

# 服务水平约束下基于可调节鲁棒优化的固定比例生产与库存计划模型

袁明利, 邱若臻<sup>†</sup>, 孙月

(东北大学 工商管理学院, 沈阳 110169)

**摘要:** 在不确定需求环境下, 研究了由原材料供应商、制造商和客户组成的三级供应链中, 具有固定比例生产系统的制造商多周期生产与库存计划问题. 采用区间不确定集描述市场需求不确定性, 采用联合机会约束刻画制造商的服务水平要求. 在线性决策规则下, 建立了带有联合机会约束的固定比例生产系统生产与库存仿射可调节鲁棒优化模型. 进一步, 将所建模型等价转换为易于求解的线性规划问题. 考虑到不确定扰动系数在模型鲁棒性和解的保守性之间的调节作用, 给出了能有效提高具有固定比例生产系统的制造商利润并同时满足预设服务水平的不确定扰动系数优化算法. 数值算例表明, 基于本文模型获得的运作方案能有效应对供需平衡程度的变化, 并且能以较高利润满足预设服务水平要求.

**关键词:** 固定比例生产系统; 供应链; 生产-库存计划; 仿射可调节鲁棒优化; 服务水平; 需求不确定性

中图分类号: F253.4

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.0646

引用格式: 袁明利, 邱若臻, 孙月. 服务水平约束下基于可调节鲁棒优化的固定比例生产与库存计划模型[J]. 控制与决策.

## Fixed Proportions Production and Inventory Planning Model under Service Level Constraint Based on Affinely Adjustable Robust Optimization

YUAN Ming-li, QIU Ruo-zhen<sup>†</sup>, SUN Yue

(School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

**Abstract:** A multi-period production and inventory planning problem of a manufacturer with fixed proportions production system in a three-stage supply chain consisting of a raw material supplier, a manufacturer and customers is studied under the uncertain demand environment. The interval uncertainty set is used to model market demand uncertainties, and the joint chance constraint is adopted to describe the service level requirement of the manufacturer. An affinely adjustable robust production and inventory optimization model with a joint chance constraint is developed based on the linear decision rule for the fixed proportions production system. Furthermore, the developed robust optimization model is equivalently transformed into a tractable linear programming model. Considering the moderating effect of uncertain disturbance coefficient between model robustness and the conservatism of the solution, an uncertain disturbance coefficient optimization algorithm is proposed, which can effectively improve the total profit of the manufacturer with fixed proportions production system and satisfy the pre-specified service level. Numerical examples show that the operation scheme obtained based on the proposed model can effectively cope with the changes in the balance degree of supply and demand, and can satisfy the pre-specified service level with a higher profit.

**Keywords:** Fixed proportions production system; Supply chain; Production-inventory planning; Affinely adjustable robust optimization; Service level; Demand uncertainty

## 0 引言

生产-库存计划是企业运作管理的重要组成部分, 长期以来备受企业和学术界关注<sup>[1]</sup>. 企业通过制

定科学合理的计划, 从而带来竞争优势<sup>[2]</sup>. 在复杂多变的供应链环境下, 企业通常面临需求不确定性问题, 从而影响企业的运作绩效及能否实现较高的客

收稿日期: 2022-04-19; 录用日期: 2022-10-03.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (72272030, 71772035), 辽宁省兴辽英才计划项目 (XLYC1907104).

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: rzqiu@mail.neu.edu.cn.

户服务水平<sup>[3]</sup>. 在不确定环境中, 生产-库存计划制定不合理, 一方面会导致企业的获得低利润, 另一方面也会影响企业对客户的服务水平. 因此, 制定出能有效应对需求不确定性扰动, 并且能满足一定服务水平要求的鲁棒生产-库存计划, 对于供应链企业在日趋激烈的竞争环境中获得竞争优势至关重要.

以往针对生产-库存计划的研究很少关注固定比例生产系统, 而实际供应链中存在诸多拥有固定比例生产系统的制造企业. 固定比例生产系统, 即制造商一次投入产生固定比例的多种产品, 或者制造商生产一种产品的同时, 产出一定比例的副产品<sup>[4]</sup>. 例如, 在石油冶炼行业, 产出汽油和柴油的出油比例是由原油质量和炼油企业采用的蒸馏设备以及技术决定的, 一般不能随意调整<sup>[5]</sup>. 一项对农产品加工企业供应管理问题的研究表明, 固定比例生产技术的成本价值大于柔性生产技术<sup>[6]</sup>. 随着对固定比例生产系统价值认知的深化, 一些学者开始关注拥有固定比例生产系统的制造商生产与库存计划问题<sup>[7-10]</sup>. 然而, 上述关于固定比例生产技术的研究大都基于确定性需求或需求的分布信息已知制定企业的决策. 由于市场竞争的复杂多变, 不确定因素日益增加, 使得需求已知或需求分布信息已知的假设难以适应实际要求<sup>[11]</sup>. 这迫使决策者寻求一种能有效应对日益增加的不确定性扰动的决策方法.

鲁棒优化, 近年来被相关学者广泛应用于处理不确定性问题<sup>[12-13]</sup>. 利用鲁棒优化方法解决供应链中生产计划或库存控制的文献中, 较多假定相关变量需要在不确定需求实现之前进行决策<sup>[14]</sup>. 然而, 在实际的供应链环境中, 生产-库存问题一般都具有多周期运作属性. 因此, 一些决策变量 (如订货量、生产量、库存量等) 可以在不确定参数 (如, 需求) 实现之后进行决策. 这种决策方式下, 决策者可以充分利用已实现的不确定参数信息更有效地进行本期决策. 基于这一考虑, Ben-Tal 等<sup>[15]</sup> 对传统鲁棒优化方法进行了延伸, 提出了可调节鲁棒优化方法. 利用该方法, Ben-Tal 等<sup>[16]</sup> 研究了不确定需求下零售商与供应商多周期柔性契约问题. 由此, 大量学者利用该方法解决供应链中的相关问题<sup>[17-19]</sup>. 上述文献为本文研究需求不确定下的固定比例生产系统生产-库存计划问题提供了方法上的借鉴.

与本文密切相关的另一个问题是服务水平, 服务水平是衡量“客户服务”的重要指标, 它度量了需求被满足的比例<sup>[20]</sup>. 库存服务水平的提高会带来需求增长, 使得企业利润增加<sup>[21]</sup>. 基于此, 一些学者在

解决供应链中相关问题时考虑了服务水平<sup>[22-24]</sup>. 目前, 考虑服务水平文献中一般应用单机会服务水平约束<sup>[25-26]</sup>, 而本文将建立带有联合服务水平约束的固定比例生产系统生产-库存计划模型, 并将其转化为易于求解的线性规划模型.

由上述研究可以看出, 目前关于固定比例生产系统生产-库存计划问题的研究仍存在如下亟待解决的问题:(1) 已有研究主要集中于已知确定性需求或已知需求分布信息, 而在实际生产经营过程中, 企业通常缺乏充分的专业知识来掌握需求的完备信息, 导致这种假设难以适应实际要求;(2) 鲁棒优化方法虽然广泛应用于不确定环境下的生产-库存计划问题研究, 但关于需求不确定下固定比例生产系统的生产-库存计划问题研究还有待进一步加强;(3) 已有关于固定比例生产系统的研究很少考虑服务水平约束问题, 在实际经营中, 以较高的服务水平向市场供货对企业提高利润至关重要. 基于此, 本文针对拥有固定比例生产系统的制造商, 研究不确定市场需求下考虑服务水平约束的多周期生产与库存问题, 在线性决策规则和需求不确定集定义基础上, 给出基于仿射可调节鲁棒优化方法的生产与库存计划模型. 进一步, 针对需求不确定性和联合服务水平约束导致的模型求解难度问题, 将所建模型等价转换为易于求解的线性规划问题. 特别地, 采用双层优化算法, 找到能够满足预设服务水平并有效提高拥有固定比例生产系统制造商总利润的最优预算参数值. 最后通过数值计算验证文中所建模型和解决方法的有效性.

## 1 问题描述

针对由原材料供应商 (以下简称供应商)、拥有固定比例生产系统的制造商 (以下简称制造商) 和下游市场组成的三级供应链 (如图 1 所示), 研究需求不确定情况下, 考虑服务水平要求的制造商多周期生产-库存计划问题. 为了向市场投放产品并充分利用所购原材料, 制造商采用固定比例生产系统生产产品. 不失一般性, 假设该系统中每单位原材料能够生产固定比例的两种产品, 即每单位原材料生产  $\theta_1$  单位的产品 1 和  $\theta_2$  单位的产品 2,  $\theta_1 + \theta_2 = 1$ . 供应链中, 制造商通过与供应商签订数量柔性合同来进行原材料的采购, 供应商负责原材料的配送, 配送费用包含在原材料的价格内. 数量柔性合同中, 制造商预先向供应商提出每周期原材料的采购数量, 这有助于供应商更好地备货; 作为回报, 供应商会给予制造商较低的原材料采购单价. 需要指出的是, 当制造商每周

期的原材料采购数量承诺不一致时会产生相应的惩罚成本, 这是因为承诺数量的波动会导致供应商变更生产计划<sup>[16]</sup>. 随着周期的运营, 制造商可根据市场需求的变化情况确定原材料的实际采购数量, 当实际采购数量与合同中承诺数量不同时, 供应商需要进行计划外生产或存储, 不利于供应链成员间的协同合作. 因此, 为确保制造商尽可能按照合同承诺数量执行采购活动, 假设当制造商未按承诺数量进行采购时会招致惩罚成本. 此外, 供应商会根据自身产能情况在合同中规定原材料采购数量的上限和下限.

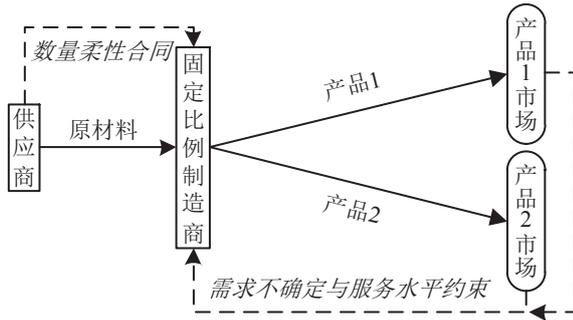


图1 需求不确定和服务水平约束下的三级供应链

供应链中, 制造商直接面对两种产品的不确定市场需求, 可能导致缺货情况的发生. 在这种不确定需求环境下, 制造商将在每个运营周期的期初决定其原材料采购数量以及原材料加工数量. 根据 Kloos<sup>[20]</sup>, 将服务水平定义为被满足的需求占总需求的比率. 同时, 为了应对市场竞争, 更好地满足市场对两种产品的需求, 供应商在运营周期开始之前设定预期服务水平的满足率为  $1 - \varepsilon$ . 此外, 考虑到原材料运输与生产时滞等现实因素, 允许制造商持有一定数量的原材料以及产品库存, 但要承担相应的库存成本. 运营周期结束之后, 针对未售出的产品, 制造商会以折扣价格对产品进行处理, 本文假设处理的产品能全部被销售. 本文中, 为了充分利用以往周期内已实现的需求信息, 允许一些决策随着周期的运营和需求的实现而进行动态调整. 这一考虑体现了生产-库存计划的动态性和柔性, 有助于提高制造商利润, 并灵活应对不确定需求.

在上述背景下, 制造商需要在运营周期开始之前确定全部运营周期的原材料采购数量承诺. 随着周期的运营, 制造商需要在每一周期内确定原材料实际采购数量、原材料加工数量和销售损失, 以最大化制造商的总利润. 下面将在建模所需相关符号定义基础上给出服务水平约束下的制造商生产-库存计划基本模型; 并进一步给出能应对不确定需求, 同时满足一定服务水平的可调节鲁棒优化模型.

## 2 考虑服务水平约束的固定比例制造商生产-库存计划模型

### 2.1 符号定义

集合和下标

$t$  周期,  $t \in \mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$

$i$  产品,  $i \in \mathcal{I} = \{1, 2\}$

参数

$r_t^i$  产品  $i$  在  $t$  周期的单价

$w_t(c_t)$  原材料的单位加工 (采购) 成本

$h(\tilde{h}_i)$  原材料 (产品  $i$ ) 的单位库存持有成本

$u^+(u^-)$  高 (低) 于承诺采购数量的单位惩罚成本

$v_t^+(v_t^-)$  承诺采购数量变高 (低) 的单位惩罚成本

$y_0$  决策期初原材料库存

$s_i$  未售产品的市场回收价格

$L_t(U_t)$  原材料最低 (最高) 采购数量

$\beta$  预设的产品最高销售损失占需求的比例

$\varepsilon$  违反服务水平约束的概率

状态变量

$x_t^i$   $t$  周期期初产品  $i$  的库存数量

$y_t$   $t$  周期期末的原材料库存数量

决策变量

$q_t$   $t$  周期原材料的加工数量

$o_t(Q_t)$   $t$  周期原材料的采购 (承诺) 数量

$l_t^i$   $t$  周期产品  $i$  的销售损失数量

### 2.2 基本模型构建

文中考虑的制造商生产-库存计划问题涉及与供应商数量柔性合同的签订、原材料实际采购数量、生产计划制定及库存决策等一系列问题, 目标是在满足市场服务水平约束的同时, 使得整个固定比例生产系统总利润最高. 基于前述基本问题描述, 制造商生产与库存计划基本模型构建如下:

$$\begin{aligned} \max \left\{ \sum_t \sum_i r_t^i (d_t^i - l_t^i) - \sum_t (q_t w_t + c_t o_t + h y_t + \sum_i \tilde{h}_i x_{t+1}^i + u_t^+ (o_t - Q_t)^+ + u_t^- (Q_t - o_t)^+ + v_t^+ (Q_t - Q_{t-1})^+ + v_t^- (Q_{t-1} - Q_t)^+) + \sum_i s_i x_{T+1}^i \right\}. \\ \text{s.t. } \Pr\{l_t^i \leq \beta d_t^i, t \in \mathcal{T}\} \geq 1 - \varepsilon, i \in \mathcal{I}; \\ x_{t+1}^i = q_t \theta_i + l_t^i + x_t^i - d_t^i, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}; \\ y_t = y_{t-1} + o_t - q_t, t \in \mathcal{T}; \\ q_t \leq y_{t-1} + o_t, t \in \mathcal{T}; \\ L_t \leq o_t \leq U_t, t \in \mathcal{T}; \\ q_t, x_t^i, l_t^i, o_t, y_t \geq 0, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $(a)^+ := \max\{a, 0\}$ . 上述问题 (1) 中目标函数度量了制造商的总利润. 具体地, 目标函数中第一项是销售收入, 第二项是运作成本, 第三项是运营周期结束后市场回收剩余产品的收入. 其中, 总成本

包括原材料加工成本、原材料采购成本、原材料及产品的库存成本、原材料实际采购数量与承诺采购数量的偏差惩罚成本以及原材料承诺采购数量的波动惩罚成本. 第一个约束是服务水平约束, 其中  $\beta_i d_t^i$  是  $t$  周期产品  $i$  预期允许的最高销售损失, 该约束表示所有周期内产品  $i$  的销售损失数量小于预期允许的最高销售损失的概率至少为  $1 - \varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ). 可以看出, 该约束是一个联合机会约束. 第二个约束表示产品的库存平衡约束. 第三个约束表示原材料的库存平衡约束. 第四个约束确保每周用于加工的原材料数量不超过所持有的原材料数量. 第五个约束确保制造商采购的原材料数量在供应商规定的范围内. 第六个约束保证了决策变量的非负性. 需要指出的是, 模型中将销售损失数量  $l_t^i$  作为决策变量. 这是因为决策者可通过控制销售损失的数量实现一定服务水平约束下的利润最大化.

特别地, 问题 (1) 中产品与原材料的库存平衡约束可改写为:

$$x_{t+1}^i = \sum_{t'=1}^t q_{t'} \theta_i + \sum_{t'=1}^t l_{t'}^i - \sum_{t'=1}^t d_{t'}^i, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}; \quad (2)$$

$$y_t = y_0 + \sum_{t'=1}^t o_{t'} - \sum_{t'=1}^t q_{t'}, t \in \mathcal{T}. \quad (3)$$

因此, 用式 (2) 与 (3) 中等号右端项代替问题 (1) 中的  $x_{t+1}^i$  和  $y_t$ . 进一步, 通过引入辅助变量  $f_t$  和  $g_t$  可消除式 (1) 中形如  $(a)^+$  的分段线性项. 最终, 上述制造商生产与库存计划基本模型 (1) 可描述为:

$$\begin{aligned} \max \left\{ \sum_t \left( \sum_i r_t^i d_t^i - (w_t q_t + c_t o_t + \sum_i r_t^i l_t^i + \sum_i \tilde{h}_i (\sum_{t'=1}^t q_{t'} \theta_i + \sum_{t'=1}^t l_{t'}^i - \sum_{t'=1}^t d_{t'}^i)) + f_t + g_t + h(y_0 + \sum_{t'=1}^t o_{t'} - \sum_{t'=1}^t q_{t'}) \right) + \sum_i s_i \left( \sum_{t=1}^T q_t \theta_i + \sum_{t=1}^T l_t^i - \sum_{t=1}^T d_t^i \right) \right\} \\ \text{s.t. } \Pr\{l_t^i \leq \beta d_t^i, t \in \mathcal{T}\} \geq 1 - \varepsilon, i \in \mathcal{I}; \\ \sum_{t'=1}^t q_{t'} \leq y^0 + \sum_{t'=1}^t o_{t'}, t \in \mathcal{T}; \\ \sum_{t'=1}^t q_{t'} \theta_i + \sum_{t'=1}^t l_{t'}^i - \sum_{t'=1}^t d_{t'}^i \geq 0, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}; \\ f_t \geq u_t^+(o_t - Q_t), f_t \geq u_t^-(Q_t - o_t), t \in \mathcal{T}; \\ g_t \geq v_t^+(Q_t - Q_{t-1}), g_t \geq v_t^-(Q_{t-1} - Q_t), t \in \mathcal{T}; \\ L_t \leq o_t \leq U_t, t \in \mathcal{T}; \\ q_t, l_t^i \geq 0, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (4)$$

由于联合机会约束的存在, 优化问题 (4) 是决策变量为  $(q_t, o_t, f_t, g_t, l_t^i, Q_t)$  的非线性规划模型. 当已知需求的精确分布信息时, 可利用随机规划方法将其

转化为可解的数学模型. 然而, 精确的需求分布信息通常难以获得. 而在多周期不确定环境中, 对模型中不确定参数的错误假设, 可能导致最终决策严重违反约束. 这就促使决策者必须寻找一种在不确定因素存在情况下的建模及求解方法. 因此, 可调节鲁棒优化方法被广泛用于多周期不确定环境下的供应链运作问题研究.

## 2.3 需求不确定下考虑服务水平约束的固定比例制造商生产-库存仿射可调节鲁棒优化模型

### 2.3.1 线性决策规则与需求不确定集合的建立

如前所述, 文中考虑多周期运作下制造商生产与库存计划问题. 随着周期的运营, 制造商可以精确观测到已经发生的需求情况.  $t$  周期原材料承诺采购数量  $Q_t$  和相关的辅助变量  $g_t$  需要在运营周期开始之前进行决策, 又称为 here-and-now 决策.  $t$  周期的决策变量  $q_t, o_t, f_t$  和  $l_t^i$  可以在第 1 期至第  $t-1$  期的市场需求实现之后进行决策, 又称为 wait-and-see 决策. 根据 Ben-Tal 等<sup>[6]</sup>, 为充分利用历史需求数据, 动态调整生产-库存计划, 文中的决策变量  $q_t, o_t, f_t$  和  $l_t^i$  可以表示为已经实现的需求的线性函数, 即线性决策规则, 定义如下:

**定义 1** 周期  $t$  内的决策变量  $(q_t, o_t, f_t, l_t^i)$  可表示为如下关于以实现需求的线性函数形式, 即

$$\begin{cases} q_t = q_t^0 + \sum_i \sum_{\tau=1}^{t-1} q_t^\tau d_\tau^i, t \in \mathcal{T}; \\ o_t = o_t^0 + \sum_i \sum_{\tau=1}^{t-1} o_t^\tau d_\tau^i, t \in \mathcal{T}; \\ f_t = f_t^0 + \sum_i \sum_{\tau=1}^{t-1} f_t^\tau d_\tau^i, t \in \mathcal{T}; \\ l_t^i = l_t^{i0} + \sum_{\tau=1}^{t-1} l_t^{i\tau} d_\tau^i, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}. \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $q_t^0, q_t^\tau, o_t^0, o_t^\tau, f_t^0, f_t^\tau$  和  $l_t^{i0}, l_t^{i\tau}$  为待定的仿射系数. 该线性决策规则表示  $q_t$  和  $o_t$  等决策变量与第 1 期至第  $t-1$  期的需求有关. 由定义 1 可知, 线性决策规则的引入使决策者能充分利用已实现的历史需求数据, 使决策更能适应市场的变化.

**定义 2**  $t$  周期内产品  $i$  的市场需求属于如下不确定集  $\mathcal{U}$ , 即

$$\mathcal{U} = \left\{ d_t^i \in R_+^T \mid \begin{cases} \bar{d}_t^i - \Delta \tilde{d}_t^i \leq d_t^i \leq \bar{d}_t^i + \Delta \tilde{d}_t^i; \\ 0 \leq \Delta \leq 1, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}. \end{cases} \right\} \quad (6)$$

式 (6) 给出了需求所隶属的不确定集, 其中,  $\bar{d}_t^i$  为产品  $i$  在  $t$  周期需求的名义值;  $\tilde{d}_t^i$  为产品  $i$  在  $t$  周期的实际需求相对于名义需求的最大偏离量;  $\Delta$  为不确定扰动系数,  $\Delta = 0$  对应确定性需求;  $\Delta = 1$

对应需求在最大区间范围内波动, 即  $\mathcal{U}_{max} = \{d_t^i \mid d_t^i \in [\bar{d}_t^i - \hat{d}_t^i, \bar{d}_t^i + \hat{d}_t^i]\}$ . 实际求解过程中, 参数  $\Delta$  的取值通常由决策者根据实际情况设定.  $\Delta$  值越大, 解的鲁棒性水平越高, 保守性也越高. 本文将给出不确定扰动系数  $\Delta$  的优化算法, 旨在找到最优的不确定扰动系数  $\Delta$ , 使得该值得到的鲁棒解在面临最大需求扰动时, 仍能确保实际服务水平满足要求.

求解问题 (4) 的关键在于将其转为化易于求解的数学规划问题. 下面, 2.3.2 节将对联合机会约束进行处理. 在此基础上, 对所有包含不确定需求的项进行处理, 将其等价地转化为易于求解的数学规划.

### 2.3.2 联合机会约束的处理

在线性决策规则 (5) 和需求不确定集合 (6) 下, 联合机会约束可描述如下:

$$\Pr \left\{ l_t^{i0} + \sum_{\tau=1}^{t-1} l_t^{\tau} \bar{d}_\tau^i - \beta \bar{d}_t^i + \sum_{\tau=1}^{t-1} l_t^{\tau} \hat{d}_\tau^i - \beta \hat{d}_t^i \leq 0, t \in \mathcal{T} \right\} \geq 1 - \varepsilon, i \in \mathcal{I}. \quad (7)$$

其中,  $\hat{d}_t^i \in \hat{U} = [-\Delta \bar{d}_t^i, \Delta \bar{d}_t^i], i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}$ . 为方便描述, 定义  $p_t^{i\tau}$  如下:

$$p_t^{i\tau} = \begin{cases} l_t^{i\tau}, & 1 \leq \tau \leq t-1, \\ -\beta, & \tau = t, \\ 0, & t+1 \leq \tau \leq T, \end{cases} \quad i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}. \quad (8)$$

则联合机会约束式 (7) 等价于:

$$\Pr \{ p_t^{i0} + (\mathcal{P}_t^i)' \hat{D}^i > 0, t \in \mathcal{T} \} \leq \varepsilon, i \in \mathcal{I}. \quad (9)$$

其中,  $p_t^{i0} = l_t^{i0} + \sum_{\tau=1}^{t-1} l_t^{\tau} \bar{d}_\tau^i - \beta \bar{d}_t^i, \mathcal{P}_t^i = [p_t^{i1}, p_t^{i2}, \dots, p_t^{iT}]', \hat{D}^i = [\hat{d}_1^i, \hat{d}_2^i, \dots, \hat{d}_T^i]'$ .

根据 Chen 和 Sim<sup>[27]</sup>, 可通过为式 (9) 大括号中每个约束赋予权重  $\alpha_t^i (i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T})$  将联合机会约束 (9) 转化为以下单机会约束, 即

$$\Pr \{ \max_{t \in \mathcal{T}} (\alpha_t^i p_t^{i0} + \alpha_t^i (\mathcal{P}_t^i)' \hat{D}^i) > 0 \} \leq \varepsilon, i \in \mathcal{I}. \quad (10)$$

令  $\delta_i = \max_{t \in \mathcal{T}} (\alpha_t^i p_t^{i0} + \alpha_t^i (\mathcal{P}_t^i)' \hat{D}^i)$ , 则式 (10) 不等号左边项等价于  $\Pr \{ \delta_i > 0 \} = E[1_{(0,+\infty)}(\delta_i)], 1_{(0,+\infty)}(\delta_i)$  为指示函数. 根据 Yuan 和 Li<sup>[28]</sup>,  $1_{(0,+\infty)}(\delta_i) \leq \frac{1}{\rho_i} (\rho_i + \delta_i)^+$  ( $\rho_i$  为给定上界参数). 因此, 对于  $i \in \mathcal{I}$ , 有下式成立, 即

$$\begin{aligned} \Pr \{ \delta_i > 0 \} &= E[1_{(0,+\infty)}(\delta_i)] \leq E \left[ \frac{1}{\rho_i} (\rho_i + \delta_i)^+ \right] \\ &= \frac{1}{\rho_i} E \left[ \left( \max_{t \in \mathcal{T}} (\alpha_t^i p_t^{i0} + \alpha_t^i (\mathcal{P}_t^i)' \hat{D}^i) + \rho_i \right)^+ \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

对于  $i \in \mathcal{I}$  和  $t \in \mathcal{T}$ , 令  $X_t^i = \alpha_t^i p_t^{i0} + \alpha_t^i (\mathcal{P}_t^i)' \hat{D}^i$ , 则根据 Meilijson 和 Nadas 不等式<sup>[29]</sup>, 有  $E \left[ \left( \max_{t \in \mathcal{T}} (X_t^i + \rho_i) \right)^+ \right] \leq E \left[ (Y_i + \rho_i)^+ \right] + \sum_t E \left[ (X_t^i - Y_i)^+ \right]$ , 其中,  $Y_i = e^{i0} + (e^i)' \hat{D}^i$  和  $e^i = [e_1^i, e_2^i, \dots, e_T^i]'$

为辅助向量. 从而可得:

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \max_{t \in \mathcal{T}} (\alpha_t^i p_t^{i0} + \alpha_t^i (\mathcal{P}_t^i)' \hat{D}^i) + \rho_i \right)^+ \right] &\leq E \left[ \left( m^{i0} + (e^i)' \hat{D}^i \right)^+ \right] \\ &+ \sum_t E \left[ \left( z_t^{i0} + (z_t^i)' \hat{D}^i \right)^+ \right], \quad i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \quad (12)$$

其中,  $m^{i0} = e^{i0} + \rho_i, z_t^{i0} = \alpha_t^i p_t^{i0} - e^{i0}, z_t^i = [z_t^{i1}, z_t^{i2}, \dots, z_t^{iT}]' = \alpha_t^i (\mathcal{P}_t^i)' - e^i$ . 在不确定集合 (6) 下,  $E \left[ \left( m^{i0} + (e^i)' \hat{D}^i \right)^+ \right] \leq$ . 因此, 式 (12) 等价于:

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \max_{t \in \mathcal{T}} (\alpha_t^i p_t^{i0} + \alpha_t^i (\mathcal{P}_t^i)' \hat{D}^i) + \rho_i \right)^+ \right] &\leq \left( m^{i0} + \max_{\hat{D}^i} (\hat{D}^i)' e^i \right)^+ \\ &+ \sum_t \left( z_t^{i0} + \max_{\hat{D}^i} (\hat{D}^i)' z_t^i \right)^+, \quad i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \quad (13)$$

在上述处理过程基础上, 式 (10) 可描述为:

$$\Pr \left\{ \max_{t \in \mathcal{T}} (\alpha_t^i p_t^{i0} + \alpha_t^i (\mathcal{P}_t^i)' \hat{D}^i) > 0 \right\} \leq \frac{1}{\rho_i} \left( m^{i0} + \max_{\hat{D}^i} (\hat{D}^i)' e^i \right)^+ + \sum_t \left( z_t^{i0} + \max_{\hat{D}^i} (\hat{D}^i)' z_t^i \right)^+ \leq \varepsilon, i \in \mathcal{I}. \quad (14)$$

为简化处理, 不妨令联合机会约束 (9) 中每个周期的服务水平约束的权重相同, 即  $\alpha_t^i = 1$ . 此时, 式 (12)(或式 (13)、(14)) 中的  $m^{i0}$ 、 $z_t^{i0}$  和  $z_t^{i\tau}$  等同于:

$$\begin{cases} m^{i0} = e^{i0} + \rho_i, & i \in \mathcal{I}; \\ z_t^{i0} = l_t^{i0} + \sum_{\tau=1}^{t-1} l_t^{\tau} \bar{d}_\tau^i - \beta \bar{d}_t^i - e^{i0}, & i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}; \\ z_t^{i\tau} = p_t^{i\tau} - e_\tau^i, & i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \tau = 1, \dots, T. \end{cases} \quad (15)$$

令  $\lambda_i = \left( m^{i0} + \max_{\hat{D}^i} (\hat{D}^i)' e^i \right)^+, \varphi_t^i = \left( z_t^{i0} + \max_{\hat{D}^i} (\hat{D}^i)' z_t^i \right)^+$ , 则联合机会约束 (或式 (14)) 可近似为如下线性约束:

$$\begin{cases} \lambda_i + \sum_{t=1}^T \varphi_t^i \leq \rho_i \varepsilon, & i \in \mathcal{I}; \\ \lambda_i \geq m^{i0} + \max_{\hat{d}_t^i \in \hat{U}} \sum_{t=1}^T e_t^i \hat{d}_t^i, & \lambda_i \geq 0, i \in \mathcal{I}; \\ \varphi_t^i \geq z_t^{i0} + \max_{\hat{d}_t^i \in \hat{U}} \sum_{\tau=1}^T z_t^{\tau} \hat{d}_\tau^i, & \varphi_t^i \geq 0, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}; \\ \text{式 (8), (15)}. \end{cases} \quad (16)$$

### 2.3.3 易于求解的固定比例生产系统生产-库存仿射可调节鲁棒优化模型

基于定义 1 和定义 2 的模型中存在大量含需求不确定集合的项, 无法直接进行求解. 因此, 本节对模型进行了等价的处理. 根据定义 1, 问题 (4) 中的目标函数最大化问题可描述为:

$$\begin{aligned} \max V. \\ \text{s.t. } V &\leq \min_{d_t^i \in \mathcal{U}} \sum_i \sum_t r_t^i d_t^i - \left( \sum_t (w_t q_t^0 + c_t o_t^0 + \sum_i r_t^i l_t^{i0}) \right. \\ &+ f_t^0 + g_t + \sum_i \sum_{t'=1}^t \tilde{h}_i (q_{t'}^0 \theta_i + l_{t'}^{i0}) + h y_0 - \\ &\min_{d_{t'}^i \in \mathcal{U}} \sum_i \sum_{t'=1}^t \tilde{h}_i d_{t'}^i + \sum_{t'=1}^t h (o_{t'}^0 - q_{t'}^0) + \\ &\max_{d_t^i \in \mathcal{U}} \sum_i \sum_{\tau=1}^{T-1} \gamma_i^\tau d_\tau^i + \sum_i \sum_{t=1}^T s_i (q_t^0 \theta_i + l_t^{i0}) \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $\gamma_i^\tau = \sum_{t'=\tau+1}^T (w_{t'} q_{t'}^\tau + c_{t'} o_{t'}^\tau + r_{t'}^i l_{t'}^{i\tau} + f_{t'}^\tau + (T - t' + 1)(\tilde{h}_i(q_{t'}^\tau \theta_i + l_{t'}^{i\tau}) + h(o_{t'}^\tau - q_{t'}^\tau)))$ ,  $i \in \mathcal{I}, \tau = 1, \dots, T-1$ . 注意到, 问题 (17) 约束中的  $\max$  和  $\min$  运算项涉及不确定需求参数 ( $d_t^i$ ), 可以将其统一描述为形如  $\max_{d_t^i \in \mathcal{U}} \pi_t^\tau d_t^i$  和  $\min_{d_t^i \in \mathcal{U}} \pi_t^\tau d_t^i$  形式的优化问题. 其中,  $\pi_t^\tau$  为  $\max$  和  $\min$  运算中相应的仿射系数. 在式 (6) 所示需求不确定集下,  $\max_{d_t^i \in \mathcal{U}} \pi_t^\tau d_t^i = \pi_t^\tau \bar{d}_t^i + \Delta \eta_{it}^\tau \tilde{d}_t^i$ ,  $\min_{d_t^i \in \mathcal{U}} \pi_t^\tau d_t^i = \pi_t^\tau \bar{d}_t^i - \Delta \eta_{it}^\tau \tilde{d}_t^i$ , 其中,  $-\eta_t^\tau \leq \pi_t^\tau \leq \eta_t^\tau$ . 通过上述过程, 问题 (17) 的约束可描述为如下线性约束:

$$V \leq \sum_i \sum_t r_t^i (\bar{d}_t^i - \Delta \tilde{d}_t^i) - \left( \sum_t (w_t q_t^0 + c_t o_t^0 + f_t^0 + g_t + \sum_i (p_t^i + r_t^i) l_t^{i0} + \sum_i \sum_{t'=1}^T \tilde{h}_i(q_{t'}^0 \theta_i + l_{t'}^{i0}) + h y_0 - \sum_i \sum_{t'=1}^T \tilde{h}_i(\bar{d}_{t'}^i - \Delta \tilde{d}_{t'}^i) + \sum_{t'=1}^T h(o_{t'}^0 - q_{t'}^0)) + \sum_i \sum_{\tau=1}^{T-1} \gamma_i^\tau \bar{d}_\tau^i + \Delta \sum_i \sum_{\tau=1}^{T-1} \eta_i^{1\tau} \tilde{d}_\tau^i \right) + \sum_i \sum_{t=1}^T s_i (q_t^0 \theta_i + l_t^{i0}) - \sum_i \sum_{t=1}^T s_i (\bar{d}_t^i + \Delta \tilde{d}_t^i) + \sum_i \sum_{\tau=1}^{T-1} \sum_{t'=\tau+1}^T s_i (q_{t'}^\tau \theta_i + l_{t'}^{i\tau}) \bar{d}_\tau^i - \Delta \sum_i \sum_{\tau=1}^{T-1} s_i \eta_i^{2\tau} \tilde{d}_\tau^i. \quad (18)$$

其中,  $-\eta_i^{1\tau} \leq \gamma_i^\tau \leq \eta_i^{1\tau}$ ,  $-\eta_i^{2\tau} \leq \sum_{t'=\tau+1}^T (q_{t'}^\tau \theta_i + l_{t'}^{i\tau}) \leq \eta_i^{2\tau}$ ,  $i \in \mathcal{I}, \tau = 1, \dots, T-1$ .

同理, 对于  $i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}$ , 问题 (4) 中产品和原材料的库存及生产约束可转化为:

$$\begin{cases} \sum_{t'=1}^t q_{t'}^0 \theta_i + \sum_{t'=1}^t l_{t'}^{i0} \geq \sum_{t'=1}^t (\gamma_{it}^\tau \bar{d}_\tau^i + \Delta \eta_{it}^{3\tau} \tilde{d}_\tau^i); \\ y^0 + \sum_{t'=1}^t (o_{t'}^0 - q_{t'}^0) + \sum_i \sum_{\tau=1}^T (\gamma_i^\tau \bar{d}_\tau^i - \Delta \eta_{it}^{4\tau} \tilde{d}_\tau^i) \geq 0. \end{cases} \quad (19)$$

其中,  $\gamma_{it}^\tau = 1 - \sum_{t'=\tau+1}^t (q_{t'}^\tau \theta_i + l_{t'}^{i\tau})$ ,  $\gamma_i^\tau = \sum_{t'=\tau+1}^t (o_{t'}^\tau - q_{t'}^\tau)$ , 并且  $-\eta_{it}^{3\tau} \leq \gamma_{it}^\tau \leq \eta_{it}^{3\tau}$ ,  $-\eta_i^{4\tau} \leq \gamma_i^\tau \leq \eta_i^{4\tau}$ ,  $i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \tau = 1, \dots, t$ .

问题 (4) 中关于辅助变量  $f_t$  和  $g_t$  的约束可转化为:

$$\begin{cases} f_t^0 - u_t^+ o_t^0 \geq \sum_i \sum_{\tau=1}^{t-1} (u_t^+ o_t^\tau - f_t^\tau) \bar{d}_\tau^i + \Delta \sum_i \sum_{t'=1}^{\tau-1} \eta_{it}^{5\tau} \tilde{d}_\tau^i - u_t^+ Q_t; \\ f_t^0 + u_t^- o_t^0 + \sum_i \sum_{\tau=1}^{t-1} (f_t^\tau + u_t^- o_t^\tau) \bar{d}_\tau^i - \Delta \sum_i \sum_{t'=1}^{\tau-1} \eta_{it}^{6\tau} \tilde{d}_\tau^i \geq u_t^- Q_t; \\ g_t \geq v_t^+ (Q_t - Q_{t-1}); g_t \geq v_t^- (Q_{t-1} - Q_t). \end{cases} \quad (20)$$

其中,  $-\eta_{it}^{5\tau} \leq u_t^+ o_t^\tau - f_t^\tau \leq \eta_{it}^{5\tau}$ ,  $-\eta_{it}^{6\tau} \leq f_t^\tau + u_t^- o_t^\tau \leq \eta_{it}^{6\tau}$ ,  $t \in \mathcal{T}, \tau = 1, \dots, t$ .

注意到, 2.3.2 节中经过处理的联合机会约束 (16) 中同样含有  $\max$  运算项, 即  $\max_{\hat{d}_t^i \in \hat{\mathcal{U}}} e_t^i \hat{d}_t^i$  和  $\max_{\hat{d}_t^i \in \hat{\mathcal{U}}} z_t^{i\tau} \hat{d}_t^i$ . 遵循与问题 (17) 相同的处理方式, 可得  $\max_{\hat{d}_t^i \in \hat{\mathcal{U}}} e_t^i \hat{d}_t^i = \Delta \eta_{it}^{7\tau} \tilde{d}_\tau^i$ ,  $\max_{\hat{d}_t^i \in \hat{\mathcal{U}}} z_t^{i\tau} \hat{d}_t^i = \Delta \eta_{it}^{8\tau} \tilde{d}_\tau^i$ , 其中,  $-\eta_{it}^{7\tau} \leq e_t^i \leq \eta_{it}^{7\tau}$ ,  $-\eta_{it}^{8\tau} \leq z_t^{i\tau} \leq \eta_{it}^{8\tau}$ . 因此, 式 (16) 可描述为如下线性约束形式:

$$\begin{cases} \lambda_i + \sum_{t=1}^T \varphi_t^i \leq \rho_i \varepsilon, i \in \mathcal{I}; \\ \lambda_i \geq m^{i0} + \sum_{t=1}^T \Delta \eta_{it}^{7i} \tilde{d}_t^i, i \in \mathcal{I}; \\ \varphi_t^i \geq z_t^{i0} + \sum_{\tau=1}^T \Delta \eta_{it}^{8\tau} \tilde{d}_\tau^i, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}; \\ -\eta_{it}^{7i} \leq e_t^i \leq \eta_{it}^{7i}, t \in \mathcal{T}, i \in \mathcal{I}; \\ -\eta_{it}^{8\tau} \leq z_t^{i\tau} \leq \eta_{it}^{8\tau}, t \in \mathcal{T}, i \in \mathcal{I}, \tau = 1, \dots, T; \\ \lambda_i \geq 0, \varphi_t^i \geq 0, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}; \end{cases} \quad (21)$$

式 (8), (16).

同样地, 关于决策变量  $o_t, q_t, l_t^i$  的约束可转化为:

$$\begin{cases} o_t^0 + \sum_i \sum_{\tau=1}^{t-1} (o_t^\tau \bar{d}_\tau^i - \Delta \eta_{it}^{9\tau} \tilde{d}_\tau^i) \geq L_t, t \in \mathcal{T}; \\ o_t^0 + \sum_i \sum_{\tau=1}^{t-1} (o_t^\tau \bar{d}_\tau^i + \Delta \eta_{it}^{9\tau} \tilde{d}_\tau^i) \leq U_t, t \in \mathcal{T}; \\ q_t^0 + \sum_i \sum_{\tau=1}^{t-1} (q_t^\tau \bar{d}_\tau^i - \Delta \eta_{it}^{10\tau} \tilde{d}_\tau^i) \geq 0, t \in \mathcal{T}; \\ l_t^{i0} + \sum_{\tau=1}^{t-1} (l_t^{i\tau} \bar{d}_\tau^i - \Delta \eta_{it}^{11\tau} \tilde{d}_\tau^i) \geq 0, i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}. \end{cases} \quad (22)$$

其中,  $-\eta_{it}^{9\tau} \leq o_t^\tau \leq \eta_{it}^{9\tau}$ ,  $-\eta_{it}^{10\tau} \leq q_t^\tau \leq \eta_{it}^{10\tau}$ ,  $-\eta_{it}^{11\tau} \leq l_t^{i\tau} \leq \eta_{it}^{11\tau}$ ,  $i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \tau = 1, \dots, t-1$ .

综上, 需求不确定下考虑服务水平约束的制造商生产与库存仿射可调节鲁棒优化模型可描述为如下数学规划问题 (AARC-FPPS):

AARC-FPPS:  $\max V$ .

s.t. 约束 (18), (19), (20), (21), (22). (23)

由前文等价性转化过程可知, 问题 (23) 中目标函数  $V$  为线性函数, 约束 (18)、(19)、(20)、(21) 和 (22) 均为线性约束, 因此问题 (23) 是一个线性规划模型, 可以高效求解. 当制造商面临不确定需求, 但随着周期的运营, 前序周期已实现的需求信息能够及时反馈给制造商时, 可以通过求解问题 (23) 得出各周期的生产-库存计划决策. 其中,  $t$  周期原材料承诺采购数量决策  $Q_t$  和辅助变量  $g_t$  可通过求解问题 (23) 直接得出  $Q_t^*$  和  $g_t^*$ . 其余决策变量  $q_t^0$ 、 $q_t^i$ 、 $o_t^0$ 、 $o_t^i$ 、 $f_t^0$ 、 $f_t^i$ 、 $l_t^{i0}$ 、 $l_t^{i\tau}$ 、 $e^{i0}$  和  $e_t^i$  需要与前序周期已实

现的需求结合才能得出最终决策。

### 2.4 不确定扰动系数 $\Delta$ 和上界参数 $\rho_i$ 的优化

根据顺序搜索算法 (见表 1), 可找到最优的不确定扰动系数  $\Delta^*$ 。在优化后的  $\Delta^*$  下, 即使实际需求在最大区间范围  $\mathcal{U}_{max}$  内波动, 制造商仍能以较高的利润满足预期服务水平。

表 1 关于  $\Delta$  的顺序搜索算法

1	固定 $\rho_i$ , 设置 $\Delta$ 的初始值以及顺序搜索间距 $\Delta_{dis}$ ;
2	在最大区间范围内给出随机需求数据, 求解问题 (23) 并计算随机需求数据下实际服务水平的满足率 $P_{SR}$ ;
3	若 $P_{SR} < (1 - \epsilon)$ , 则令 $\Delta = \Delta + \Delta_{dis}$ , 并返回步骤 2; 若 $P_{SR} \geq (1 - \epsilon)$ , 则输出 $\Delta^* = \Delta$ 。

模型 (23) 中, 上界参数  $\rho_i$  同样需要决策者事先设定。根据定义 2, 两种产品需求的波动范围具有较高的相似性 (不确定扰动系数  $\Delta$  相同)。又因为固定比例生产系统的特点, 所以对于每一种产品  $i, \Pr\{\delta_i > 0\}$  具有较高的相似性。因此, 针对两产品的上界参数  $\rho_1$  和  $\rho_2$ , 假定  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ 。利用下述斐波那契算法 (见表 2), 可找到达到同样服务水平时, 使模型目标函数值最优的最优上界参数  $\rho^*$ 。

表 2 关于  $\rho$  的斐波那契算法

1	设定初试区间 $[lb, ub]$ 和允许误差 $\epsilon_\rho$ , 令 $\mu = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ; 当 $ \bar{\rho} - \underline{\rho}  \geq \epsilon_\rho$ 时, 执行 2~5;
2	令 $\bar{\rho} = lb + \mu(ub - lb)$ , 将 $\bar{\rho}$ 传送至表 1 算法中获得最优不确定扰动系数 $\bar{\Delta}$ ; 在 $\bar{\rho}$ 和 $\bar{\Delta}$ 下求解问题 (23) 并得到鲁棒利润 $\bar{pro}$ , 然后转向 4;
3	令 $\underline{\rho} = lb + (1 - \mu)(ub - lb)$ , 将 $\underline{\rho}$ 传送至表 1 算法中获得最优不确定扰动系数 $\underline{\Delta}$ ; 在 $\underline{\rho}$ 和 $\underline{\Delta}$ 下求解问题 (23) 并得到鲁棒利润 $\underline{pro}$ , 然后转向 4;
4	如果 $\bar{pro} > \underline{pro}$ , 则令 $lb = \underline{\rho}, ub = ub$ , 并返回步骤 2; 如果 $\bar{pro} \leq \underline{pro}$ , 则令 $ub = \bar{\rho}, lb = lb$ , 并返回步骤 3;
5	重复以上步骤直至 $ \bar{\rho} - \underline{\rho}  \leq \epsilon_\rho$ , 输出 $\rho^* = \frac{\bar{\rho} + \underline{\rho}}{2}$ , 传送至表 1 算法中获得最优不确定扰动系数 $\Delta^*$ 和最优鲁棒利润 $pro^*$ 。

将表 1 与表 2 中的算法结合, 即得到双层优化算法。利用该算法可得到最优不确定扰动系数  $\Delta^*$  和最优上界参数  $\rho^*$ 。

### 3 数值算例与分析

为验证文中所建制造商生产与库存仿射可调节鲁棒优化模型 (23) 及运作方案 (以下简称 AARC 方案) 的有效性, 对模型 (23) 进行数值实验。本文模型和算法在配置为 Intel Core i5 3.4 GHz 处理器、16.0GB 内存的计算机上使用 Matlab 中 CVX 工具箱进行编写和计算。相关参数赋值如下:  $T = 12, I = 2, h = 1.8, \tilde{h}_1 = 6, \tilde{h}_2 = 3, y_0 = 100, s_1 = 2, s_2 = 1.2, t$  周期内,  $r_t^1 = 26, r_t^2 = 15, w_t = 3, c_t = 6.4,$

$$u_t^+ = u_t^- = 2, v_t^+ = v_t^- = 1, L_t = 150 \text{ 和 } U_t = 320.$$

### 3.1 供需平衡分析

基于固定比例生产系统的特点, 两种产品市场需求的比值与制造商的生产比例相同是最理想的情况。然而, 现实中两产品市场需求的比值可能是变化的。根据 Liu 等<sup>[8]</sup>, 本文用供需平衡系数  $sd = \frac{\theta_1}{\theta_2} - \frac{\bar{d}_1^t}{\bar{d}_2^t}$  衡量产品的供需平衡程度, 其具体含义为产品生产比例的比值与产品需求名义值比值的差, 供需平衡系数的绝对值越低, 供需平衡程度越高。

假设需求相对于名义值的最大偏移量占需求名义值的 10% (即  $\bar{d}_t^i = 10\% \times \bar{d}_t^i$ , 不同供需平衡系数对应的需求名义值见附录 A)。使用 Matlab 软件内置的随机函数在不同供需平衡系数对应的  $\mathcal{U}_{max}$  内随机生成数据作为该供需平衡系数下的随机仿真需求。

为分析供需平衡系数  $sd$  变化对运作方案的影响, 令  $sd$  在 -0.3 到 0.3 之间以步长 0.1 变化, 同时, 设置两种产品的预设服务水平为  $1 - \beta = 95\%$ , 两种产品满足预设服务水平的概率至少为  $1 - \epsilon = 95\%$ 。在不同  $sd$  对应的需求不确定集合下, 通过 2.4 节中的双层优化算法, 可得到的不同供需平衡系数  $sd$  下的  $\Delta^*$  和  $\rho^*$  如表 3 所示。

表 3 不同  $sd$  对应的  $\Delta^*$  和  $\rho^*$

需求名义值 ( $t \in \mathcal{T}$ )	供需平衡系数 $sd$						
	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3
$\Delta^*$	0.400	0.400	0.400	0.050	0.200	0.200	0.300
$\rho^*$	0.448	0.475	0.448	0.252	0.454	0.465	0.465

基于表 3 结果, 对问题 (23) 进行求解。可直接得到不同供需平衡系数下的 here-and-now 决策、wait-and-see 决策的仿射系数和鲁棒利润 (即模型 (23) 的目标函数值)。然后, 将不同供需平衡系数下的 wait-and-see 决策的仿射系数和不同供需平衡系数对应的随机需求代入线性决策规则, 得出不同供需平衡系数下具体的 wait-and-see 决策。最后, 将所有决策和随机需求数据代入模型 (4) 目标函数, 可计算得到不同供需平衡系数下的仿真利润。不同供需平衡系数下 AARC 方案的鲁棒利润和仿真利润如图 2 所示。

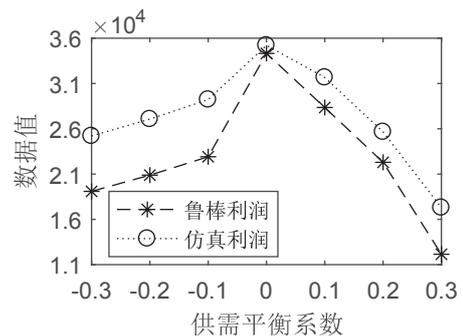


图 2  $sd$  对 AARC 方案鲁棒利润和仿真利润的影响

由图 2 可以看出, 当  $sd < 0$  时, AARC 方案的鲁棒利润和仿真利润随  $sd$  的增大而增加; 当  $sd > 0$  时, AARC 方案的鲁棒利润和仿真利润随  $sd$  的增大而减少, 且变化幅度较大; 当  $sd = 0$  时, AARC 方案的鲁棒利润和仿真利润最高. 说明供需越平衡, 制造商越能获得较高的利润. 特别地, 随着供需平衡系数的变化, 制造商在需求不确定环境中均能获得较高的利润, 说明文中所建模型在应对需求不确定和供需平衡系数方面具有良好的鲁棒性. 不同供需平衡系数下 AARC 方案的决策细节见附录 B. 为验证本文可调节鲁棒优化方法在解决不确定需求下固定比例生产与库存决策方面的优势, 本文在附录 C 给出了可调节鲁棒优化模型与传统鲁棒优化模型的对比分析.

### 3.2 服务水平分析

为探究供需平衡系数  $sd$  对 AARC 方案实际服务水平的影响. 设置服务水平约束违反率为  $\varepsilon = 5\%$ , 预设销售损失比例为  $\beta = 5\%$ . 在不同供需平衡系数对应的  $U_{max}$  内, 随机选定一组需求数据用于计算实际服务水平. 结果如图 3 所示.

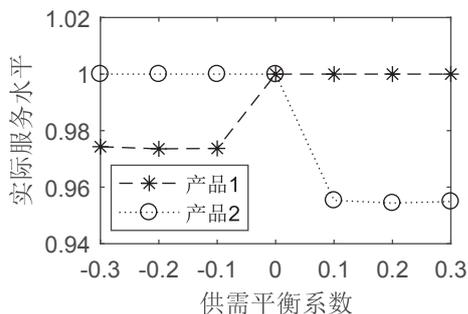


图 3  $sd$  对实际服务水平的影响

由图 3 可以看出, 随着供需平衡系数的变化, 两产品的实际服务水平保持在 95% 以上. 当  $sd < 0$  时, 产品 2 的服务水平一直保持 100%; 当  $sd > 0$  时, 产品 1 的服务水平一直保持 100%; 当  $sd = 0$  时, 两产品的服务水平均为 100%. 考虑到制造商供应比例固定的特性, 说明随供需平衡系数的变化, 制造商为避免一种产品库存过多, 将适当降低另一种产品的服务水平以减少库存成本, 增加利润. 本文在附录 D 中给出了  $\varepsilon$  对满足预设服务水平概率和  $\beta$  对实际服务水平的影响.

## 4 结论

本文针对由原材料供应商、制造商和下游市场组成的三级供应链, 研究需求不确定情况下, 考虑服务水平要求的制造商多周期生产-库存计划问题. 特别地, 采用联合机会约束来刻画固定比例制造商的

服务水平要求. 对于需求不确定性, 采用区间不确定集进行建模. 进一步, 在线性决策规则下, 构建了考虑服务水平约束的能够充分利用已发生的市场需求信息的仿射可调节鲁棒优化模型. 在此基础上, 将所建模型等价转换为易于求解的线性规划问题. 考虑到不确定扰动系数在模型鲁棒性和解的保守性之间的调节作用, 给出了能有效提高固定比例制造商总利润并同时满足预设服务水平的不确定扰动系数优化算法. 最后, 通过数值算例验证了文中所建模型和方案的有效性. 结果表明, 基于本文模型获得的运作方案能有效应对供需平衡程度的变化, 并且在最大范围内的不确定需求扰动下仍能以较高利润满足预设服务水平要求. 基于本文研究结果, 对拥有固定比例生产系统的企业提出如下管理启示: 1) 决策者在日常经营过程中应注重数据的收集和预测方法的改进. 2) 决策者在日常经营过程中应做好市场调查, 设置合理的预设销售损失比例, 以在提高企业利润的同时尽量保持较高的服务水平. 3) 鉴于鲁棒优化方法在应对不确定性方面的有效性, 当企业难以获得精确的市场需求信息时, 可采用该方法制定运营决策, 从而改进企业决策水平以获得更高的利润.

未来, 可在此模型基础上考虑供应、提前期等不确定性, 探讨多种不确定条件下的固定比例生产-库存计划问题.

### 参考文献 (References)

- [1] Woo Y B, Moon I, Kim B S. Production-Inventory control model for a supply chain network with economic production rates under no shortages allowed[J]. Computers & Industrial Engineering, 2021, 160: 107558.
- [2] Zhang S, Song H. Production and Distribution Planning in Danone Waters China Division[J]. Journal on Applied Analytics, 2018, 48(6):578-590.
- [3] Chan C W, Green L V, Lekwijit S, et al. Assessing the impact of service level when customer needs are uncertain: An empirical investigation of hospital step-down units[J]. Management Science, 2019, 65(2): 751-775.
- [4] Chen Y J, Tomlin B, Wang Y. Coproduct technologies: Product line design and process innovation[J]. Management Science, 2013, 59(12): 2772-2789.
- [5] Gary J H, Handwerk J H, Kaiser M J, et al. Petroleum refining: technology and economics[M]. CRC press, 2007: 1-62.
- [6] Boyabatli O. Supply management in multiproduct firms with fixed proportions technology[J]. Management Science, 2015, 61(12): 3013-3031.
- [7] He S, Zhang J, Zhang J, et al. Production/inventory

- competition between firms with fixed-proportions co-production systems[J]. *European Journal of Operational Research*, 2022, 299(2): 497-509.
- [8] Liu H, Zhang J, Cheng T C E, et al. Optimal production-inventory policy for the multi-period fixed proportions co-production system[J]. *European Journal of Operational Research*, 2020, 280(2): 469-478.
- [9] Lu T, Chen Y J, Tomlin B, et al. Selling Co-Products through a Distributor: The Impact on Product Line Design[J]. *Production and Operations Management*, 2019, 28(4): 1010-1032.
- [10] Dong L, Kouvelis P, Wu X. The value of operational flexibility in the presence of input and output price uncertainties with oil refining applications[J]. *Management Science*, 2014, 60(12): 2908-2926.
- [11] Roy B. Robustness in operational research and decision aiding: A multi-faceted issue[J]. *European Journal of Operational Research*, 2010, 200(3): 629-638.
- [12] Gabrel V, Murat C, Thiele A. Recent advances in robust optimization: An overview[J]. *European journal of operational research*, 2014, 235(3): 471-483.
- [13] 张得志, 乔馨, 李双艳, 等. 考虑多重覆盖的应急设施多级协同布局鲁棒优化 [J]. *控制与决策*, 2022, 37(7): 1853-1861.  
(Zhang D, Qiao X, Li S, et al. Robust optimization of hierarchical cooperative layout of emergency facilities considering multiple coverage[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(7): 1853-1861.)
- [14] Qiu R, Sun Y, Sun M, A distributionally robust optimization approach for multi-product inventory decisions with budget constraint and demand and yield uncertainties[J]. *Computers & Operations Research*, 2021, 126: 105081.
- [15] Ben-Tal A, Goryashko A, Guslitzer E, Nemirovski A. Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. *Mathematical Programming*[J]. 2004, 99(2): 351-376.
- [16] Ben-Tal A, Golany B, NemiRCvski A. Retailer-supplier flexible commitments contracts: A Robust optimization approach[J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2005, 7: 248-271.
- [17] Melamed M, Ben-Tal A, Golany B. On the average performance of the adjustable RO and its use as an offline tool for multi-period production planning under uncertainty[J]. *Computational Management Science*, 2016, 13(2): 293-315.
- [18] 孙艺萌, 邱若臻. 服务水平约束下基于可调节鲁棒优化的供应链分销网络设计模型 [J]. *管理工程学报*, 2021, 35(3): 158-171.  
(Sun Y, Qiu R. Supply chain distribution network design under service level constraint using affinity adjustable robust optimization[J]. *Journal of Industrial Engineering / Engineering Management*, 2021, 35(3): 158-171.)
- [19] Kim B S, Chung B D. Affinely Adjustable Robust Model for Multiperiod Production Planning Under Uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 2017, 64(4): 1-10.
- [20] Kloos K. Managing service-level contracts in sales hierarchies[J]. *European Journal of Operational Research*, 2021, 292(1): 184-198.
- [21] Craig N, DeHoratius N, Raman A. The impact of supplier inventory service level on retailer demand[J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2016, 18(4): 461-474.
- [22] 王文隆, 任倩楠, 翟晓娜, 等. 考虑公平关切和制造商竞争的平台型供应链定价, 低碳水平和服务水平决策 [J]. *控制与决策*, 2022, 37(4): 1045-1055.  
(Wang W, Ren Q, Zhai X, et al. Decisions of pricing, low-carbon level and service level in a platform supply chain considering fairness concern and manufacturers' competition[J]. *Control and Decision*, 2022, 37(4): 1045-1055.)
- [23] Wei L, Jasin S, Xin L. On a Deterministic Approximation of Inventory Systems with Sequential Service-Level Constraints[J]. *Operations Research*, 2021, 69(4): 1057-1076.
- [24] 何娟, 黄福友, 黄福玲. 考虑风险规避与质量和服务水平的 VMI 供应链期权协调策略 [J]. *控制与决策*, 2018, 33(10): 1833-1840.  
(He J, Huang F, Huang F. Option coordination strategy for VMI supply chain with a risk-averse supplier based on quality and service level[J]. *Control and Decision*, 2018, 33(10): 1833-1840.)
- [25] Liu M, Liu R, Zhu Z, et al. A bi-objective green closed loop supply chain design problem with uncertain demand[J]. *Sustainability*, 2018, 10(4): 967.
- [26] Elçi Ö, Nilay N. A chance-constrained two-stage stochastic programming model for humanitarian relief network design[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2018, 108: 55-83.
- [27] Chen W, Sim M, Sun J, et al. From CVaR to uncertainty set: Implications in joint chance-constrained optimization[J]. *Operations Research*, 2010, 58(2): 470-485.
- [28] Yuan Y, Li Z, Huang B. Robust optimization approximation for joint chance constrained optimization problem[J]. *Journal of Global Optimization*, 2017, 67(4): 805-827.
- [29] Meilijson I, Nádas A. Convex majorization with an application to the length of critical paths[J]. *Journal of Applied Probability*, 1979, 16(3): 671-677.

## 作者简介

袁明利 (1996—), 男, 博士生, 从事供应链管理的研究, E-mail: mingliyuan0904@163.com;

邱若臻 (1980—), 男, 教授, 博士生导师, 从事供应链与物流管理等研究, E-mail: rzqiu@mail.neu.edu.cn;

孙月 (1990—), 女, 博士, 从事供应链与物流管理等研究, E-mail: sunyue@mail.neu.edu.cn.