$ 被激活,则 $k_i = 2$ ,记为第2次采样;...在采样时刻 $t_{iN_i}$ 被激活,则 $k_i = N_i$ ,记为第 $N_i$ 次采样.

**引理2** 对于系统(14),第 $i$ 个子系统在 $k_i = 1, 2, \dots, N_i$ 次采样时被激活,采用辨识算法(24)~(29),有下列不等式成立:

$$1) \sum_{k_i=1}^{N_i} \hat{\varphi}_i^T(k_i) P_i(k_i) \hat{\varphi}_i(k_i) \leq$$

$$\ln |P_i^{-1}(N_i)| + n_i \ln p_0;$$

$$2) \sum_{k_i=1}^{\infty} \frac{\hat{\varphi}_i^T(k_i) P_i(k_i) \hat{\varphi}_i(k_i)}{[\ln |P_i^{-1}(k_i)|]^l} \leq \infty, l > 1.$$

限于篇幅,证明略.

在分析算法收敛性之前,先分析一下参数估计误差存在的原因. 对于系统(14),若第*i*个子系统在*k<sub>i</sub>*时刻被激活,则其输入信息估计向量为 $\hat{\varphi}_i(k_i)$ . 若其被正确分类激活,则 $\varphi_i(k_i) - \hat{\varphi}_i(k_i) = 0$ ,此时与第*i*个子系统的真实输入信息向量完全相同;否则,其被错误分类激活,此时 $\hat{\varphi}_i(k_i)$ 和 $\varphi_i(k_i)$ 内输出变量元素来自不同子系统,存在 $\varphi_i(k_i) - \hat{\varphi}_i(k_i) \neq 0$ . 这样定义参数估计误差 $\tilde{\theta}_i(k_i)$ 为

$$\tilde{\theta}_i(k_i) = \hat{\theta}_i(k_i) - \theta_i. \quad (32)$$

其中: $\hat{\theta}_i(k_i)$ 为参数的估计向量, $\theta_i$ 为第*i*个子系统的真实参数向量. 式(31)两边减去 $\theta_i$ ,利用式(14)和(25)有

$$\begin{aligned} &\tilde{\theta}_i(k_i) = \\ &\tilde{\theta}_i(k_i - 1) + \\ &P_i(k_i)\hat{\varphi}_i(k_i)[y(k_i) - \hat{\varphi}_i^T(k_i)\hat{\theta}_i(k_i - 1)] = \\ &\tilde{\theta}_i(k - 1) + P_i(k_i)\hat{\varphi}_i(k_i)[\varphi_i^T(k_i)\theta_i + v(k_i) - \\ &\hat{\varphi}_i^T(k_i)\hat{\theta}_i(k_i - 1) + \hat{\varphi}_i^T(k_i)\theta_i - \hat{\varphi}_i^T(k_i)\theta_i] = \\ &\tilde{\theta}_i(k - 1) + P_i(k_i)\hat{\varphi}_i(k_i)[- \tilde{y}(k_i) + \xi(k_i) + v(k_i)]. \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{y}(k_i) &= \hat{\varphi}_i^T(k_i)\tilde{\theta}_i(k_i - 1), \\ \xi(k_i) &= [\varphi_i(k_i) - \hat{\varphi}_i(k_i)]^T\theta_i. \end{aligned}$$

通过观察式(32),显然参数估计误差向量 $\tilde{\theta}_i(k_i)$ 受到4项影响,即 $\tilde{\theta}_i(k_i - 1)$ 、 $-P_i(k_i)\hat{\varphi}_i(k_i)\tilde{y}(k_i)$ 、 $P_i(k_i)\hat{\varphi}_i(k_i)\xi(k_i)$ 和 $P_i(k_i)\hat{\varphi}_i(k_i)v(k_i)$ . 由于 $\xi(k_i) = [\varphi_i(k_i) - \hat{\varphi}_i(k_i)]^T\theta_i$ ,其可看作是第*i*个子系统模型匹配误差;若分类正确, $\varphi_i(k_i) - \hat{\varphi}_i(k_i) = 0$ ,则 $\xi(k_i) = 0$ ;若分类不正确, $\varphi_i(k_i) - \hat{\varphi}_i(k_i) \neq 0$ ,则 $\xi(k_i) \neq 0$ . 因此, $\xi(k_i)$ 的大小影响着 $P_i(k_i)\hat{\varphi}_i(k_i)\xi(k_i)$ 的结果,也影响着参数估计结果;如果分类结果越好,模式匹配越好, $\xi(k_i)$ 越小,则参数估计越准确,反之则参数估计越差. 为此给出如下定义.

**定义2** 在时间间隔[0, *t*]内,总的采样次数为*N*,各个子系统被激活次数分别为*N*<sub>1</sub>, *N*<sub>2</sub>, ..., *N*<sub>*c*</sub>,其满足*N*<sub>1</sub> + *N*<sub>2</sub> + ... + *N*<sub>*c*</sub> = *N*. 当第*i*个子系统被激活时,定义其被正确分类匹配的总数为*N*<sub>*r<sub>i</sub>*</sub>,被错误分类不匹配的总数为*N*<sub>*f<sub>i</sub>*</sub>,满足*N*<sub>*r<sub>i</sub>*</sub> + *N*<sub>*f<sub>i</sub>*</sub> = *N*<sub>*i*</sub>.

在此基础上,给出如下算法收敛性定理.

**定理1** 对于系统(12),当第*i*个子系统在*k<sub>i</sub>* = 1, 2, ..., *N<sub>i</sub>*次采样时被激活时,若噪声随机信号序列{*v*(*k<sub>i</sub>*)}满足下列条件,则参数估计误差满足收敛性

$$\lim_{N_i \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}_i(N_i) - \theta_i\| = 0:$$

$$(A1) \quad E\{v(k_i)\} = 0, \quad E\{v(k_i)v(k_j)\} = 0, \\ E\{v^2(k_i)\} = \sigma^2, \quad k_i \neq k_j, \quad i = 1, 2, \dots, c, \quad j = 1, 2, \dots, c.$$

若存在正常数 $\alpha > 0, \beta > 0, \mu > 0, \varepsilon > 0$ 和错误不匹配的总数*N<sub>f<sub>i</sub></sub>*是一个有限值,其满足 $0 \leq N_{f_i} \leq \eta$ 使得模式匹配误差 $\xi(k_i)$ 和输入信息向量 $\hat{\varphi}_i(k_i)$ 满足如下条件

$$(A2) \quad E\{\xi^2(k_i)\} = \varepsilon^2;$$

$$(A3) \quad \alpha I_{n_i} \leq \frac{1}{N_i} \sum_{k_i=1}^{N_i} \hat{\varphi}_i(k_i)\hat{\varphi}_i^T(k_i) \leq \beta I_{n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, c, \text{ as.}$$

限于篇幅,证明略.

### 3 仿真实例

考虑如下非均匀采样数据的切换系统:

$$A^i(z)y(k) = B_1^i u(k) + B_2^i u(k + t_1) + v(k), \\ i \in \{1, 2, 3\}. \quad (34)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} A^1(z) &= 1 + a_{11}z^{-1} + a_{12}z^{-2} = \\ &\quad 1 - 0.7832z^{-1} + 0.7788z^{-2}, \\ B_1^1(z) &= b_{111}z^{-1} + b_{112}z^{-1} = \\ &\quad 0.313z^{-1} + 0.0792z^{-2}, \\ B_2^1(z) &= b_{121}z^{-1} + b_{122}z^{-2} = \\ &\quad 0.2063z^{-1} + 0.397z^{-2}; \\ A^2(z) &= 1 + a_{21}z^{-1} + a_{22}z^{-2} = \\ &\quad 1 - 1.478z^{-1} + 0.9324z^{-2}, \\ B_1^2(z) &= b_{211}z^{-1} + b_{212}z^{-1} = \\ &\quad 0.1519z^{-1} + 0.04206z^{-2}, \\ B_2^2(z) &= b_{221}z^{-1} + b_{222}z^{-2} = \\ &\quad 0.0779z^{-1} + 0.1824z^{-2}; \\ A^3(z) &= 1 + a_{31}z^{-1} + a_{32}z^{-2} = \\ &\quad 1 - 1.529z^{-1} + 0.7408z^{-2}, \\ B_1^3(z) &= b_{311}z^{-1} + b_{312}z^{-1} = \\ &\quad 0.0690z^{-1} + 0.01538z^{-2}, \\ B_2^3(z) &= b_{321}z^{-1} + b_{322}z^{-2} = \\ &\quad 0.01538z^{-1} + 0.0421z^{-2}. \end{aligned} \right.$$

第1个、第2个、第3个子系统的参数向量分别为

$$\begin{aligned} \theta_1 &= [a_{11}, a_{12}, b_{111}, b_{112}, b_{121}, a_{122}]^T, \\ \theta_2 &= [a_{21}, a_{22}, b_{211}, b_{212}, b_{221}, a_{222}]^T, \\ \theta_3 &= [a_{31}, a_{32}, b_{311}, b_{312}, b_{321}, a_{322}]^T. \end{aligned}$$

在仿真中,系统输入非均匀刷新次数 $p = 2$ ,输入信号刷新间隔 $\tau_1 = 1\text{ s}, \tau_2 = 1.5\text{ s}$ ,则 $t_0 = 0\text{ s}, t_1 = \tau_1 = 1\text{ s}, T = t_2 = \tau_1 + \tau_2 = 2.5\text{ s}$ . 输入信号 $u(kT), y(kT + t_1)$ 是零均值、单位方差的随机信号;噪声为零均值、方差为 $\sigma^2 = 0.01$ 的高斯白噪声信号;设似然函数阈值 $\gamma = 10^{-5}$ ;初始协方差矩阵 $\Sigma_i (i = 1, 2, 3)$ 为单位矩阵; $\mu_i (i = 1, 2, 3)$ 取 $[0 \ 1]$ 之间的随机数;混合系数为 $\alpha_i = 1/3, i = 1, 2, 3$ . 参数相对估计误差为 $\delta\% = \|\hat{\theta}(k) - \theta\|^2 / \|\theta\|^2$ . 选取系统输入信息向量、调度输入信息向量分别为

$$\varphi(kT) = [-y(kT - T), -y(kT - 2T), u(kT - T),$$

$$u(kT - 2T), u(kT - T + t_1), u(kT - 2T + t_1)]^T, \\ \zeta(kT) = [-y(kT - T), -y(kT - 2T), u(kT - T), \\ u(kT - 2T), u(kT - T + t_1), u(kT - 2T + t_1)]^T.$$

针对系统(33),采用周期性随机切换信号,每50个样本为一个周期,对1000组样本进行了仿真. 设第1个子系统在 $k_1 = 1, 2, \dots, N_1$ 次采样时被激活,第2个子系统在 $k_2 = 1, 2, \dots, N_2$ 次采样时被激活,第3个子系统在 $k_3 = 1, 2, \dots, N_3$ 次采样时被激活,采用本文方法进行建模研究. 表1、表2、表3分别给出了3个局部模型的参数估计和相对估计误差情况.

表1 子系统模型1的参数估计和估计误差( $k_1 = 1, 2, \dots, N_1$ )

$k_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$b_{111}$	$b_{112}$	$b_{121}$	$a_{122}$	$\delta/\%$
50	-0.7773	0.7775	0.3136	0.0632	0.2199	0.4140	19.59
100	-0.7781	0.7787	0.3006	0.0759	0.2139	0.4228	12.66
150	-0.7837	0.7793	0.3007	0.0810	0.2172	0.4039	7.82
200	-0.7817	0.7771	0.3054	0.0806	0.2113	0.4021	6.33
300	-0.7839	0.7779	0.3091	0.0802	0.2103	0.3995	5.11
真值	-0.7832	0.7788	0.313	0.0792	0.2063	0.3970	

表2 子系统模型2的参数估计和估计误差( $k_2 = 1, 2, \dots, N_2$ )

$k_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$b_{211}$	$b_{212}$	$b_{221}$	$a_{222}$	$\delta/\%$
50	-1.4699	0.9282	0.1616	0.0489	0.0871	0.1881	16.67
100	-1.4760	0.9385	0.1532	0.0534	0.0850	0.1828	11.74
150	-1.4791	0.9371	0.1530	0.0437	0.0820	0.1856	8.35
200	-1.4780	0.9356	0.1578	0.0467	0.0794	0.1841	6.81
300	-1.4776	0.9344	0.1569	0.0478	0.0789	0.1833	5.53
真值	-1.478	0.9324	0.1519	0.04206	0.0779	0.1824	

表3 子系统模型3的参数估计和估计误差( $k_3 = 1, 2, \dots, N_3$ )

$k_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$b_{311}$	$b_{312}$	$b_{321}$	$a_{322}$	$\delta/\%$
50	-1.4038	0.6359	0.0993	0.0494	-0.0109	0.0833	14.41
100	-1.5442	0.7832	0.0929	0.0083	0.0197	0.0444	10.49
150	-1.5112	0.7376	0.0812	0.0125	0.0060	0.0504	9.15
200	-1.5357	0.7612	0.0713	-0.0016	0.0134	0.0520	5.67
300	-1.5381	0.7648	0.0671	0.0124	0.0184	0.0445	5.15
真值	-1.529	0.7408	0.0690	0.01538	0.01538	0.0421	

为了验证本文提出的高斯混合模型聚类方法的有效性,与文献[21]投影子空间法、文献[22]聚类方法进行比较. 通过50次重复实验统计,图3给出了高斯混合模型聚类估计方法,投影子空间法、聚类方法对比得到的分类错误率箱形图. 由图3可以看出,本文所提出方法的分类错误率主要集中在5.7%~

9.8%之间,投影子空间法的分类错误率集中在8.2%~14.5%之间,聚类方法的分类错误率集中在7.2%~13%之间,显然高斯混合模型聚类错误率较低. 图4给出了一次真实的切换率曲线和高斯混合模型聚类估计的切换率曲线的比较,两者的匹配率为89.6%.

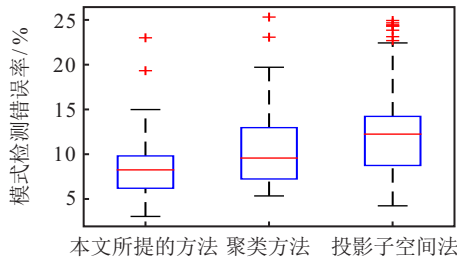
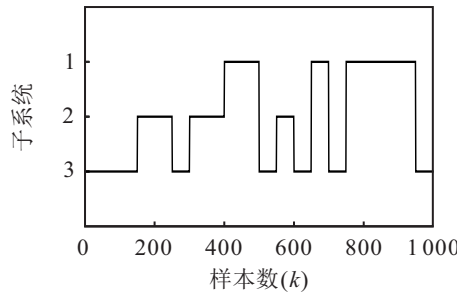
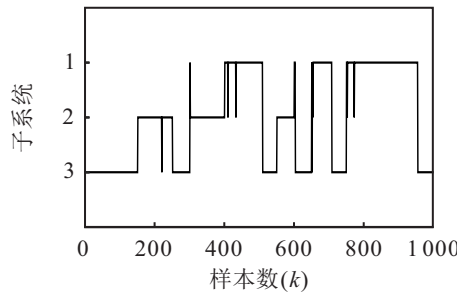


图3 不同方法分类错误率的箱形图

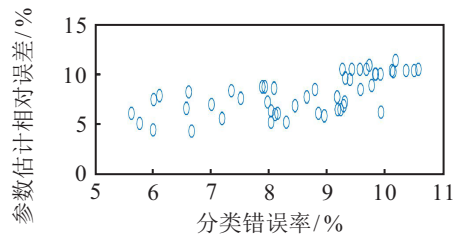


(a) 实际的切换过程

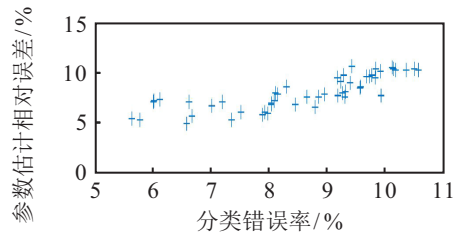


(b) 通过模型检测重构的切换过程

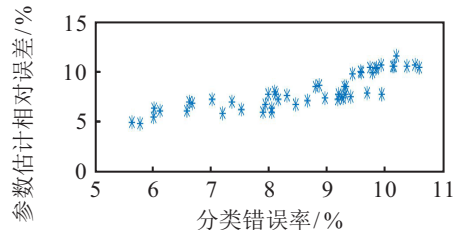
图4 真实的切换率曲线和高斯混合模型的聚类估计切换率曲线的比较



(a) 第1个子系统



(b) 第2个子系统



(c) 第3个子系统

图5 分类错误率与参数相对估计误差

图5为通过50次独立重复实验得到的分类错误率与参数相对估计误差的统计图.可以看出,参数相对估计误差与分类错误率呈正相关趋势,分类错误率越高,则参数相对估计误差越大;分类错误率越低,则参数相对估计误差越小,这也符合定理1的结论.如果每个子系统采样时间都很长,采样次数较多,则在分类错误率较低的情况下,此时参数相对估计误差很低,参数估计值将收敛于真值.

### 4 结论

本文提出了一种基于高斯混合模型聚类与递推最小二乘算法的非均匀采样数据非线性系统的多模型建模方法.高斯混合模型聚类方法克服了以往聚类算法受聚类初值和噪声影响的问题,通过矩阵理论、概率统计方法给出辨识算法收敛性条件,证明了如果分类错误率较低,或者错误有限,则参数辨识精度较高.另外,仿真例子验证了所提出的非均匀采样系统多模型建模方法具有简单、方便、精度高的特点.对于多输入多输出(MIMO)的非均匀采样系统的多模型建模,仍然很困难,这将是研究者未来关注的点.

### 参考文献(References)

- [1] Arun Kulkarni, Nikita Kulkarni. Fuzzy neural network for pattern classification[J]. Procedia Computer Science, 2020, 167(5): 2606-2616.
- [2] 徐璐璐, 王芳. 基于支持向量机和改进粒子群算法的科学前沿预测模型研究[J]. 情报科学, 2019, 37(8): 22-28.  
(Xu L L, Wang F. Scientific frontier prediction model based on support vector machine and improved particle swarm optimization[J]. Information Science, 2019, 37(8): 22-28.)
- [3] 王宏伟, 于双河. 基于Chebyshev正交函数神经网络的混沌系统鲁棒自适应同步[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(10): 1100-1104.  
(Wang H W, Yu S H. Robust adaptive synchronization of chaotic systems based on Chebyshev orthogonal function neural net[J]. Control Theory & Applications, 2009, 26(10): 1100-1104.)
- [4] 杨博帆, 张琳, 张博, 等. 动态多模型指数平滑法融合的在线预测方法[J]. 系统工程与电子技术, 2020, 42(9): 2013-2021.  
(Yang B F, Zhang L, Zhang B, et al. Method of online prediction based on fused by dynamic exponential smoothing of multi-model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2020, 42(9): 2013-2021.)
- [5] 高志远, 朱晓锦, 张合生, 等. 变负载柔性悬臂梁的多模型混合自适应振动控制[J]. 中国科学-信息科学, 2020, 50(5): 734-742.  
(Gao Z Y, Zhu X J, Zhang H S, et al. Multi-model

- hybrid adaptive vibration control of variable load flexible cantilever beam[J]. *Scientia Sinica: Informationis*, 2020, 50(5): 734-742.)
- [6] 赖小波, 许茂盛, 徐小眉. 基于多模型融合和区域迭代生长的视网膜血管自动分割[J]. *电子学报*, 2019, 47(12): 2611-2621.  
(Lai X B, Xu M S, Xu X M. Automatic retinal vessel segmentation based on multi-model fusion and region iterative growth[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2019, 47(12): 2611-2621.)
- [7] Johansen T A, Foss B A. A NARMAX model representation for adaptive control based on local models[J]. *Modeling, Identification and Control*, 1992, 13(1): 25-39.
- [8] Murry S R, Johansen T A. Multiple model approaches to modeling and control[M]. London: Taylor and Francis, 1997.
- [9] Johansen T A, Foss B A. Identification of nonlinear systems structure and parameters using regime composition[J]. *Automatica*, 1995, 31(3): 321-326.
- [10] 薛振框. 基于局部模型网络的多模型建模与控制[D]. 上海: 上海交通大学自动化研究所, 2005.  
(Xue Z K. Multi-model modeling and control based on local model network[D]. Shanghai: Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University, 2015.)
- [11] Liu Ranran, Pan Tianhong, Li Zhengming. Multi-model recursive identification for nonlinear systems with non-uniformly sampling[J]. *Cluster Computer*, 2017, 13(1): 25-32.
- [12] Liu Ranran, Li Haoran, Pan Tianhong, et al. Parameter estimation for non-uniformly sampled wiener systems with dead-zone nonlinearities[J]. *IFAC-Papers On-Line*, 2015, 28(8): 789-794.
- [13] Zheng Enxing, Liu Ranran, Jiang Yifeng, et al. Stochastic gradient identification for Hammerstein systems with non-uniformly sampling[J]. *Computer Systems Science and Engineering*, 2016, 31(6): 439-444.
- [14] Zhou Lincheng, Li Xiangli, Pan Feng. Gradient-based iterative identification for Wiener nonlinear systems with non-uniform sampling[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 76(1): 627-634.
- [15] 刘冉冉, 潘天红, 李正明. 非均匀Hammerstein-Wiener系统的递阶随机梯度辨识算法[J]. *控制与决策*, 2015, 30(8): 1491-1496.  
(Liu R R, Pan T H, Li Z M. Hierarchical stochastic gradient identification for Hammerstein-Wiener systems with non-uniformly sampling[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(8): 1491-1496.)
- [16] 王宏伟, 夏浩. 非均匀多采样率非线性系统的模糊辨识[J]. *控制与决策*, 2015, 30(9): 1646-1652.  
(Wang H W, Xia H. Fuzzy identification for non-uniformly multi-rate sampled nonlinear systems[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(9): 1646-1652.)
- [17] 王宏伟, 连捷, 夏浩. 基于递阶原理的非均匀采样非线性系统的模糊辨识[J]. *电子学报*, 2018, 46(4): 1005-1011.  
(Wang H W, Lian J, Xia H. Fuzzy identification for non-uniformly sampled nonlinear systems based on hierarchical principle[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2018, 46(4): 1005-1011.)
- [18] 王宏伟, 谢丽蓉. 基于矩阵奇异值分解的非均匀采样非线性系统的模糊模型辨识[J]. *控制与决策*, 2020, 35(3): 757-762.  
(Wang H W, Xie L R. Identification of fuzzy model of non-uniformly sampled nonlinear systems based on singular value decomposition[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(3): 757-762.)
- [19] 李航. 统计学习方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2019.  
(Li H. Statistical learning methods[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2019.)
- [20] 丁锋. 系统辨识-辨识方法性能分析[M]. 北京: 科学出版社, 2014.  
(Ding F. System identification-performance analysis of identification methods[M]. Beijing: Science Press, 2014.)
- [21] Borges J, Verdult V, Verhaegen M, et al. A switching detection method based on projected subspace classification[C]. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision, and Control and the European Control Conference*. Seville: IEEE, 2005: 344-349.
- [22] Wang H W, Xia H. Identification algorithm of switched systems based on generalized auxiliary model[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2019, 30(6): 1224-1232.

### 作者简介

王宏伟(1969—), 男, 教授, 博士生导师, 从事多采样率系统辨识与控制、切换系统的辨识与控制等研究, E-mail: 1195201627@qq.com;

柴秀俊(1994—), 男, 硕士生, 从事切换系统辨识的研究, E-mail: 317101556@qq.com.

(责任编辑: 孙艺红)