

控制与决策

Control and Decision

基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法

王子赟, 张帅, 占雅聪, 王艳, 纪志成

引用本文:

王子, 张帅, 占雅聪, 等. 基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(1): 127–134.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0968>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

具有全状态约束和未建模动态的严格反馈系统有限时间自适应动态面控制

Finite-time adaptive dynamic surface control for strict-feedback systems with full state constraints and unmodeled dynamics

控制与决策. 2022, 37(1): 108–118 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1023>

含有分数阶有色关联噪声的分数阶系统的卡尔曼滤波器设计

Design of Kalman filter for fractional-order systems with correlated fractional-order colored noises

控制与决策. 2021, 36(7): 1672–1678 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1418>

一种反向递推正弦干扰观测器的设计方法

Design method of reverse recursive sinusoidal disturbance observer

控制与决策. 2021, 36(2): 403–410 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0769>

基于向量集逆区间滤波的故障观测器设计

Vector set inversion interval filtering based fault observer design

控制与决策. 2021, 36(12): 2973–2981 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0212>

脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

控制与决策. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法

王子赞^{1,2†}, 张 帅¹, 占雅聪¹, 王 艳¹, 纪志成¹

(1. 江南大学 物联网技术应用教育部工程研究中心, 江苏 无锡 214122;

2. 江南大学 江苏省食品先进制造装备技术重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘要: 针对未知但有界噪声离散时间状态空间系统, 提出一种基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法. 首先, 采用有界误差方法对测量噪声和状态预测过程进行分析, 利用正多胞体预测状态集包裹后离散成初始约束条件; 然后, 根据更新最小边, 全对称多胞体经过正多胞体紧致包裹后离散成约束条件, 与测量方程约束条件组成 3 重约束; 最后, 通过求解线性规划问题得到全部状态的上下界, 并获得包裹状态可行集的最紧致正多胞体. 仿真示例验证了该方法估计离散状态空间系统状态的有效性和准确性.

关键词: 状态估计; 未知但有界; 正多胞体; 全对称多胞体; 滤波

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0968

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 王子赞, 张帅, 占雅聪, 等. 基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(1): 127-134.

Orthotopic double filtering based state estimation algorithm

WANG Zi-yun^{1,2†}, ZHANG Shuai¹, ZHAN Ya-cong¹, WANG Yan¹, JI Zhi-cheng¹

(1. Engineering Research Center of Internet of Things Technology Applications of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. Jiangsu Key Laboratory of Advanced Food Manufacturing Equipment and Technology, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: For the unknown but bounded noise discrete-time state space system, a state estimation method based on orthotope filtering is proposed. The bounded error method is first used to analyze the measurement noise and state prediction process, and the prediction state set uses orthotope after being wrapped, which is dispersed into constraints. Then due to the updated minimum edge, the zonotope is tightly wrapped by the orthotope before being dispersed into constraints, which forms a triple constraint with the measurement equation constraints. The upper and lower bounds of all states are obtained by solving linear programming problems. The bounds of this method are the most compact orthotope of the feasible set of wrapped states. Simulation examples illustrate the effectiveness and accuracy of the proposed method for estimating the state of discrete state space systems.

Keywords: state estimation; unknown but bounded; orthotope; zonotope; filtering

0 引言

系统状态估计一直以来都是控制领域研究的热门话题^[1-2]. 状态估计的目的是从观测数据中提取有用的数据进行状态估计, 但是在实际系统中观测数据往往受到噪声的影响. 同时, 随着科技的进步, 系统运行环境越来越复杂, 噪声的不可测性大大增加, 因此必须减小噪声对状态估计的影响.

系统受到噪声先验知识的不同决定了控制理论和方法的不同. 根据噪声假设, 系统的状态估计方法大致可以分为两种: 一种是假设噪声满足某种

概率分布且已知或至少部分已知^[3-4], 例如卡尔曼滤波^[5-6]; 另一种是集员估计方法, 仅仅假设扰动或噪声未知但有界^[7]. 在许多情况下, 由于观测数据不足, 难以确定统计特征的准确性. 一些噪声本质上是非随机的, 并且该噪声难以通过统计方法描述. 集员状态估计方法仅要求系统的噪声和扰动有界, 上下边界是已知的^[8-9], 并且不需要知道诸如噪声分布或均值和方差等统计属性. 在表示状态估计区域时, 可以采用标准的几何体, 例如椭球^[10]、区间^[11-12]、全对称多胞体^[13-14]、正多胞体^[15-16], 以及约束全对称多胞体^[17],

收稿日期: 2020-07-15; 修回日期: 2020-10-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61802150, 61973138); 中国博士后科学基金面上项目(2018M642161); 江苏省食品先进制造装备技术重点实验室开放课题项目(FM-2019-07).

†通讯作者. E-mail: wangzy0601@163.com.

也可以采用多面体表示状态估计区域^[18].

在全对称多胞体的研究领域,文献[19]给出了其定义和计算方法.文献[20]通过逐步构建线性离散时间系统的全对称多胞体,提出了一种全对称多胞体滤波方法,对系统未知状态具有很好的包裹效果;在此基础上,文献[21]提出了基于全对称多胞体的非线性离散时间系统和非线性连续时间系统滤波算法;考虑时变系统状态或参数情况下,因为系统状态或参数变化精确且全对称多胞体的近似包裹性,基于文献[19]研究的全对称多胞体的优异性能,文献[22]提出了时变参数离散时间系统的全对称多胞体集员估计算法;在考虑描述系统噪声和参数变化范围有界的情况下,文献[13]提出了一种改进全对称多胞体的时变参数离散时间系统和非线性离散时间状态空间系统的状态估计方法.除此之外,还可以采用 P 半径^[23]、 F 范数^[24]等多种指标更新得到最小全对称多胞体.

虽然全对称多胞体的研究成果颇丰,但是由于其结构的特殊性,在时变参数系统或状态空间系统中应用全对称多胞体方法时,其形状生成矩阵维数不断增加,这将使得算法计算复杂度增加.考虑到正多胞体的形状规则,其各边大都平行或垂直坐标轴,计算简便,因此近年来针对正多胞体在滤波领域的研究得到迅速发展.用正多胞体外包裹全对称多胞体时,其每个坐标轴上状态最大最小值相同,正多胞体的这些优点也为状态估计领域的研究提供了新的视角.

本文的目标在于提出一种基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法,结合正多胞体和全对称多胞体,利用正多胞体包裹全对称多胞体过程中边界最大最小值的不变性,在预测步将预测得到的状态集用正多胞体包裹,此时状态集上下界并未改变,随后利用正多胞体的规则性在更新步构造新的状态估计约束条件,通过求解 $2n$ 个线性规划问题得到上下界更紧凑的正多胞体,提高系统状态估计的精确性,同时降低算法的保守性.

1 问题描述

考虑下列线性离散状态空间系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^{n_x}$ 和 $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^{n_y}$ 分别为 k 时刻系统状态和测量输出值, \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 为已知矩阵, $\mathbf{w}(k) \in \mathbf{R}^{n_x}$ 为状态扰动, $\mathbf{v}(k) \in \mathbf{R}^{n_y}$ 为测量噪声.假设系统扰动、测量噪声以及初始状态都是有界的, $\mathbf{w}(k) \in$

$W, \mathbf{v}(k) \in V, \mathbf{x}(0) \in X(0)$,其中 W 、 V 、 $X(0)$ 都是正多胞体.

引理1^[25] 考虑系统(1)和 k 时刻的测量输出 $\mathbf{y}(k)$,那么 k 时刻状态满足 $X\{\mathbf{y}(k)\} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n_x} : \mathbf{y}(k) \in \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + V\}$.

引理2^[25] 考虑系统(1), k 时刻状态集 $X(k)$ 保持与所有测量值 $\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(k)$ 和初始状态集 $X(0)$ 的一致性,那么

$$X(k) = (\mathbf{A}X(k-1) \oplus \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \oplus W) \cap X\{\mathbf{y}(k)\}. \quad (2)$$

其中: \oplus 为Minkowski和,定义为 $X \oplus Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}$.

由于计算精确状态集 $X(k)$ 十分困难,在实际中,通常采用规则的空间结构外界包裹精确可行集,从而降低状态估计算法的计算复杂度,但是保守性也相应地有所增加.本文提出一种基于多胞体双重滤波的状态估计算法,求解 $2n_x$ 个线性规划条件,得到每个时刻状态的上下界,降低了计算复杂度,保守性也得到了有效改善.

2 多胞体空间描述

定义1^[16] 描述近似参数可行集的正多胞体

$$\mathcal{O}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \text{diag}(\mathbf{d})\mathbf{m}, \|\mathbf{m}\|_{\infty} \leq 1\}. \quad (3)$$

其中: $\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d}, \mathbf{m} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{d}_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n_x$; $\text{diag}(\mathbf{d})$ 为对角值等于 d 的对角阵.集合 $\mathcal{F}_i = \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} : \mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}_i\}$ 和 $\mathcal{F}_{i+n_x} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} : \mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}}_i - \mathbf{d}_i\}$ 为正多胞体 \mathcal{O} 的一对结构面.可以看出,正多胞体由约束条件 $X(0)$ 和 $X\{\mathbf{y}(k)\}$ 决定,通过求解 $2n_x$ 个线性规划方程可以得到包裹参数可行解集的最小正多胞体 $\mathcal{O}^*(X)$.

$$\beta_i(k) = \max e_i^T \mathbf{x}, \text{ s.t. } \mathbf{x} \in X(k); \quad (4)$$

$$\beta_{i+n_x}(k) = \min e_i^T \mathbf{x}, \text{ s.t. } \mathbf{x} \in X(k); \quad (5)$$

$$X(k) = \bigcap_{i=1}^{2n_x} X_i(k). \quad (6)$$

其中: $X(k)$ 为 $2n_x$ 个约束条件可行解集的交集, e_i 为 n_x 维单位矩阵的第 i 列, $i = 1, 2, \dots, n_x$.通过求解线性规划方程可以得到第 k 步每个参数的上下界,从而得到最紧致正多胞体 $\mathcal{O}^*(X) = \mathcal{O}(\bar{\mathbf{x}}^*, \mathbf{d}^*)$,其中

$$\bar{\mathbf{x}}_i^* = \frac{\beta_i(k) + \beta_{i+n_x}(k)}{2}, \quad (7)$$

$$\mathbf{d}_i^* = \frac{\beta_i(k) - \beta_{i+n_x}(k)}{2}. \quad (8)$$

定义2^[19] 给定向量 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ 和矩阵 $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{n \times n}$,集合

$$\mathbf{p} \oplus \mathbf{H}\mathbf{B}^n = \{\mathbf{p} + \mathbf{H}\mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbf{B}^n\} \quad (9)$$

被称为 n 阶全对称多胞体,其中 $\mathbf{B} \in [-1 \ 1]$.

由定义1和定义2可见,正多胞体是特殊的全对称多胞体.

引理3^[26] 假设存在一个全对称多胞体 $Z(\mathbf{p}, \mathbf{H}) = \mathbf{p} \oplus \mathbf{H}\mathbf{B}^n$, \mathbf{H} 为对角阵,且对角元素为 $h_i (i = 1, 2, \dots, n)$,如果存在 $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{x}}, h_i = d_i$,则 $Z(\mathbf{p}, \mathbf{H}) = \mathcal{O}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{d})$.

由引理3可知,当用最紧致正多胞体包裹全对称多胞体时,每个方向上正多胞体上下界与全对称多胞体相同.

引理4^[26] 假设存在一个全对称多胞体 $Z(\mathbf{p}, \mathbf{H}) = \mathbf{p} \oplus \mathbf{H}\mathbf{B}^n$ 和一个正多胞体 $\mathcal{O}(\mathbf{p}, \mathbf{d})$,如果存在 $d_i = \sum_{j=1}^{n_H} \|H_{i,j}\|$,其中 n_H 为矩阵 \mathbf{H} 的列数,则 $\mathcal{O}(\mathbf{p}, \mathbf{d})$ 为包裹 $Z(\mathbf{p}, \mathbf{H}) = \mathbf{p} \oplus \mathbf{H}\mathbf{B}^n$ 的最紧致正多胞体.

3 主要结论

3.1 预测步

假设第 k 步时,状态可行集为正多胞体 $\mathcal{O}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{d}}(k))$,同时 $Z(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{D}}(k)) = \mathcal{O}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{d}}(k))$, $\bar{\mathbf{D}}(k)$ 为对角值等于 d 的对角阵.在不考虑系统扰动的情况下,有

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad (10)$$

$$\mathbf{D}(k+1|k) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{D}}(k). \quad (11)$$

由此可见,当 \mathbf{A} 不是对角阵时,预测步得到的可行集不再是一个正多胞体,而是一个任意形状的全对称多胞体.利用引理4将该全对称多胞体转化成最紧致正多胞体.此时, $\mathbf{D}(k+1|k)$ 为对角阵.当考虑系统扰动 \mathbf{W} 时,根据多胞体Minkowski总和,因为 $\mathbf{W} = \mathcal{O}(\mathbf{0}, \mathbf{w})$,则 $\bar{\mathbf{x}}(k+1|k)$ 不变,有

$$\bar{\mathbf{D}}(k+1|k) = \mathbf{D}(k+1|k) \oplus \mathbf{w}. \quad (12)$$

定理1 对系统(1)而言,在加入系统扰动 $\mathbf{w}(k)$ 后,预测步得到的状态可行集与未加入系统扰动时一样,仍然可以用正多胞体描述,即 $\bar{\mathbf{D}}(k+1|k)$ 是一个对角阵.

证明 根据全对称多胞体Minkowski总和可知

$$\bar{\mathbf{D}}(k+1|k) := [\mathbf{D}(k+1|k) \ \mathbf{w}].$$

根据全对称多胞体顶点公式,有

$$\max(\mathbf{E}\bar{\mathbf{D}}(k+1|k))^{i,:} = \max(\mathbf{E}[\mathbf{D}(k+1|k) \ \mathbf{w}])^{i,:}.$$

其中: \mathbf{E} 为随机的正负1矩阵, $\max(\mathbf{E}\bar{\mathbf{D}}(k+1|k))^{i,:}$ 为矩阵 $\mathbf{E}\bar{\mathbf{D}}(k+1|k)$ 第 i 行的最大值.由于 \mathbf{E} 的元素均

为1或-1,则有

$$\sum \|\bar{\mathbf{D}}(k+1|k)^{i,:}\| = \sum \|\mathbf{D}(k+1|k)^{i,:}\| + \|\mathbf{w}_i\|.$$

令 $\bar{\mathbf{D}}(k+1|k)^{i,i} = \sum \|\bar{\mathbf{D}}(k+1|k)^{i,:}\|$,则系统扰动加入后可以用正多胞体描述, $\bar{\mathbf{D}}(k+1|k)$ 是一个对角阵,且各对角元素为 $[\mathbf{D}(k+1|k) \ \mathbf{w}]$ 行元素绝对值之和. \square

举例说明定理1的作用.假设不考虑系统扰动下的预测结果为

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1|k) = [2 \ 1]^T,$$

$$\mathbf{D}(k+1|k) = \begin{bmatrix} 0.9941 & 0.0093 \\ -1.1532 & 0.8695 \end{bmatrix}.$$

给定系统扰动为正多胞体 $\mathbf{W} = \mathcal{O}([0 \ 0]^T, \text{diag}([0.2 \ 0.2]))$,预测步结果如图1所示.

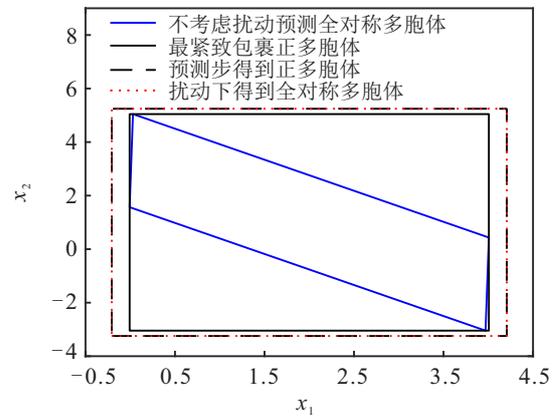


图1 加入扰动后的预测步状态可行集

3.2 更新步

已知预测步得到的预测状态可行集是正多胞体,则很容易将其转化为 $2n_x$ 个约束条件并表示为 $\bar{X}(k)$.

引理5^[19] 假设存在一个全对称多胞体 $Z(\mathbf{p}, \mathbf{H}) = \mathbf{p} \oplus \mathbf{H}\mathbf{B}^n$,系统状态在某时刻满足 $\mathcal{S} = \{x \in \mathbf{R}^n : |c^T x - d| \leq \sigma\}$,则 $X \cap \mathcal{S} \subseteq \hat{Z}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{H}}) = \hat{\mathbf{p}}(\lambda) \oplus \hat{\mathbf{H}}(\lambda)\mathbf{B}^{r+1}$.其中

$$\hat{\mathbf{p}}(\lambda) = \mathbf{p} + \lambda(d - c^T \mathbf{p}), \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(\lambda) = [(I - \lambda c^T)\mathbf{H} \ \sigma\lambda]. \quad (14)$$

对于式(13)和(14)而言,当选择最小边标准时,有

$$\lambda^* = \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}^T c}{c^T \mathbf{H}\mathbf{H}^T c + \sigma^2}.$$

注1 在利用引理5估计状态时,预测步并不将全对称多胞体转化成正多胞体.根据引理5得到的最小边全对称多胞体进行预测.

下面将上述全对称多胞体 $Z(\mathbf{p}, \mathbf{H})$ 用最紧致正

多胞体包裹,此时全对称多胞体估计上下界并未改变.在紧致正多胞体包裹后将其离散成 $2n_x$ 个约束条件并表示为 $\hat{X}(k)$,由此通过求解 $2n_x$ 个线性规划问题得到每个系统状态的上下界,具体原理展示如图2所示.

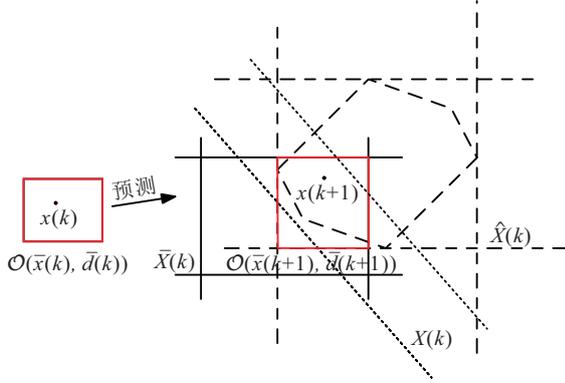


图2 基于多胞体双重滤波状态估计

利用线性规划求解当前正多胞体的上下界

$$\beta_i(k+1) = \max e_i^T \mathbf{x},$$

$$\text{s.t. } \mathbf{x} \in X(k) \cap \bar{X}(k) \cap \hat{X}(k); \quad (15)$$

$$\beta_{i+n_x}(k+1) = \min e_i^T \mathbf{x},$$

$$\text{s.t. } \mathbf{x} \in X(k) \cap \bar{X}(k) \cap \hat{X}(k); \quad (16)$$

$$X(k+1) = \bigcap_{i=1}^{2n_x} (X_i(k) \cap \bar{X}_i(k) \cap \hat{X}_i(k)). \quad (17)$$

因此, $k+1$ 时刻状态可行集为正多胞体 $\mathcal{O}(\bar{\mathbf{x}}(k+1), \bar{\mathbf{d}}(k+1))$, $i=1, 2, \dots, n_x$, 其中

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1)^i = \frac{\beta_i^i(k+1) + \beta_{i+n_x}^i(k+1)}{2}, \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{d}}(k+1)^i = \frac{\beta_i^i(k+1) - \beta_{i+n_x}^i(k+1)}{2}. \quad (19)$$

定理2 当系统输出序列数越多时,状态估计结果越精确,每个状态的上下界更逼近真值.

证明 定义系统(1)输出序列数为 j ,此时 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{j \times n_x}$, n_x 为系统状态向量维数, V 为 j 维的正多胞体.

对系统(1)而言,如果增加一维输出至 $j+1$ 维,则矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 和 j 维输出保持一致, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{(j+1) \times n_x}$, V 为 $j+1$ 维的正多胞体.

如果 $k-1$ 时刻状态可行集为 $\mathcal{O}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{d}}(k))$,则 j 维情况下预测状态集为 $d\mathcal{O}(k+1|k)$, $j+1$ 维情况下预测状态集为 $t\mathcal{O}(k+1|k)$,此时有

$$d\mathcal{O}(k+1|k) = t\mathcal{O}(k+1|k). \quad (20)$$

因此, j 维和 $j+1$ 维情况下状态可行集分别满足

$$dX(k) = d\mathcal{O}(k+1|k) \cap X(0) \cap X\{\mathbf{y}(k, 1)\} \cap \dots$$

$$\dots \cap X\{\mathbf{y}(k, j)\}, \quad (21)$$

$$tX(k) = t\mathcal{O}(k+1|k) \cap X(0) \cap X\{\mathbf{y}(k, 1)\} \cap \dots$$

$$\cap X\{\mathbf{y}(k, j)\} \cap X\{\mathbf{y}(k, j+1)\}, \quad (22)$$

其中 $X\{\mathbf{y}(k, i)\}$ 为第 i 个输出时状态满足的约束条件.

由式(21)和(22)可知, $tX(k) = dX(k) \cap X\{\mathbf{y}(k, j+1)\}$,同时

$$\max(d\beta_i(k)) \geq \max(t\beta_i(k)), \quad (23)$$

$$\min(d\beta_i(k)) \leq \min(t\beta_i(k)). \quad (24)$$

可见,当输出序列越多时,状态估计的上下界越精确. \square

综上,基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法运行步骤总结如下.

step 1: 定义总估计时长为 L ,初始时刻 $k=1$,定义初始正多胞体,定义初始全对称多胞体,两个多胞体表示区域相同, k 自增1.

step 2: 根据状态方程和 $k-1$ 时刻更新正多胞体,根据式(10)~(12)得到 k 时刻预测正多胞体,转化为 $2n_x$ 个约束条件并表示为 $\bar{X}(k)$.

step 3: 根据状态方程和 $k-1$ 时刻更新全对称多胞体,得到 k 时刻的预测全对称多胞体,利用引理5中式(13)、(14)更新得到 k 时刻最小边全对称多胞体,利用最紧致正多胞体包裹后,转化为 $2n_x$ 个约束条件并表示为 $\hat{X}(k)$.

step 4: 根据测量方程得到 k 时刻状态满足约束条件 $X(k)$.

step 5: 求解 $2n_x$ 个满足约束条件 $\mathbf{x} \in X(k) \cap \bar{X}(k) \cap \hat{X}(k)$ 的线性规划问题(15)、(16),得到每个状态的上下界.

step 6: 利用式(18)、(19)构造 k 时刻的更新正多胞体.

step 7: 置 $k=k+1$,返回step 2;当 $k=L$ 时,算法结束.

4 仿真分析

为了验证本文提出的状态估计方法的可行性,本节利用两个仿真示例进行仿真验证.

仿真1 为验证本文所提方法解决线性离散状态空间状态估计问题的有效性,下面采用风力发电机桨距子系统作为仿真示例进行分析.

在风力发电系统中,桨距子系统是控制桨叶和桨距角的重要组成部分,如图3所示.

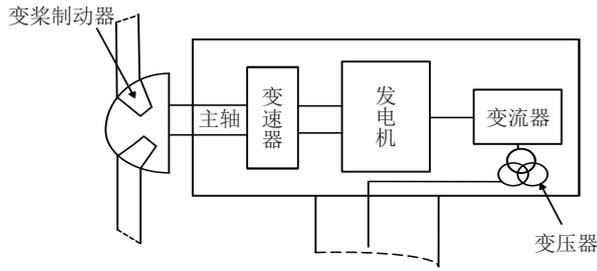


图3 风力发电机系统

风力发电机的结构模型为^[27-28]

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\beta}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} \beta_r \quad (25)$$

其中: β 和 β_a 分别为桨距角和角速度大小, β_r 为桨距参考值; ζ 和 ω_n 分别为系统自然频率和阻尼系数, 取值 $\zeta = 0.6, \omega_n = 11.11 \text{ rad/s}$. 设置状态 $x = [\beta \ \beta_a]^T, u = \beta_r$, 根据式(1), w 和 v 分别为干扰和输出误差, 并设 $|w(k)| = \max_i |w_i(k)| \leq \delta, |v(k)| = \max_i |v_i(k)| \leq \delta, \delta$ 为传感器的标准偏差, 取 $\delta = 0.025$, 采样时间 $T_s = 1 \text{ s}$. 对于系统离散化, 有

$$A = \begin{bmatrix} 0.9941 & 0.0093 \\ -1.1532 & 0.8695 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0059 \\ 1.1532 \end{bmatrix},$$

并设置 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

设置初始状态 $x(0) = [0 \ 0]^T, p(0) = [0 \ 0]^T, H(0) = 0.6I_2$, 输入 $u_k = 20$, 系统扰动和测量噪声分别满足 $\|w_k\| \leq 0.025, \|v_k\| \leq 0.025$. 仿真结果如图4~图6所示.

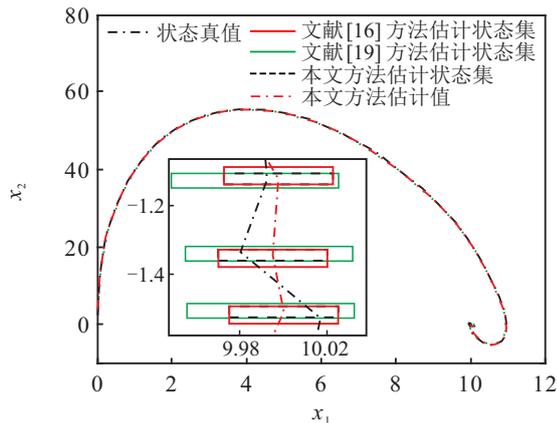


图4 风电系统状态可行集估计过程中递归演化

图4给出了状态变化曲线和状态可行集的递归演化图. 从图4可以看出, 状态真值始终包裹在状态可行集之内, 同时图4给出了利用文献[19]更新方法得到的全对称多胞体, 在包裹过程中全对称多胞体上下界并未变化, 可以看出本文所提方法始终选择更靠近真值的最优值, 使得估计区间更小且更接近真值.

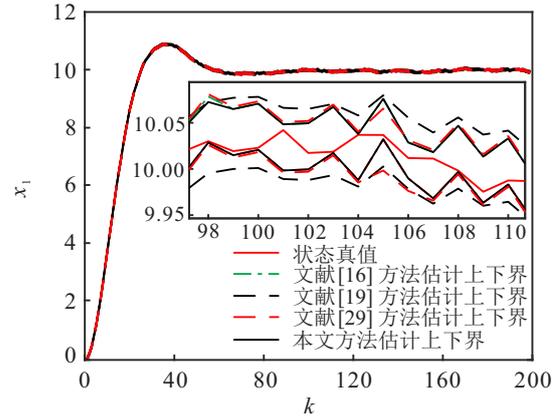


图5 风电系统状态 x_1 估计结果比较

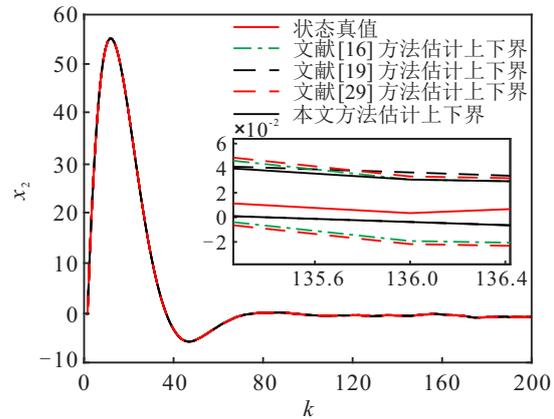


图6 风电系统状态 x_2 估计结果比较

图5和图6给出了两个状态与文献[16,19,29]算法比较的变化曲线, 能更好地展示本文方法的优越性和低保守性. 可以看出, 两个状态真值始终在估计区间内, 虽然每种方法估计结果上下界都能包含真值, 但是本文所提的算法始终选择估计最优解, 估计上下界距离真值更近, 降低了算法保守性, 使得估计结果更加精确.

仿真2 为了进一步验证本文方法, 利用四容水箱系统显示所提出方法的有效性和优越性. 四容水箱系统的示意图如图7所示.

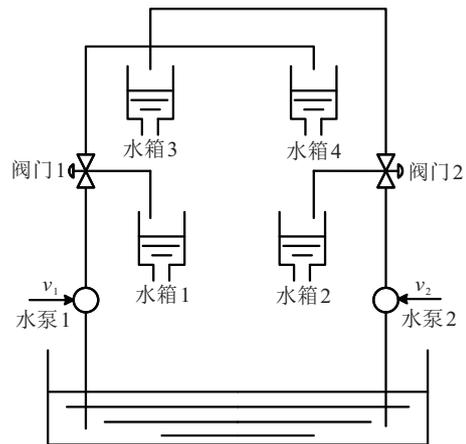


图7 四容水箱系统原理

四容水箱的数学模型^[24]可以表示为

$$\begin{cases} \dot{h}_1(t) = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1(t)} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3(t)} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}v_1(t), \\ \dot{h}_2(t) = -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2(t)} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4(t)} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}v_2(t), \\ \dot{h}_3(t) = -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3(t)} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}v_2(t), \\ \dot{h}_4(t) = -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4(t)} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}v_1(t), \end{cases} \quad (26)$$

其中四容水箱的模型参数及其物理意义在表1中给出。

表1 四容水箱参数

符号	变量名称
$h_i(t)$	t 时刻水箱 i 的水位
$v_i(t)$	t 时刻水泵 i 的输入电压
A_i	水箱 i 的横截面积
a_i	水箱 i 出水孔的横截面积
k_i	水泵 i 比例系数
γ_i	阀门 i 比例系数
g	重力加速度

四容水箱的参数值分别设置为 $\gamma_1 = 0.665$, $\gamma_2 = 0.566$, $k_1 = k_2 = 3.35 \text{ cm}^3/\text{Vs}$, $A_1 = A_3 = 28 \text{ cm}^2$, $A_2 = A_4 = 32 \text{ cm}^2$, $a_1 = a_3 = 0.071 \text{ cm}^2$, $a_2 = a_4 = 0.057 \text{ cm}^2$, $g = 9.81 \text{ cm/s}^2$ 。

在应用本文提出的方法前,首先通过泰勒展开将非线性模型(26)围绕工作点进行线性化。线性化的状态空间方程为

$$\begin{cases} \Delta \dot{h}_1(t) = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2\bar{h}_1}}\Delta h_1(t) + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2\bar{h}_3}}\Delta h_3(t) + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}\Delta v_1(t), \\ \Delta \dot{h}_2(t) = -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2\bar{h}_2}}\Delta h_2(t) + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2\bar{h}_4}}\Delta h_4(t) + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}\Delta v_2(t), \\ \Delta \dot{h}_3(t) = -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{\frac{g}{2\bar{h}_3}}\Delta h_3(t) + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}\Delta v_2(t), \\ \Delta \dot{h}_4(t) = -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{\frac{g}{2\bar{h}_4}}\Delta h_4(t) + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}\Delta v_1(t). \end{cases} \quad (27)$$

其中: $\Delta h_i(t) = h_i(t) - \bar{h}_i$, \bar{h}_i 为水箱 i 处于稳定状态

时的水位; $\Delta v_i(t) = v_i(t) - \bar{v}_i$, \bar{v}_i 为水泵 i 处于稳定状态时的电压。通过设置状态参数、输入和输出

$$x(t) = [\Delta h_1(t) \quad \Delta h_2(t) \quad \Delta h_3(t) \quad \Delta h_4(t)]^T, \\ u(t) = \begin{bmatrix} \Delta v_1(t) \\ \Delta v_2(t) \end{bmatrix}, y(t) = \begin{bmatrix} k_c \Delta h_1(t) \\ k_c \Delta h_2(t) \end{bmatrix},$$

可以获得四容水箱的动态系统,如下所示:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -m_1 & 0 & \frac{A_3 m_3}{A_1} & 0 \\ 0 & -m_2 & 0 & \frac{A_4 m_4}{A_2} \\ 0 & 0 & -m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m_4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{cases} \quad (28)$$

其中: $m_i = \frac{a_i}{A_i}\sqrt{\frac{g}{2\bar{h}_i}}$, $k_c = 0.5 \text{ V/cm}$ 为输出电压比例因子。利用欧拉离散化方法,设定采样时间为 $T_s = 1 \text{ s}$,可以将四容水箱系统的系统动力学公式化为离散状态空间的形式,离散化后的参数为

$$A = \begin{bmatrix} 0.9841 & 0 & 0.0419 & 0 \\ 0 & 0.9888 & 0 & 0.0294 \\ 0 & 0 & 0.9581 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9706 \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} 0.0796 & 0 \\ 0 & 0.0593 \\ 0 & 0.0519 \\ 0.0351 & 0 \end{bmatrix}, \\ C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

设置初始状态 $x(0) = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.1]^T$, $p(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$, $H(0) = 0.6I_4$,输入 $u_k = [8 \quad 8]^T$,系统扰动和测量噪声分别满足 $\|w_k\| \leq 0.2$, $\|v_k\| \leq 0.2$ 。仿真结果如图8~图10所示。

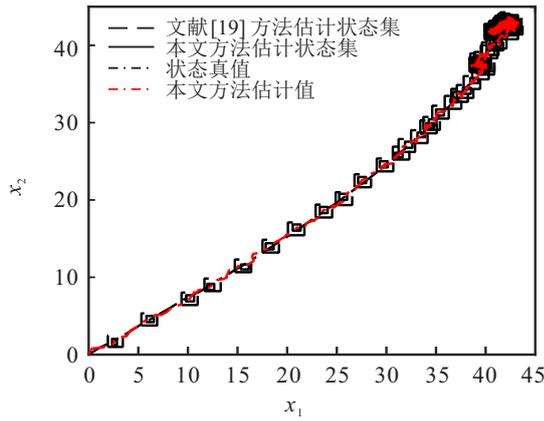


图8 水箱系统状态可行集估计过程中递归演化

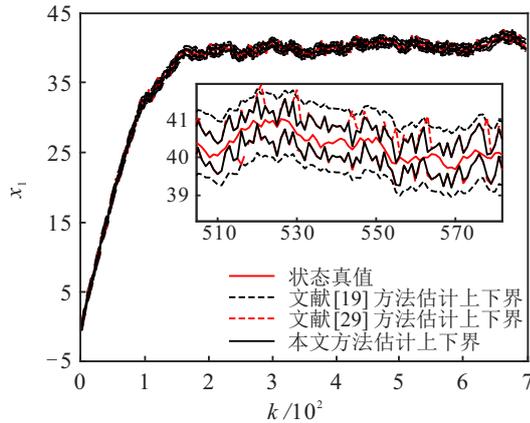


图9 水箱系统状态 x_1 估计结果比较

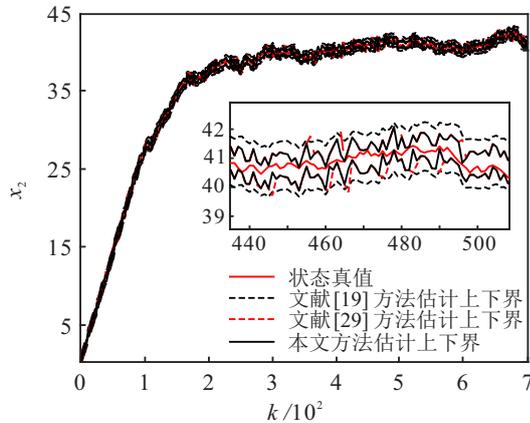


图10 水箱系统状态 x_2 估计结果比较

图8给出了状态 x_1 和 x_2 的状态可行集平面图, 为了清晰地展示状态可行集变化, 图8选择每8步画一次状态可行集. 从图8中可以看到状态可行集一直能跟随状态变化, 本文提出的方法不管是在状态可行集面积还是可行集上下界都表现出很好的效果.

图9和图10分别给出了状态 x_1 和 x_2 的变化曲线, 可以看出, 状态真值始终包裹在估计上下界之内, 本文提出的方法的上下界距离真值较文献[19, 29]更近, 可见本文所提方法在解决离散时间状态空间系统状态估计时的保守性更低, 充分展示了算法的准确性和有效性.

5 结论

本文基于正多胞体和全对称多胞体滤波, 结合线性规划求解状态参数, 提出了一种基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法, 在给定有界噪声的条件下, 依靠预测正多胞体离散约束条件, 测量方程约束条件以及最小边全对称多胞体约束条件, 求得包裹状态的最紧致正多胞体, 实现系统状态的精确估计. 本文提出的基于多胞体双重滤波的系统状态估计方法, 利用多胞体的空间移动描述估计过程, 同时在计算过程中, 通过求解有限个线性规划问题得到紧致的正多胞体, 计算步骤简单且保守性低. 此外, 本文通过风力发电机的桨距子系统和四容水箱等多输入多输出系统为例分别进行仿真, 可以直观看出该方法估计状态点的可行性和有效性. 本文的研究方法可以推广至系统辨识和故障诊断等研究领域.

参考文献(References)

- [1] 胡怀中, 张建博, 杨清宇. 采用最优状态估计的主蒸汽温度动态矩阵控制方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(7): 1475-1480.
(Hu H Z, Zhang J B, Yang Q Y. Dynamic matrix control for main steam temperature control system based on optimal state estimation[J]. Control and Decision, 2019, 34(7): 1475-1480.)
- [2] 胡斌, 沈志萍, 苏为洲. 基于量化测量值的实时状态估计的PCRLB[J]. 控制与决策, 2018, 33(10): 1820-1824.
(Hu B, Shen Z P, Su W Z. PCRLB in real-time state estimation with quantized measurements[J]. Control and Decision, 2018, 33(10): 1820-1824.)
- [3] Wang L Y, Zhao Y W, Chen X Y, et al. A Newton algorithm for multivariate total least squares problems[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2016, 45(4): 411-417.
- [4] Wang D Q, Gao Y P. Recursive maximum likelihood identification method for a multivariable controlled autoregressive moving average system[J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2018, 33(4): 1015-1031.
- [5] Xiong K, Zhang H, Liu L. Adaptive robust extended Kalman filter for nonlinear stochastic systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2008, 2(3): 239-250.
- [6] Zhao L Q, Wang J L, Yu T, et al. Design of adaptive robust squareroot cubature Kalman filter with noise statistic estimator[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 256: 352-367.
- [7] Cerone V, Razza V, Regruto D. Set-membership errors-invariables identification of MIMO linear systems[J]. Automatica, 2018, 90: 25-37.
- [8] 周波, 钱堃, 马旭东, 等. 一种新的基于保证定界椭

- 球算法的非线性集员滤波器[J]. 自动化学报, 2013, 39(2): 150-158.
(Zhou B, Qian K, Ma X D, et al. A new nonlinear set membership filter based on guaranteed bounding ellipsoid algorithm[J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(2): 150-158.)
- [9] Liu Y S, Zhao Y, Wu F L. Ellipsoidal state-bounding-based set-membership estimation for linear system with unknown-but-bounded disturbances[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(4): 431-442.
- [10] Zhou B, Qian K, Ma X D, et al. Ellipsoidal bounding set-membership identification approach for robust fault diagnosis with application to mobile robots[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2017, 28(5): 986-995.
- [11] Tang W T, Wang Z H, Shen Y. Interval estimation for discrete-time linear systems: A two-step method[J]. Systems & Control Letters, 2019, 123: 69-74.
- [12] Tang W T, Wang Z H, Wang Y, et al. Interval estimation methods for discrete-time linear time-invariant systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(11): 4717-4724.
- [13] Chai W, Sun X F, Qiao J. Improved zonotopic method to set membership identification for systems with time-varying parameters[J]. IET Control Theory & Applications, 2011, 5(17): 2039-2044.
- [14] Wang H, Kolmanovsky I V, Sun J. Zonotope-based recursive estimation of the feasible solution set for linear static systems with additive and multiplicative uncertainties[J]. Automatica, 2018, 95: 236-245.
- [15] Casini M, Garulli A, Vicino A. A linear programming approach to online set membership parameter estimation for linear regression models[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2017, 31(3): 360-378.
- [16] Casini M, Garulli A, Vicino A. A recursive technique for tracking the feasible parameter set in bounded error estimation[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2017, 31(10): 1456-1466.
- [17] Scott J K, Raimondo D M, Marseglia G R, et al. Constrained zonotopes: A new tool for set-based estimation and fault detection[J]. Automatica, 2016, 69: 126-136.
- [18] 沈艳霞, 尹天骄. 一种基于凸多面体的集员滤波故障诊断方法[J]. 控制与决策, 2018, 33(1): 150-156.
(Shen Y X, Yin T J. A fault diagnosis method of set membership filter based on convex ploytope[J]. Control and Decision, 2018, 33(1): 150-156.)
- [19] Alamo T, Bravo J M, Camacho E F. Guaranteed state estimation by zonotopes[J]. Automatica, 2005, 41(6): 1035-1043.
- [20] Kühn W. Rigorously computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect[J]. Computing, 1998, 61(1): 47-67.
- [21] Wan J, Sharma S, Sutton R. Guaranteed state estimation for nonlinear discrete-time systems via indirectly implemented polytopic set computation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(12): 4317-4322.
- [22] Bravo J M, Alamo T, Camacho E F. Bounded error identification of systems with time-varying parameters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(7): 1144-1150.
- [23] Le V T H, Stoica C, Alamo T, et al. Zonotopic guaranteed state estimation for uncertain systems[J]. Automatica, 2013, 49(11): 3418-3424.
- [24] Zhang W H, Wang Z H, Guo S H, et al. Interval estimation of sensor fault based on zonotopic Kalman filter[J]. International Journal of Control, 2021, 94(6): 1641-1650.
- [25] You F Q, Zhang H L, Wang F L. A new set-membership estimation method based on zonotopes and ellipsoids[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2018, 40(7): 2091-2099.
- [26] Combastel C. A state bounding observer based on zonotopes[C]. Proceedings of European Control Conference. Cambridge: IEEE, 2003: 2589-2594.
- [27] Casau P, Rosa P, Tabatabaeipour S M, et al. A set-valued approach to FDI and FTC of wind turbines[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2015, 23(1): 245-263.
- [28] Tabatabaeipour S M. Active fault detection and isolation of discrete-time linear time-varying systems: A set-membership approach[J]. International Journal of Systems Science, 2015, 46(11): 1917-1933.
- [29] Chai W, Sun X F, Qiao J F. Set membership state estimation with improved zonotopic description of feasible solution set[J]. Intenational Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013, 23(4): 1642-1654.

作者简介

王子赞(1989—), 男, 副教授, 博士, 从事复杂非线性系统建模、滤波估计与故障诊断等研究, E-mail: wangzy0601@163.com;

张帅(1996—), 男, 硕士生, 从事复杂系统建模与滤波算法的研究, E-mail: shuaizhang@163.com;

占雅聪(1999—), 女, 硕士生, 从事滤波算法的研究, E-mail: zyacong@163.com;

王艳(1978—), 女, 教授, 博士生导师, 从事网络化控制系统、离散制造系统能效优化等研究, E-mail: yanwangjn@163.com;

纪志成(1959—), 男, 教授, 博士生导师, 从事制造物联集成与优化、新能源发电与控制等研究, E-mail: zcji@jiangnan.edu.cn.

(责任编辑: 闫 妍)