

# 基于双增益方法的不确定非线性系统的输出反馈调节问题研究

殷县龙<sup>1</sup>, 孙宗耀<sup>1†</sup>, 谭庆全<sup>2</sup>, 陈智强<sup>3</sup>, 孟庆华<sup>4</sup>

(1. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165; 2. 北京市地震局, 北京 100080; 3. 国立成功大学  
系统及船舶机电工程学系, 台湾 台南 70101; 4. 杭州电子科技大学 机械工程学院, 杭州 310018)

**摘要:** 研究了一类具有多种不确定性的非线性系统的全局输出反馈调节问题. 所研究系统的一个显著特点是非线性项被未知增长率和多项式形式的输出函数的乘积界定, 难点是在输出受不确定参数摄动的情况下如何抑制非线性项. 提出了一种改进的双增益方法来设计输出反馈控制器, 可以确保闭环系统所有信号全局一致有界并且原系统状态收敛到零. 最后, 用质量弹簧机械系统的输出反馈镇定问题来说明控制策略的有效性.

**关键词:** 输出反馈调节; 未知增长率; 输出不确定性; 双增益方法; 全局镇定; 非线性系统

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2022.1657

引用格式: 殷县龙, 孙宗耀, 谭庆全, 等. 基于双增益方法的不确定非线性系统的输出反馈调节问题研究[J]. 控制与决策.

## Output feedback regulation of uncertain nonlinear systems via dual gain method

YIN Xian-long<sup>1</sup>, SUN Zong-yao<sup>1†</sup>, TAN Qing-quan<sup>2</sup>, CHEN Chih-chiang<sup>3</sup>, MENG Qing-hua<sup>4</sup>

(1. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu 273165, China; 2. Earthquake Administration of Beijing Municipality, Beijing 100080, China; 3. Department of Systems and Naval Mechatronic Engineering, National Cheng Kung University, Tainan 70101, China; 4. School of Mechanical Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018)

**Abstract:** This paper investigates the global output feedback stabilization problem for a class of nonlinear systems with multiple uncertainties. A distinctive characteristic of the system to be studied is that nonlinearities are bounded by multiplying unknown growth rates with a polynomial form of the output function. The crucial difficulty is how to dominate the nonlinearities effectively on the hypothesis that the output is perturbed by uncertain parameters. An improved dual gain approach is proposed to design the output feedback controller which ensures that all signals of closed-loop systems are globally uniformly bounded and the original system states converge to zero. Finally, the output feedback stabilization problem of a mass-spring mechanical system is used to illustrate the effectiveness of the control strategy.

**Keywords:** Output feedback regulation; unknown growth rate; output uncertainty; dual gain method; global stabilization; nonlinear systems

## 0 引言

非线性系统的控制设计一直是控制理论领域中的研究热点和难点, 并在机器人、航空航天和生物化学等领域有着广泛的应用<sup>[1]</sup>. 全局输出反馈稳定控制设计则一直被视为非线性控制领域中最具挑战性的问题之一, 虽然借助于多种新型观测器, 如K滤波器<sup>[1]</sup>, 齐次观测器<sup>[2]</sup>, 研究人员实现了对多数系统状态的重构, 但是目前还没有统一的方法实现状态

观测器的构造<sup>[1,3,4]</sup>. 最近, 增加幂次积分法<sup>[5]</sup>和非分离原理<sup>[6]</sup>等方法的提出促进了非线性系统输出反馈镇定的研究, 如针对具有不同结构和限制的非线性系统获得了许多有意义的结论<sup>[7-11]</sup>.

值得注意的是, 上述研究并未考虑系统输出中传感器的不确定性. 事实上, 由于量测技术和设备的限制, 传感器可能无法准确地检测实际中系统的输出, 这意味着传感器灵敏度并不总是一个常数, 它

收稿日期: 2022-09-19; 录用日期: 2022-11-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(62173208); 山东省泰山学者计划(202103061); 山东省高校青创科技计划项目(2019KJN036).

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: sunzongyao@sohu.com.

与标称值之间存在偏差;即灵敏度误差.文献<sup>[12]</sup>中考虑的磁轴承悬挂系统便是一个经典的例子,用于距离测量的红外传感器的灵敏度误差是 $\pm 10\%$ .另一个经典的例子是机械系统<sup>[13]</sup>,弹簧性能由于磨损而恶化,弹簧系数也随之变化,此时输出和状态之间的关系便很难获得.这些例子为进一步深入探索全局输出反馈镇定问题开辟了新的途径.最近,受现有结果<sup>[6,7,14]</sup>的启发,文献<sup>[15]</sup>在该方向迈出了重要一步:提出了一种双增益方法来实现一类具有未知灵敏度的非线性系统的全局镇定.应当注意的是,其要求非线性函数的增长率是精确已知的.事实上,在许多应用中,系统不可避免地会同时遭受未知的传感器不确定性和未知增长率的影响<sup>[16]</sup>.因此,一个值得进一步探讨的研究问题自然被提出:当传感器不确定性和未知增长率同时存在时,如何通过输出反馈来实现该类系统的全局镇定?

就作者所知,目前对上述问题的研究较少.另外从实际的角度来看,该研究也是十分必要的.解决问题时会遇到如下主要困难:灵敏度误差的存在导致系统输出不能直接用于构造观测器,这意味着文献<sup>[6,7,14]</sup>中观测器的构造方法失效,而控制器的设计需要系统输出,因此确定可行的灵敏度误差范围决定着控制设计的合理性.本文将克服这些困难,设计出期望的控制器来实现系统的全局镇定.

本文的贡献主要包括:(i)与现有文献<sup>[6,14,15]</sup>相比,本文同时考虑了传感器不确定性和未知增长率并且减弱了对非线性项函数的限制,这使得研究的系统模型更一般,适用范围更加广泛,实际意义更加鲜明.(ii)优于文献<sup>[15]</sup>中的常数增益,本文在设计过程中引入的动态增益在设定参数后能够实现自动调节,这为控制器的使用者提供了更大的便利,具有很好的理论和实际意义.(iii)本文提出的控制方案为解决输出反馈稳定问题提供了一个有趣的视角,优于现有文献<sup>[5-11]</sup>,实现了有传感器灵敏度与无传感器灵敏度的设计和分析的统一.

## 1 问题陈述与预备知识

本文研究如下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(t, x, u), i=1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n = u + f_n(t, x, u), \\ y = \theta(t)x_1, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}$ 分别是系统状态,控制输入和可量测输出;系统的初始条件为 $x(t_0) = x_0$ ;  $f_i: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, n$ 和 $\theta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 均为连续函数.

$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 均为连续函数.

本文的控制目标是设计一个输出反馈控制器 $u(t)$ ,实现系统(1)的全局镇定.为实现该目标,需要做如下假设:

**假设1** 存在参数 $\bar{\theta} > 0$ ,使得 $|1 - \theta(t)| \leq \bar{\theta} < 1$ ,其中 $\bar{\theta}$ 是允许的灵敏度误差.

**假设2** 对 $i=1, \dots, n$ ,存在未知常数 $c \geq 0$ 和已知常数 $p > 0$ ,使得:

$$|f_i(t, x, u)| \leq c(1 + |y|^p)(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|).$$

假设1是解决非线性系统输出反馈问题常用的条件,它指明了传感器灵敏度 $\theta(t)$ 的变化范围.请参考文献<sup>[15,21]</sup>中关于假设1的具体说明.下面,用一个注记来阐释假设2的合理性.

**注1** 假设2表明系统(1)具有不可测状态增长且增长率是输出多项式与未知常数的乘积,这使得系统(1)本质上不同于文献<sup>[7]</sup>中增长率精确已知的情况,意味着系统(1)包含更严重的未知性和强非线性.当 $c(1 + |y|^p)$ 被常数 $c$ 取代时,假设2可弱化为文献<sup>[6,15]</sup>中非线性系统输出反馈控制中常见的假设,这些假设被视为保证系统稳定的关键条件.特别地, $c(1 + |y|^p)$ 项不是严格的,它可以定义实际中的诸多函数,诸如多项式函数、全局利普希茨函数以及满足多项式增长条件的函数,这也使得系统(1)的适用范围更广泛.

接下来,给出本文用到的两个重要引理<sup>[15,17]</sup>.

**引理1<sup>[15]</sup>** 设常数 $q \in [1, +\infty)$ ,对于任意的 $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, n$ ,成立

$$(|x_1| + \dots + |x_n|)^q \leq n^{q-1}(|x_1|^q + \dots + |x_n|^q).$$

**引理2<sup>[17]</sup>** 设 $m, n$ 是正常数,  $\nu(x, y)$ 是正实值函数,对于任意的 $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ 成立

$$|x^m y^n| \leq \frac{m}{m+n} \nu(\cdot) |x|^{m+n} + \frac{n}{m+n} \nu(\cdot)^{-\frac{m}{n}} |y|^{m+n}.$$

## 2 主要结果

**定理1** 如果系统(1)满足假设1-2,则存在输出反馈控制器:

$$\begin{cases} u = -(L_1 M)^n b_1 y - \sum_{i=2}^n b_i (L_1 M)^{n-i+1} \hat{x}_i, \\ \begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} - L_1^i a_i \hat{x}_1, i=1, \dots, n-1, \\ \dot{\hat{x}}_n = u - L_1^n a_n \hat{x}_1, \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\hat{x} = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态 $x$ 的估计,  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 和 $M$ 是有明确定义的正常数,  $L_1$ 满足如下方程:

$$\dot{L}_1 = -\rho_1 L_1^2 + \rho_2 (1 + |y|^p)^2 L_1, L_1(0) = 1, \quad (3)$$

$\rho_1, \rho_2$  是满足  $\rho_2 \geq \rho_1$  的正常数, 可以保证:

(I) 闭环系统的状态在区间  $[t_0, +\infty)$  上全局有界.

(II)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{x}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$ .

**证明:** 定理的证明分为四步.

**Step 1: 误差动态分析** 定义估计误差如下:

$$\varepsilon_i = \frac{x_i - \hat{x}_i}{L_1^{v+i-1}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

其中常数  $v$  满足  $0 < v \leq \frac{1}{4p}$ . 那么, 由(1)-(2)式可将误差方程改写为如下形式:

$$\dot{\varepsilon} = L_1 A \varepsilon - \frac{\dot{L}_1}{L_1} B \varepsilon + \frac{L_1}{L_1^v} N x_1 + F, \quad (5)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} v & & & \\ & v+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & v+n-1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{L_1^v} \\ \frac{f_2}{L_1^{v+1}} \\ \vdots \\ \frac{f_n}{L_1^{v+n-1}} \end{bmatrix}.$$

根据文献<sup>[18]</sup>中的引理1, 存在正常数  $a_1, \dots, a_n$  使得  $A$  是 Hurwitz 矩阵以及正定对称矩阵  $P$  满足:

$$A^T P + P A \leq -I, \quad d_1 I \leq B P + P B \leq d_2 I, \quad (6)$$

其中  $d_1, d_2$  为正常数. 考虑正定径向无界函数  $V_1 = \varepsilon^T P \varepsilon$ , 不难导出:

$$\dot{V}_1 \leq -L_1 \|\varepsilon\|^2 - \frac{\dot{L}_1}{L_1} \varepsilon^T (B P + P B) \varepsilon + 2 \varepsilon^T P F + 2 \frac{L_1}{L_1^v} \varepsilon^T P N x_1. \quad (7)$$

接下来将对(7)式右端的部分项进行估计. 根据引理2, 可以得到:

$$2 \frac{L_1}{L_1^v} \varepsilon^T P N x_1 \leq \frac{L_1}{2} \|\varepsilon\|^2 + 2 L_1 \|P\|^2 \cdot \|N\|^2 \frac{x_1^2}{L_1^{2v}}. \quad (8)$$

由(3)式和(6)式可以得到:

$$\begin{aligned} & -\frac{\dot{L}_1}{L_1} \varepsilon^T (B P + P B) \varepsilon \\ & \leq -d_1 \rho_2 (1 + |y|^p)^2 \|\varepsilon\|^2 + d_2 \rho_1 L_1 \|\varepsilon\|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

由(3)式还可得  $L_1 \geq 1$ . 若不然, 则存在  $t' \in (t_0, +\infty)$ , 使得  $L_1(t) < 1$ . 注意到  $L_1(t_0) = 1$  并且  $L_1(t)$  是连续函数, 从而存在  $t'' \in [t_0, t']$ , 使得  $L_1(t) < L_1(t'') = 1, \forall t \in (t'', t']$ . 结合(3)式和  $\rho_2 \geq \rho_1$ , 容易得到  $\dot{L}_1(t) > 0, \forall t \in [t'', t']$ . 这表明  $L_1(t) > L_1(t'') = 1, \forall t \in (t'', t']$ , 显然矛盾, 从而  $L_1 \geq 1$  成立. 由此和假设2不难得到:

$$\left| \frac{f_i}{L_1^{v+i-1}} \right| \leq \frac{c(1 + |y|^p)}{L_1^{v+i-1}} \sum_{j=1}^i |x_j|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

从而有:

$$\begin{aligned} 2 \varepsilon^T P F & \leq 2 \|\varepsilon\| \cdot \|P\| \cdot \|F\| \\ & \leq 2nc \|\varepsilon\| \cdot \|P\| (1 + |y|^p) \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{L_1^{v+i-1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

将(8)-(9)式和(11)式代入(7)式, 得到如下不等式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 & \leq -\left(\frac{L_1}{2} - d_2 \rho_1 L_1\right) \|\varepsilon\|^2 - d_1 \rho_2 (1 + |y|^p)^2 \|\varepsilon\|^2 + \\ & 2nc \|\varepsilon\| \cdot \|P\| (1 + |y|^p) \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{L_1^{v+i-1}} + \\ & 2 L_1 \|P\|^2 \cdot \|N\|^2 \frac{x_1^2}{L_1^{2v}}. \end{aligned} \quad (12)$$

**Step 2: 组合系统分析** 考虑如下组合系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(t, x, u), \\ \dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} - a_i L_1^i \hat{x}_1, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\hat{x}}_n = u - a_n L_1^n \hat{x}_1. \end{cases} \quad (13)$$

引入如下坐标变换:

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{x_1}{L_1^v}, \\ \xi_i = \frac{\hat{x}_i}{L_1^{v+i-1} M^{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \\ \bar{u} = \frac{u}{L_1^{v+n} M^n}, \end{cases} \quad (14)$$

其中  $M \geq 1$  是待定常数. 借助于(14)式, 将(13)式改为:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = M L_1 \xi_2 - v \frac{\dot{L}_1}{L_1} \xi_1 + L_1 \varepsilon_2 + \frac{f_1}{L_1^v} \\ \dot{\xi}_i = M L_1 \xi_{i+1} - (v+i-1) \frac{\dot{L}_1}{L_1} \xi_i + \frac{L_1 a_i}{M^{i-1}} \varepsilon_1 \\ \quad - \frac{L_1 a_i}{M^{i-1}} \xi_1, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \dot{\xi}_n = M L_1 \bar{u} - (v+n-1) \frac{\dot{L}_1}{L_1} \xi_n + \frac{L_1 a_n}{M^{n-1}} (\varepsilon_1 - \xi_1), \end{cases} \quad (15)$$

设计如下形式的输出反馈控制:

$$\bar{u} = -\frac{b_1 y}{L_1^v} - \sum_{i=2}^n b_i \xi_i, \quad (16)$$

其中  $b_1, \dots, b_n$  是待定正常数. 将(16)式代入(15)式得:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} & = L_1 M D \xi - \frac{\dot{L}_1}{L_1} B \xi + L_1 H (\varepsilon_1 - \xi_1) + L_1 J \varepsilon_2 + \\ & L_1 M Z b_1 (1 - \theta) \xi_1 + K, \end{aligned} \quad (17)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_1 & -b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a_2}{M} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{M^{n-1}} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} \frac{f_1}{L_1^v} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

根据文献<sup>[18]</sup>中的引理1, 存在正常数  $b_1, \dots, b_n$  使得  $D$  是 Hurwitz 矩阵以及正定对称矩阵  $Q$  满足:

$$D^T Q + Q D \leq -I, \quad d_3 I \leq Q B + B Q \leq d_4 I, \quad (18)$$

其中 $d_3, d_4$ 是正常数. 考虑正定径向无界函数 $V_2 = \xi^T Q \xi$ , 不难导出:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -L_1 M \|\xi\|^2 - \frac{\dot{L}_1}{L_1} \xi^T (QB + BQ) \xi + 2\xi^T QK \\ & + 2L_1 b_1 (1 - \theta) \xi^T Q M Z \xi_1 + 2L_1 \xi^T Q J \varepsilon_2 \\ & + 2L_1 \xi^T Q H (\varepsilon_1 - \xi_1). \end{aligned} \quad (19)$$

下面对(19)式中右端的部分项进行估计. 根据(3)式和(18)式不难得到:

$$-\frac{\dot{L}_1}{L_1} \xi^T (QE + EQ) \xi \leq -d_3 \rho_2 (1 + |y|^p)^2 \|\xi\|^2 + d_4 \rho_1 L_1 \|\xi\|^2. \quad (20)$$

注意到 $\|J\| = \|Z\| = 1$ 和 $\|H\| \leq \|N\|$ , 由引理2可得:

$$2L_1 \xi^T Q H (\varepsilon_1 - \xi_1) \leq 8L_1 \|Q\|^2 \cdot \|N\|^2 \cdot \|\xi\|^2 + 2L_1 \|Q\| \cdot \|N\| \cdot \|\xi\|^2 + \frac{L_1}{8} \|\varepsilon\|^2. \quad (21)$$

$$2L_1 \xi^T Q J \varepsilon_2 \leq \frac{L_1}{8} \|\varepsilon\|^2 + 8L_1 \|Q\|^2 \cdot \|\xi\|^2. \quad (22)$$

$$\begin{aligned} 2L_1 b_1 (1 - \theta) \xi^T Q M Z \xi_1 \\ \leq 2L_1 b_1 M |1 - \theta| \cdot \|Q\| \cdot \|\xi\|^2. \end{aligned} \quad (23)$$

由假设2, 引理2和(10)式不难得到:

$$2\xi^T Q K \leq m_1 \|\xi\|^2 + \frac{1}{2} (1 + |y|^p)^2 \|\xi\|^2, \quad (24)$$

其中 $m_1 = 2c^2 \|Q\|^2$ . 将(20)-(24)式代入(19)式, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & d_4 \rho_1 L_1 \|\xi\|^2 + \frac{L_1}{4} \|\varepsilon\|^2 + 2L_1 \|Q\| \cdot \|N\| \cdot \|\xi\|^2 + \\ & (8L_1 \|Q\|^2 + m_1 + 8L_1 \|Q\|^2 \cdot \|N\|^2) \|\xi\|^2 - \\ & d_3 \rho_2 (1 + |y|^p)^2 \|\xi\|^2 + \frac{1}{2} (1 + |y|^p)^2 \|\xi\|^2 - \\ & L_1 M (1 - 2b_1 |1 - \theta| \cdot \|Q\|) \|\xi\|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

**Step 3: 参数确定** 由(4)式和(14)式可以得到:

$$\left| \frac{x_i}{L_1^{v+i-1}} \right| \leq |\varepsilon_i| + |M^{i-1} \xi_i|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (26)$$

由(26)式和引理1, 不难得到:

$$\begin{aligned} 2\beta \varepsilon^T P F \\ \leq 2nc \|\varepsilon\| \cdot \|P\| (1 + |y|^p) \sum_{i=1}^n (|\varepsilon_i| + M^{i-1} |\xi_i|) \\ \leq m_2 (\|\varepsilon\|^2 + \|\xi\|^2) + \frac{(1+|y|^p)^2}{2} (\|\varepsilon\|^2 + \|\xi\|^2), \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $m_2 = 9c^2 n^3 M^{2(n-1)} \|P\|^2$ . 将(27)式代入(12)式, 并结合(14)式, 可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -(\frac{L_1}{2} - d_2 \rho_1 L_1 - m_2) \|\varepsilon\|^2 + \frac{1}{2} (1 + |y|^p)^2 \|\xi\|^2 + \\ & m_2 \|\xi\|^2 - (d_1 \rho_2 - 1) (1 + |y|^p)^2 \|\varepsilon\|^2 + \\ & 2L_1 \|P\|^2 \cdot \|N\|^2 \cdot \|\xi\|^2. \end{aligned} \quad (28)$$

选择允许的灵敏度误差 $\bar{\theta}$ 满足条件:  $\bar{\theta} < \theta^* = \min \left\{ 1, \frac{1}{2b_1 \|Q\|} \right\}$ . 由假设1, 可以得到:

$$1 - 2b_1 |1 - \theta| \cdot \|Q\| \geq 1 - 2b_1 \bar{\theta} \|Q\| \triangleq \sigma. \quad (29)$$

显然 $0 < \sigma < 1$ 成立, 那么(25)式可以写为:

$$\dot{V}_2 \leq 2L_1 \|Q\| \cdot \|N\| \|\xi\|^2 + d_4 \rho_1 L_1 \|\xi\|^2 + \frac{L_1}{4} \|\varepsilon\|^2 +$$

$$\begin{aligned} & (8L_1 \|Q\|^2 + m_1 + 8L_1 \|Q\|^2 \cdot \|N\|^2) \|\xi\|^2 - \\ & d_3 \rho_2 (1 + |y|^p)^2 \|\xi\|^2 + \frac{1}{2} (1 + |y|^p)^2 \|\xi\|^2 - \\ & L_1 M \sigma \|\xi\|^2. \end{aligned} \quad (30)$$

考虑正定径向无界函数 $V_e(\varepsilon, \xi) = V_1(\varepsilon) + V_2(\xi)$ , 结合(28)式, (30)式和 $M \geq 1$ , 不难得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_e \leq & -(1 + |y|^p)^2 ((d_1 \rho_2 - 1) \|\varepsilon\|^2 + (d_3 \rho_2 - 1) \|\xi\|^2) - \\ & L_1 M (\sigma - \frac{d_4 \rho_1 + k_1}{M} - \frac{m_1 + m_2}{L_1}) \|\xi\|^2 - \\ & L_1 (\frac{1}{4} - d_2 \rho_1 - \frac{m_2}{L_1}) \|\varepsilon\|^2, \end{aligned} \quad (31)$$

其中 $k_1 = 8\|Q\|^2(1 + \|N\|^2) + 2\|P\|^2 \cdot \|N\|^2 + 2\|Q\| \cdot \|N\|$ . 为了确保 $\dot{V}_e \leq 0$ , 下面给出参数的具体选择过程. 首先, 为能够使得不等式:  $\sigma - \frac{d_4 \rho_1 + k_1}{M} \geq \frac{\sigma}{8}$ 成立, 选择合适的 $M$ 满足 $M \geq \frac{8(d_4 \rho_1 + k_1)}{7\sigma}$ , 又 $M \geq 1$ , 从而有 $M \geq \max \left\{ 1, \frac{8(d_4 \rho_1 + k_1)}{7\sigma} \right\}$ . 由 $d_1 \rho_2 - 1 \geq 0$ ,  $d_3 \rho_2 - 1 \geq 0$ 和 $\rho_2 \geq \rho_1$ , 可以得到 $\rho_2 \geq \max \left\{ \rho_1, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_3} \right\}$ . 由 $\frac{1}{4} - d_2 \rho_1 \geq \frac{1}{8}$ 和 $\rho_1 > 0$ , 得到 $0 < \rho_1 \leq \frac{1}{8d_2}$ . 此时, (31)式可改写为:

$$\dot{V}_e \leq -L_1 M (\frac{\sigma}{8} - \frac{m_1 + m_2}{L_1}) \|\xi\|^2 - L_1 (\frac{1}{8} - \frac{m_2}{L_1}) \|\varepsilon\|^2. \quad (32)$$

下面, 按照如下方式确定 $L_1$ , 令

$$\frac{1}{8} - \frac{m_2}{L_1} \geq \frac{\sigma}{16}, \quad \frac{\sigma}{8} - \frac{m_1 + m_2}{L_1} \geq \frac{\sigma}{16}.$$

又 $L_1 \geq 1$ , 从而得到 $L_1 \geq \max \left\{ 1, \frac{16m_2}{2-\sigma}, \frac{16(m_1+m_2)}{2-\sigma} \right\}$ . 根据上述参数的选择和(32)式, 显然成立:

$$\dot{V}_e \leq -\frac{\sigma}{16} \|\varepsilon\|^2 - \frac{\sigma}{16} \|\xi\|^2. \quad (33)$$

**Step 4: 稳定性分析** 考虑变换后的闭环系统(1)-(3), 由解的存在性和连续性可知闭环系统的状态 $X(t) \triangleq [\varepsilon(t), \xi(t), L_1(t)]^T$ 在区间 $[t_0, T_f]$ 上有定义, 其中 $T_f > 0$ 可能是有限常数或者是正无穷. 为方便下面的证明, 记 $Y(t) \triangleq [\varepsilon(t), \xi(t)]^T$ .

(I)  $X(t)$ 的有界性. 由 $V_e(t)$ 的定义和(33)式, 可知 $V_e(t)$ 是非递增的非负函数, 从而对 $\forall t \in [t_0, T_f]$ 有:

$$V_e(t) \leq V_e(0) \leq \lambda_1 \|\varepsilon(t_0)\|^2 + \lambda_2 \|\xi(t_0)\|^2, \quad (34)$$

正数 $\lambda_1, \lambda_2$ 分别是矩阵 $P$ 和 $Q$ 的最大特征值. 由(34)式知, 对 $\forall t \in [t_0, T_f]$ ,  $V_e(t)$ 是有界的. 结合 $V_e(t)$ 的定义, 不难得到 $\varepsilon(t)$ 和 $\xi(t)$ 在 $[t_0, T_f]$ 上有界. 由(14)式和 $\xi_1$ 的有界性可知, 对 $\forall t \in [t_0, T_f]$ , 存在正常数 $C$ , 使得:

$$|y| \leq |\theta(t)| \cdot |x_1| \leq (1 + \bar{\theta}) |\xi_1| L_1^v \leq C L_1^v. \quad (35)$$

结合(3)式, 引理1和 $0 < v \leq \frac{1}{4p}$ , 可以推出:

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 & \leq -\rho_1 L_1^2 + 2\rho_2 (1 + C^{2p} L_1^{2pv}) L_1 \\ & \leq -L_1^{\frac{3}{2}} (\rho_1 L_1^{\frac{1}{2}} - 2\rho_2 (1 + C^{2p})), \end{aligned}$$

这表明 $L_1 \leq \frac{4\rho_2^2(1+C^{2p})^2}{\rho_1^2}, \forall t \in [t_0, T_f]$ . 因此 $L_1(t)$ 在区间 $[t_0, T_f]$ 上有界. 事实上,  $T_f = +\infty$ , 这里采用反证法证明. 假设 $T_f < +\infty$ , 则 $T_f$ 是有限逃逸时间, 即

当 $t = T_f$ 时, 状态 $X(t)$ 中至少一个分量趋于 $\infty$ . 然而, 解的连续性保证了 $X(t)$ 在 $t = T_f$ 时的有界性, 因此 $X(t)$ 在 $[t_0, T_f]$ 上有界, 这是矛盾的, 从而 $T_f = +\infty$ . 综上所述,  $X(t)$ 在区间 $[t_0, +\infty)$ 上全局有界.

(II)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{x}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$ . 事实上, 由(33)式可以推出:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{+\infty} Y^T(s)Y(s)ds &= \int_{t_0}^{+\infty} (\varepsilon^2(s) + \xi^2(s))ds \leq \\ &-\frac{16}{\sigma} \int_{t_0}^{+\infty} \dot{V}_e(s)ds < +\infty. \end{aligned} \quad (36)$$

由(5)式, (15)式和 $Y(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上的有界性推出 $\dot{Y}(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上一致有界, 从而 $Y(t)$ 在 $[t_0, +\infty)$ 上一致连续,  $Y^T(t)Y(t)$ 亦然. 由文献<sup>[1]</sup>中引理A.6可以推出 $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y^T(t)Y(t) = 0$ , 从而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_i(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_i(t) = 0, i = 1, \dots, n$ . 再根据(4)式, (14)式和 $L_1(t)$ 有界性得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{x}(t) = 0$ . 从而结合(2)式和 $L_1(t)$ 的有界性推出 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$ .  $\square$

### 3 仿真

**例子** 考虑质量弹簧机械系统<sup>[19]</sup>的控制问题:

$$\ddot{z} + F_f(\dot{z}) + F_{sp}(z) = F,$$

其中 $z$ 表示物体的位移,  $F_f(\dot{z}) = a_1 \dot{z}$ 表示因摩擦产生的阻力,  $F_{sp}(z) = a_2 z$ 表示弹簧的恢复力,  $F$ 表示施加到物体的驱动力.

假设 $a_1$ 和 $a_2$ 是未知的正常数且对于 $i = 1, 2$ 满足 $0 < |a_i| \leq \tilde{a}$ , 其中 $\tilde{a} > 0$ 是已知的. 在反馈控制设计中, 位移 $z$ 由位移传感器测量, 但由于制造原因传感器可能存在 $\pm 10\%$ 的灵敏度误差<sup>[20]</sup>. 因此, 通过令 $x_1 = z, x_2 = \dot{z}$ 和 $u = F$ , 得到:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u + a_2 x_1 - a_1 x_2, \\ y = \theta(t)x_1, \end{cases}$$

其中 $\theta(t)$ 在区间 $[0.9, 1.1]$ 内连续变化.

根据定理证明过程, 选取 $a_1 = 1, a_2 = 2, \tilde{a} = 2.5$ , 这表明当 $c \geq 2.5$ 时, 系统满足假设2. 选取 $b_1 = 0.25, b_2 = 1$ , 此时 $0.1 = \bar{\theta} < \theta^* < 0.4393$ , 系统满足假设1. 进一步地选取 $\rho_1 = 0.05, \rho_2 = 5.5, M = 23, v = \frac{1}{8}$ 并选择初值 $[x_1(0), x_2(0), \hat{x}_1(0), \hat{x}_2(0)]^T = [-2, 3, 1, -1]^T$ , 通过MATLAB仿真可以得到下述图1-图4.

图1-图4展示了系统仿真的结果: (i) 图1和图2说明 $x(t)$ 和 $\hat{x}(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上全局有界并且收敛到0, 即本文所设计的控制能够实现系统的全局镇定. (ii) 图3说明实际控制 $u(t)$ 收敛到0. (iii) 图4说明动态增益 $L_1(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上全局有界.

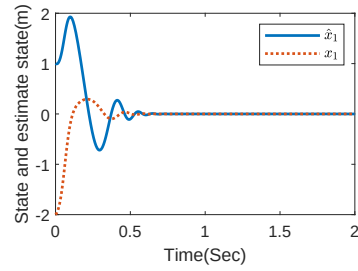


图1 状态 $x_1(t)$ 和估计状态 $\hat{x}_1(t)$ 的轨迹

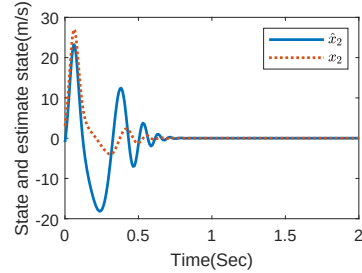


图2 状态 $x_2(t)$ 和估计状态 $\hat{x}_2(t)$ 的轨迹

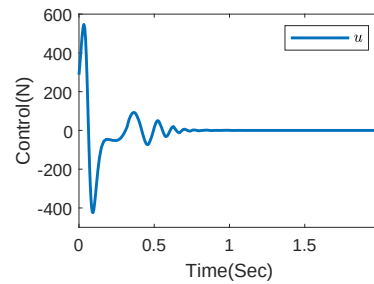


图3 控制 $u(t)$ 的轨迹

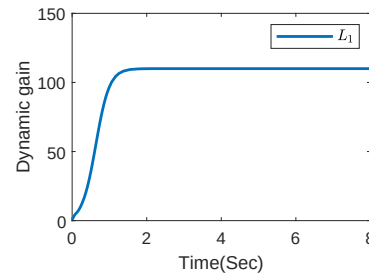


图4 动态增益 $L_1(t)$ 的轨迹

### 4 结论

本文研究了一类具有多种不确定性的非线性系统的全局输出反馈调节问题. 提出了一种改进的双增益方法来设计输出反馈控制器确保闭环系统所有信号全局一致有界并且原系统状态收敛到零. 最近, 时滞镇定问题也备受研究者的关注, 获得了许多有意义的结果<sup>[21]</sup>. 因此, 含有时变时滞的非线性系统的输出反馈镇定问题有待进一步探索.

#### 参考文献(References)

- [1] Krstic M, Kokotovic P V, Kanellakopoulos I. Nonlinear and adaptive control design[M]. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [2] Qian C J. A homogeneous domination approach for

- global output feedback stabilization of a class of nonlinear systems[C]. Proc of the 2005 American Control Conf. Portland: IEEE, 2005: 4708-4715.
- [3] Deng H, Krstic M. Output-feedback stochastic nonlinear stabilization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(2): 328-333.
- [4] Kokotović P, Arcak M. Constructive nonlinear control: a historical perspective[J]. Automatica, 2001, 37(5): 637-662.
- [5] Qian C J, Lin W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(7): 1061-1079.
- [6] Qian C J, Lin W. Output feedback control of a class of nonlinear systems: a nonseparation principle paradigm[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(10): 1710-1715.
- [7] Lei H, Lin W. Universal adaptive control of nonlinear systems with unknown growth rate by output feedback[J]. Automatica, 2006, 42(10): 1783-1789.
- [8] Man Y C, Liu Y G. Global output-feedback stabilization for a class of uncertain time-varying nonlinear systems[J]. Systems & Control Letters, 2016, 90: 20-30.
- [9] 李会, 刘允刚, 黄亚欣. 不确定非线性系统自适应动态事件触发输出反馈镇定[J]. 控制理论与应用, 2019, 36(11): 1871-1878.  
(Li H, Liu Y G, Huang Y X. Adaptive stabilization via dynamic event-triggered output feedback for uncertain nonlinear systems[J]. Control Theory & Applications, 2019, 36(11): 1871-1878.)
- [10] 那靖, 郑昂, 黄英博. 非线性严格反馈系统自适应非反步输出反馈控制[J]. 控制与决策, 2021.  
(Na J, Zheng A, Huang Y B. Adaptive non-backstepping output-feedback control of nonlinear strict-feedback systems[J]. Control and Decision, 2021.)
- [11] 邵钰, 孙宗耀, 蔡彬, 等. 一类具有非三角结构的不确定非线性系统的自适应扰动抑制[J]. 控制与决策, 2019, 34(10): 2268-2272.  
(Shao Y, Sun Z Y, Cai B, et al. Adaptive disturbance attenuation for a class of uncertain nonlinear systems with non-triangular structure[J]. Control and Decision, 2019, 34(10): 2268-2272.)
- [12] Lantto E. Robust control of magnetic bearings in subcritical machines[M]. Helsinki University of Technology, 1999.
- [13] Su Z J, Qian C J, Shen J. Interval homogeneity-based control for a class of nonlinear systems with unknown power drifts[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(3): 1445-1450.
- [14] Lei H, Lin W. Adaptive regulation of uncertain nonlinear systems by output feedback: A universal control approach[J]. Systems & Control Letters, 2007, 56(7-8): 529-537.
- [15] Chen C C, Qian C J, Sun Z Y, et al. Global output feedback stabilization of a class of nonlinear systems with unknown measurement sensitivity[J]. IEEE Transactions on Automatic control, 2017, 63(7): 2212-2217.
- [16] Li W Q, Yao X X, Krstic M. Adaptive-gain observer-based stabilization of stochastic strict-feedback systems with sensor uncertainty[J]. Automatica, 2020, 120: 109112.
- [17] 刘彩云, 孙宗耀, 孟庆华, 等. 一类非线性系统的全局快速有限时间鲁棒控制[J]. 控制与决策, 2020, 35(4): 1004-1008.  
(Liu C Y, Sun Z Y, Meng Q H, et al. Global fast finite-time robust control for a class of nonlinear systems[J]. Control and Decision, 2020, 35(4): 1004-1008.)
- [18] Praly L, Jiang Z P. Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems[J]. Systems & Control Letters, 2004, 53(2): 107-116.
- [19] Khalil H K. Nonlinear systems third edition[J]. Patience Hall, 2002, 115.
- [20] Kolovsky M Z. Nonlinear dynamics of active and passive systems of vibration protection[M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [21] Sun Z Y, Xing J W, Chen C C. Output feedback stabilization of time-delay nonlinear systems with unknown continuous time-varying output function and nonlinear growth rate[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(6): 2579-2592.

## 作者简介

殷县龙(1995—), 男, 博士生, 从事非线性控制、自适应控制、时滞系统的稳定性的研究, E-mail: xianlongyin1618@163.com;

孙宗耀(1979—), 男, 教授, 博士, 从事非线性控制、自适应控制、时滞系统的稳定性的研究, E-mail: sunzongyao@sohu.com;

谭庆全(1980—), 男, 高级工程师, 博士, 从事非线性系统控制、信息管理系统的研究与应用等研究, E-mail: tanqq@bjsies.cn;

陈智强(1987—), 男, 副教授, 博士, 从事非光滑控制及齐次系统理论等研究, E-mail: ccchenevan@mail.ncku.edu.tw;

孟庆华(1977—), 男, 教授, 博士, 从事车辆检测与故障诊断、电动汽车、汽车电子等研究, E-mail: mengqinghua@hdu.edu.cn.