

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于分支定价算法的双层轿运车运输问题

迟居尚, 何世伟, 宋子龙, 薛守强, 冯骁

引用本文:

迟居尚, 何世伟, 宋子龙, 等. 基于分支定价算法的双层轿运车运输问题[J]. *控制与决策*, 2022, 37(1): 185–195.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0917>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 基于R2指标和目标空间分解的高维多目标粒子群优化算法

R2 indicator and objective space partition based many-objective particle swarm optimizer

*控制与决策*. 2021, 36(9): 2085–2094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0113>

### 需求波动下考虑乘运供应能力的网约车平台动态定价

Dynamic pricing for ride-hailing platform with demand fluctuation and supply capacity

*控制与决策*. 2021, 36(6): 1499–1508 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0881>

### 现货市场补充作用下基于总量折扣的运输服务采购问题研究

Transportation service procurement based on total discount under complementary effect of spot market

*控制与决策*. 2021, 36(11): 2794–2802 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0274>

### 考虑卸载顺序约束的成品油二次配送车辆路径问题

Vehicle routing problem of refined oil secondary distribution considering unloading sequence constraints

*控制与决策*. 2020, 35(12): 2999–3005 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1756>

### 复合类别航站楼分配问题的改进和声搜索算法

Solving composite airport gate allocation problem with improved harmony search

*控制与决策*. 2020, 35(11): 2743–2751 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0242>

# 基于分支定价算法的双层轿运车运输问题

迟居尚, 何世伟<sup>†</sup>, 宋子龙, 薛守强, 冯 晓

(北京交通大学 综合交通运输大数据应用技术交通运输行业重点实验室, 北京 100044)

**摘要:** 整车物流中双层轿运车运输问题属于一类需要考虑乘用车装载 (vehicle filling problem, VFP) 及轿运车路径规划 (vehicle routing problem, VRP) 的组合优化问题, 称此类问题为 VFRP (vehicle filling and routing problem)。由于 VFP 和 VRP 的问题复杂性均为 NP 完全问题 (non-deterministic polynomial complete problem, NPC), 且 VFRP 等组合优化问题模型的目标函数及约束往往具有非凸结构, 使得该类问题的线性化处理、精确算法的设计及求解效率的提升一直是该领域的研究难点。对此, 以轿运车使用成本最低为目标, 构建双层轿运车的 VFRP 模型, 在此基础上提出两种线性化方法并设计改进分支定价算法 (branch-and-price algorithm) 以求解: 在分支定价算法的基础上, 提出结合最为分数策略 (most-infeasible-branching strategy) 和强分支策略 (strong-branching strategy) 的分支策略, 以及在分支过程中降低可行域维度的降维方法以加速收敛。最后, 结合实际数据设计多组算例, 验证了所提出模型与算法的有效性。

**关键词:** 公路运输; 整车物流; 双层轿运车运输; 模型线性化; 列生成算法; 分支定价算法

中图分类号: U492.2

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0917

开放科学 (资源服务) 标识码 (OSID):



**引用格式:** 迟居尚, 何世伟, 宋子龙, 等. 基于分支定价算法的双层轿运车运输问题 [J]. 控制与决策, 2022, 37(1): 185-195.

## Optimization of double stack car carriers transportation problem based on branch-and-price algorithm

CHI Ju-shang, HE Shi-wei<sup>†</sup>, SONG Zi-long, XUE Shou-qiang, FENG Xiao

(Key Laboratory of Transport Industry of Big Data Application Technologies for Comprehensive Transport Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** The double stack car carriers transportation problem of vehicle logistics belongs to a kind of combinatorial optimization problem that needs to consider the vehicle filling problem (VFP) and vehicle routing problem (VRP), which is called vehicle filling and routing problem (VFRP). Because the complexity of the VFP and VRP is NPC (non-deterministic polynomial complete problem), and the objective functions and constraints of models of the VFRP and other combinatorial optimization problems often have nonconvex structure, the linearization, the design of accurate algorithms and the improvement of solution efficiency are always the difficulties in this field. Therefore, a VFRP model of double stack car carriers transportation is constructed, aiming at the lowest cost of car carriers transportation. On this basis, two linearization methods are proposed, and an improved branch-and-price algorithm is designed to solve the problem: on the basis of branch-and-price algorithm, a branch strategy of combining the most-infeasible-branching strategy and the strong-branching strategy, and a dimension reduction method of reducing the feasible region's dimension, are proposed to accelerate convergence. Finally, examples with actual data are designed, which verify the effectiveness of the model and the algorithm.

**Keywords:** highway transportation; vehicle logistics; double stack car carriers transportation; model linearization; column generation algorithm; branch-and-price algorithm

## 0 引言

整车物流问题中待运输的整车 (轿车) 称为乘用车, 用于运输整车的大型车辆称为轿运车。整车物流

中轿运车运输是指, 物流公司根据订单进行乘用车装载 (vehicle filling problem, VFP: 根据各地需求, 选择使用不同规格轿运车并装载多类型乘用车的问题,

收稿日期: 2020-07-07; 修回日期: 2020-10-14.

基金项目: 国家重点研发计划项目 (2018YFB1201402); 国家自然科学基金面上项目 (62076023); 一汽物流有限公司项目 (YQWLJS201907161).

责任编辑: 龙建成.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: shwhe@bjtu.edu.cn.

可类比三维装载问题)以及轿运车路径规划(vehicle routing problem, VRP: 轿运车从始发地出发, 根据运输需求将乘用车运送到各需求地并返回始发地的路线设计优化问题), 二者的组合优化问题为一类 VFRP (vehicle filling and routing problem). 轿运车运输过程中有多种轿运车用于运输, 多种乘用车待运输, 具体轿运车选择、装载、走行、卸载方案待规划. 设计良好的综合运输方案能降低轿运车购置、人力及燃料成本. 《汽车、挂车及汽车列车外廓尺寸、轴荷及质量限值》(GB1589-2016) 的发布降低了单个轿运车允许装载的乘用车数量, 因此, 获取更优的装载及路径规划方案较以往实用价值更大.

VFRP 的两个子问题 VFP 和 VRP 都为 NPC 类问题. 就 VFP 的求解方法而言: 覃亮等<sup>[1]</sup> 及王文宪等<sup>[2]</sup> 枚举了所有装载方案, 配合求解器计算各方案使用数量; 但孙军艳等<sup>[3]</sup> 指出, 算法中枚举法(预处理)耗时过长, 而遗传算法在精度上与求解器结果接近且耗时远小于枚举法, 普适性更强. 轿运车运输问题的 VRP 在不考虑具体装载方案的前提下, 与带容量约束的车辆路径问题 (capacitated vehicle routing problem, CVRP) 类似, 以往研究者主要使用智能算法求解 CVRP, 常用的有禁忌搜索算法<sup>[4]</sup>、蚁群算法<sup>[5]</sup>、粒子群算法<sup>[6]</sup> 等, 其中 Reed 等<sup>[5]</sup> 通过对需求地做聚类分析降低问题规模. 就分支定价算法在类似问题上的应用而言: Ben 等<sup>[7]</sup> 使用分支定价算法求解容器预分组问题; Brink 等<sup>[8]</sup> 使用分支定价算法求解 VRPTW; Christiansen 等<sup>[9]</sup> 使用分支定价算法求解 CVRP. 可见, 分支定价算法已应用于 VFRP 子问题的相关研究. 基于以往对 VFRP 两子问题的不同解决方法, 以及整车物流工作的顺序性(先装载再做路径规划), 人们通常采用两类方法对轿运车运输问题 (VFRP) 做组合优化: 一是以枚举法求解 VFP, 以实地工作方法求解 VRP, 即将无法满载运输的乘用车并入下一需求地, 逐个计算各需求地的装载方案及使用次数, 如谢晓等<sup>[10]</sup> 根据运输网络给出多个需求地集合, 允许轿运车在集合内进行多次卸车作业, 但其仅根据给定路径图人工划分需求地, 普适性有待提升; 二是根据整车物流规划工作的顺序性, 使用智能算法求解 VFP, 设计启发式路径搜索规则<sup>[11]</sup> 或贪心算法<sup>[12]</sup> 计算 VRP, 该类方法缺乏有效对比, 无法保证结果的准确性. 国内外学者在处理以上问题时, 鉴于问题的复杂性多采用启发式算法, 缺乏对原模型的线性化处理方面的论述, 且精确算法研究较少. 因此, 对 VFRP 模型的线性化推导及精确算法的应用研究能够弥补

以往研究空缺, 在实际应用中提供更优方案, 降低企业成本, 具有一定的理论意义和实用价值. 本文针对以往 VFRP 研究的缺陷, 提出轿运车运输模型 (VFRP) 的两种线性化方法并使用改进分支定价算法求解.

列生成算法是处理线性规划问题的算法, 具有结果准确、规模可控的优点, 适用于求解大规模或需要同时处理多类变量的线性规划问题. 对于决策变量为整数的问题, 列生成算法可以结合分支定界算法求解, 即使用列生成算法获得线性规划解, 基于分支定界算法原理获得整数解(该方法称为分支定价算法 (branch-and-price algorithm)). 在面对复杂模型或模型变量数过多时, 求解器可能无法求解. 针对求解器的缺陷, 人们基于分支定价算法原理转换模型以加速求解, 如: Cacchiani 等<sup>[13]</sup> 分别使用启发式算法、分支定价及割平面算法获得铁路时刻表编制问题的整数解; Yu 等<sup>[14]</sup> 使用分支定价算法求解绿色车辆路径问题, 并使用取分支变量为整数而非逐次迭代的分支方法, 提高了迭代速度, 但无法保证结果的准确性; 兰泽康等<sup>[15]</sup> 设计了列车运行路线优化问题的分支定价算法, 使用伪费用的分支策略进行分支; 揭婉晨等<sup>[16]</sup> 及王建军等<sup>[17]</sup> 使用 D-W 分解转换原问题以获得限制主问题及子问题, 设计公式计算各变量权重以在分支过程中选择单一变量进行计算以分支, 运行速度较快, 但无法保证每层都选择最优节点进行分支. 就存在多个子问题的复杂问题而言, 即使设计综合优化模型, 也常常因为模型非凸而无法求解, 亦无法使用 D-W 分解获得限制主问题及子问题. 故以往人们在处理该类问题时, 常基于列生成算法原理, 将多个原问题转化为列生成算法的限制主问题与子问题, 如: Valouxis 等<sup>[18]</sup> 及 Himmich 等<sup>[19]</sup> 将车辆的使用规划与司机的工作规划组合为同一问题, 基于列生成算法原理, 配合启发式算法获得整数解, 省去了分支定价部分, 但无法保证得到的整数解的准确性; Yan 等<sup>[20]</sup> 将人员的工作安排 (crew scheduling) 及排班 (crew rostering) 组合为同一问题, 但其仅在列生成算法求得解后, 使用分支定界算法进一步调整解为整数, 并未考虑分支后产生新变量的可能, 无法保证结果的准确性. 基于前人研究可知, 分支定价算法可用于求解含有多个子问题的组合优化问题, 准确性较高, 但目前尚未发现使用分支定价算法求解 VFRP 的先例.

综上所述, 分支定价算法适用于处理属于 VFRP 的轿运车运输问题. 本文在前人研究<sup>[11]</sup> 基础上, 设计轿运车运输问题的综合优化模型, 并提出基于公式

推导及配合启发式策略的两种模型线性化方法. 在列生成算法的基础上, 使用分支定价算法得到整数解并设计启发式算法调整轿运车使用比例, 得到最终结果, 其中分支定价算法部分根据变量特性设计更适分支策略, 并提出能够有效降低分支树层数的加速策略, 以在保持模型凸性的前提下, 提高运行速度, 降低计算规模. 通过算例表明本文所提出的分支定价算法具有处理一定规模问题的能力, 能够得到较高质量解. 相比于直接使用求解器计算, 本文算法结果较优且运行时间远低于求解器计算时间; 相比于使用枚举法获得所有可行方案的算法, 本文算法不需要前期处理(枚举), 且能够更好地处理路径问题, 普适性更强; 相比于智能算法, 本文算法结果更优且运行时间始终可以接受.

### 1 问题描述及模型设计

#### 1.1 问题描述

整车物流公司每周根据厂家订单组织运输, 运输网络由一始发地及多个需求地组成, 轿运车可以根据安排从始发地发往一需求地或多需求地, 完成运输后轿运车需返回始发地, 运输网络如图1所示.

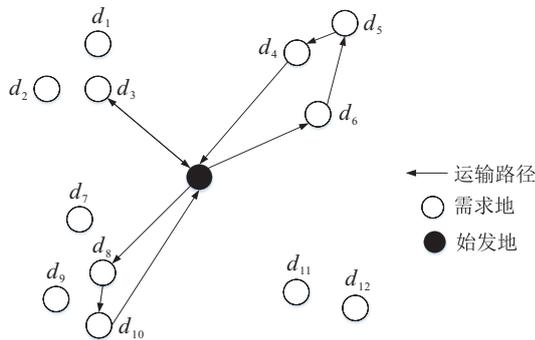


图1 运输网络示意图

本问题可以描述为由单一始发地向多个需求地配送乘用车, 其中存在多种用于配送的轿运车, 需配送的乘用车亦有不同种类. 负责运输的轿运车由运输公司自行组织, 全部位于始发地, 目前, 国内使用的轿运车均为双层单排(每辆轿运车设有两层车板

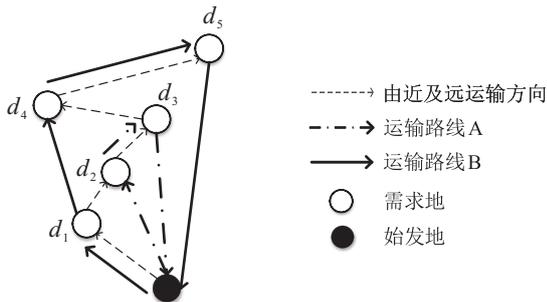


图2 运输路径示意图

以装载乘用车, 每层只能装载一排乘用车), 各类尺寸不同, 因高度问题只能装载在下层的乘用车数量极少. 整车物流公司为了最高效装载, 对不同品牌及尺寸的乘用车进行混合装载(混载), 为降低油耗, 避免迂回运输(携带货物运输油耗更高), 要求运输顺序为由近及远, 如图2所示.

#### 1.2 模型假设

本文对模型做以下假设:

假设1 始发地有足够数量轿运车;

假设2 所有轿运车完成装载后同时发出, 卸载耗时不计, 即不考虑时间约束;

假设3 所有轿运车完成运输后空载返回始发地;

假设4 不存在高度超高的乘用车, 即乘用车高度不影响装载;

假设5 轿运车在一个地点卸载的乘用车数量不影响成本.

#### 1.3 模型及参数定义

各符号及含义如表1所示.

表1 符号说明

符号	含义
$I = \{i   i = 1, 2, \dots, Q\}$	轿运车类型集合
$Q$	轿运车种类数量
$d_{mn}$	点 $m$ 至点 $n$ 的距离
$G_n$	点 $n$ 可发往地点集合
$c_i$	$i$ 类轿运车的使用成本
$R_i = \{j   j = 1, 2, \dots, J_i\}$	$i$ 类轿运车集合
$J_i$	$i$ 类轿运车可用总数
$P = \{p   p = 1, 2, \dots, M\}$	乘用车类型集合
$M$	乘用车种类数量
$l_p$	$p$ 类乘用车长度
$t_{ih}$	$i$ 类轿运车第 $h$ 层的长度, 考虑乘用车固定间隔
$n_{ih}$	$i$ 类轿运车第 $h$ 层的可装载乘用车数
$\alpha_i$	$i$ 类轿运车期望使用比例
$N$	需求地数量
$D_{np}$	$n$ 点对 $p$ 类乘用车的需求数量
$U_{ij}$	0-1 变量, 若为 1 则表示使用 $i$ 类 $j$ 号轿运车
$X_{ij}^{mn}$	0-1 变量, 若为 1 则表示 $i$ 类 $j$ 号轿运车从 $m$ 点运行到 $n$ 点
$W_{ij}^{hp}$	$i$ 类 $j$ 号轿运车第 $h$ 层装载的 $p$ 类乘用车数量
$V_{ij}^{np}$	$i$ 类 $j$ 号轿运车在 $n$ 点卸载的 $p$ 类乘用车数量

原模型M1为

$$\min \left( \sum_{m=0}^N \sum_{n=1}^N d_{mn} \sum_{i=1}^Q c_i \sum_{j=1}^{J_i} U_{ij} X_{ij}^{mn} \right). \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{p=1}^M W_{ij}^{hpl} \leq t_{ih}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, h = 1, 2; \quad (2)$$

$$\sum_{p=1}^M W_{ij}^{hpl} \leq n_{ih}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, h = 1, 2; \quad (3)$$

$$\sum_{h=1}^2 W_{ij}^{hpl} = \sum_{n=1}^N V_{ij}^{np}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, \forall p \in P; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^{J_i} U_{ij} \sum_{n=1}^N V_{ij}^{np} = \sum_{n=1}^N D_{np}, \quad \forall p \in P; \quad (5)$$

$$\alpha_i \sum_{j=1}^{J_i} U_{ij} = \sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^{J_i} U_{ij}, \quad \forall i \in I; \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^{N+1} X_{ij}^{0n} = 1, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i; \quad (7)$$

$$\sum_{m=0}^N X_{ij}^{mN+1} = 1, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i; \quad (8)$$

$$\sum_{m=0}^N X_{ij}^{mn} - \sum_{g \in G_n} X_{ij}^{ng} = 0, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, \forall n \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad (9)$$

$$\sum_{m=0}^N \sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^{J_i} X_{ij}^{mn} V_{ij}^{np} = D_{np}, \quad \forall p \in P, \forall n \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad (10)$$

$$U_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i; \quad (11)$$

$$X_{ij}^{mn} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, \quad \forall m \in \{0, 1, \dots, N\}, \forall n \in \{1, 2, \dots, N+1\}; \quad (12)$$

$$W_{ij}^{hpl} \in \mathbf{N}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, \forall h \in \{1, 2\}, \forall p \in P; \quad (13)$$

$$V_{ij}^{np} \in \mathbf{N}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall p \in P. \quad (14)$$

其中: 式(1)为目标函数,表示轿运车使用成本最低;式(2)为装载长度约束;式(3)为乘用车装载数约束;式(4)表示轿运车装载的乘用车由其上下两层车板装载的乘用车组合而成;式(5)为需求约束,表示装载量满足需求;式(6)为轿运车比例约束,通过设置各种轿运车使用量占总使用轿运车量的比例约束,体现各类轿运车保有量不同的情况;式(7)~(9)为回路约束,所有轿运车必须从0点出发,返回 $N+1$ 点,完成一个回路表示任务结束,只能由近及远运输;式(10)表示卸

载量满足需求;式(11)~(14)表示变量约束.

## 2 求解策略

M1综合考虑了轿运车的选择、卸载(装载)及路径规划,但模型具有非凸结构无法计算,分析以上各式可知,模型中耦合部分(分别为目标函数、需求约束、卸载约束)变量相乘是模型非凸的原因.本节将分别使用公式推导、配合启发式策略的方法将模型线性化,之后讨论模型的D-W分解以及分支定价算法的应用.

### 2.1 公式推导线性化模型

#### 2.1.1 目标函数线性化推导

式(1)中两个0-1变量相乘是导致该式非线性的原因,故本文增设一个新的0-1变量 $F_{ij}^{mn} = U_{ij} X_{ij}^{mn}$ 来替代原式中相乘的两个变量,同时增设如下两个约束以保证变量替代后不影响模型含义:

$$U_{ij} - (1 - X_{ij}^{mn}) \leq F_{ij}^{mn} \leq U_{ij}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall n \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad (15)$$

$$X_{ij}^{mn} - (1 - U_{ij}) \leq F_{ij}^{mn} \leq X_{ij}^{mn}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall n \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (16)$$

变量约束为

$$F_{ij}^{mn} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall n \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (17)$$

#### 2.1.2 需求约束线性化推导

式(5)非线性原因在于式中0-1变量乘以整数变量,即 $U_{ij} \sum_{n=1}^N V_{ij}^{np}$ ,故本文增设两个整数变量: $G_{ij}^p = \sum_{n=1}^N V_{ij}^{np}$ ,  $H_{ij}^p = U_{ij} G_{ij}^p$ .可见变量 $H_{ij}^p$ 取值由变量 $U_{ij}$ 和 $G_{ij}^p$ 取值决定, $U_{ij} = 0$ 则 $H_{ij}^p = 0$ ,否则 $H_{ij}^p = G_{ij}^p$ .由前文式(3)、(4)、(14)可知整数变量 $V_{ij}^{np}$ 的定义域,继而推导变量 $G_{ij}^p$ 的取值范围为

$$0 \leq G_{ij}^p \leq 2N \times \max\{n_{i0}, n_{i1}\}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, \forall p \in P. \quad (18)$$

得到变量 $G_{ij}^p$ 的取值范围后,可通过下式保证替代变量后不影响模型含义:

$$0 \times U_{ij} \leq H_{ij}^p \leq 2N \times \max\{n_{i0}, n_{i1}\} \times U_{ij}, \quad \forall i \in I, \forall j \in R_i, \forall p \in P; \quad (19)$$

$$-2N \times \max\{n_{i0}, n_{i1}\} \times (1 - U_{ij}) + G_{ij}^p \leq H_{ij}^p \leq 0 \times (1 - U_{ij}) + G_{ij}^p,$$

$$\forall i \in I, \forall j \in R_i, \forall p \in P. \quad (20)$$

变量约束为

$$G_{ij}^p \in N, \forall i \in I, \forall j \in R_i, \forall p \in P; \quad (21)$$

$$H_{ij}^p \in N, \forall i \in I, \forall j \in R_i, \forall p \in P. \quad (22)$$

### 2.1.3 卸载约束线性化推导

式(10)结果与式(5)类似,此处不再赘述推导过程. 设变量  $Z_{ij}^{mnp} = X_{ij}^{mn} V_{ij}^{np}$  以及下述各式:

$$0 \times X_{ij}^{mn} \leq Z_{ij}^{mnp} \leq 2 \times \max\{n_{i0}, n_{i1}\} \times X_{ij}^{mn},$$

$$\forall i \in I, \forall j \in R_i, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$\forall n \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall p \in P; \quad (23)$$

$$-2 \times \max\{n_{i0}, n_{i1}\} \times (1 - X_{ij}^{mn}) + V_{ij}^{np} \leq$$

$$Z_{ij}^{mnp} \leq 0 \times (1 - X_{ij}^{mn}) + V_{ij}^{np},$$

$$\forall i \in I, \forall j \in R_i, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$\forall n \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall p \in P; \quad (24)$$

$$Z_{ij}^{mnp} \in N, \forall i \in I, \forall j \in R_i, \forall m \in \{1, 2, \dots, N\},$$

$$\forall n \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall p \in P. \quad (25)$$

将原耦合约束用以下公式替代:

$$\min \left( \sum_{m=0}^N \sum_{n=1}^N d_{mn} \sum_{i=1}^Q c_i \sum_{j=1}^{J_i} F_{ij}^{mn} \right); \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^{J_i} H_{ij}^p = \sum_{n=1}^N D_{np}, \forall p \in P; \quad (27)$$

$$\sum_{m=0}^N \sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^{J_i} Z_{ij}^{mnp} = D_{np}, \forall p \in P,$$

$$\forall n \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (28)$$

并增设式(15)~(25)即可得到线性化模型. 以上论述虽然在保留M1含义的基础上将其线性化,但并不能降低问题规模,而且该模型求解时存在轿运车数量取值困难等问题,可见,以上线性化论述的理论意义高于实际价值. 下文将就使用分支定价算法求解VFRP问题展开论述.

## 2.2 配合启发式规则线性化模型

列生成算法将原问题分为限制主问题及子问题: 限制主问题是指给定部分原问题中的系数得到的问题,子问题则用于生成新的系数(列). 列生成算法通过不断迭代增加系数(列)求解原问题. 下文将在M1的线性化处理中,选定部分变量作为限制主问题系数,通过子问题更新系数(M1中决策变量).

根据问题描述部分可知,轿运车运输公司要求轿运车按由近及远的规则运输,如图2所示. 本文基于分治的思想及列生成算法原理,根据距离将需求地进行分区: 在图1运输网络的基础上,本文以聚类分析的方法将距离较近的需求地并入同一集合,允许轿运

车在集合内多点间进行运输,如图3所示. 集合内行走路径(运输顺序)按照轿运车运输公司要求,定为由近及远,同时在进行计算时,优先计算直达运输方案(以体现直达方案优于多点运输方案). 该举措能够在满足式(7)~(9)的前提下,减少不满载运输距离,同时消去变量  $X_{ij}^{mn}$ .

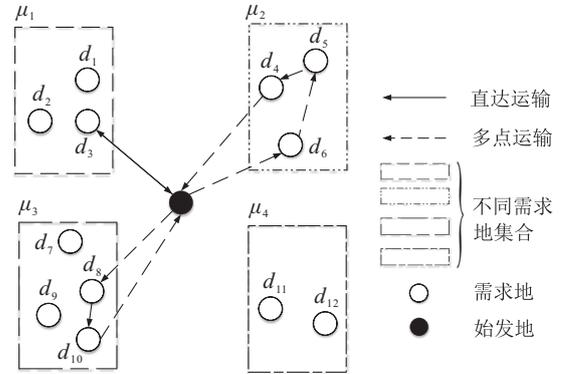


图3 需求地聚类示意图

列生成算法允许通过迭代添加更多列,故其限制主问题中所有列(某固定装载方案的轿运车)都可视为被使用( $U_{ij} = 1$ ),但由于列生成算法用于处理线性规划问题,即使在子问题中生成特定类型系数,也无法控制限制主问题中该类系数所对应的决策变量值. 应用到本问题中,可视为无法在迭代过程中控制不同类型轿运车使用比例(满足式(6)). 因此,本文在列生成算法中使用一类轿运车,仅不同装载方案( $V_{ij}^{np}$ )的使用次数不同,而后通过启发式算法在不影响解的前提下满足式(6). 为实现该目标,本文设决策变量  $S_k$  表示某已固定装载方案的轿运车的使用次数,以不同装载方案  $k$  进行区分. 式(5)可做如下处理:

$$\sum_{i=1}^Q \sum_{j=1}^{J_i} U_{ij} \sum_{n=1}^N V_{ij}^{np} = \sum_{n=1}^N V_{ij}^{np}, \forall p \in P, \quad (29)$$

从而转化为

$$\sum_{n=1}^N V_{ij}^{np} = \sum_{n=1}^N D_{np}, \forall p \in P. \quad (30)$$

在满足以上前提时,式(30)与(10)重合,故进一步去除式(30). 同时,根据式(4)可对M1中装载约束做进一步调整(选取上下车板长度相同的轿运车,故  $t_1 = t_2 = t, n_1 = n_2 = n$ ),有

$$\sum_{p=1}^M l_p (W_k^{1p} + W_k^{2p}) \leq 2 \times t, \forall k \in K,$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M l_p V_k^{np} \leq 2 \times t, \forall k \in K; \quad (31)$$

$$\sum_{p=1}^M W_k^{1p} + \sum_{p=1}^M W_k^{2p} \leq 2 \times n, \forall k \in K,$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M V_k^{np} \leq 2 \times n, \forall k \in K. \quad (32)$$

从而得到将M1转换后的模型M2,即

$$\min \left( \sum_{k=1}^K cS_k \right). \quad (33)$$

$$\text{s.t.} \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M l_p V_k^{np} \leq 2 \times t, \forall k \in K; \quad (34)$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M V_k^{np} \leq 2 \times n, \forall k \in K; \quad (35)$$

$$\sum_{k=1}^K V_k^{np} S_k = D_{np}, \forall p \in P, \quad (36)$$

$$\forall n \in \{1, 2, \dots, N\};$$

$$V_k^{np} \in \mathbf{N}, \forall k \in K, \quad (37)$$

$$\forall n \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall p \in P;$$

$$S_k \in \mathbf{N}, \forall k \in K. \quad (38)$$

### 2.3 D-W分解

M2中仅有单一个耦合约束(36),故可对其进行D-W分解以获取线性化的限制主问题及子问题.

#### 2.3.1 限制主问题构建

设当前已知有K个不同装载方案,将原问题松弛为线性规划问题后,得到限制主问题M3,即

$$\min \left( \sum_{k=1}^K cS_k \right). \quad (39)$$

$$\text{s.t.} \sum_{k=1}^K V_k^{np} S_k = D_{np}, \forall p \in P, \quad (40)$$

$$\forall n \in \{1, 2, \dots, N\};$$

$$S_k \geq 0, \forall k \in K. \quad (41)$$

其中:  $V_k^{np}$  为参数,  $V_k^{np} \in \mathbf{N}$ , 可通过子问题计算获得; 式(40)与(36)对应.

#### 2.3.2 子问题构建

本文通过聚类需求地并定义由近及远的运输方式体现路径约束,此处阐述其在子问题中的具体实现方式. 记各个需求地为多个子集,得到需求地集合  $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N, \mu_{N+1}, \dots, \mu_{N+Z}\}$ . 该集合中子集可分为两部分:第1部分子集  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$  为直达点集合,每个子集内只有一个需求地;第2部分子集  $\{\mu_{N+1}, \mu_{N+2}, \dots, \mu_{N+Z}\}$  为多点运输集合,根据运输网络共可划分Z个需求地集合,每个子集内根据聚类情况有多个需求地.列生成算法允许子问题多次计算以向规模较大的限制主问题中添加多列,故以上集合设计方法能够在不占用太多资源的前提下,进一步

降低轿运车的不满载运输距离.

设计子问题以向限制主问题中添加使检验数  $\delta$  (与单纯形法检验数计算公式相同)最小的新方案(第  $K + 1$  个)来优化目标值. 当  $\delta < 0$  时,表明新增列能够使限制主问题目标函数进一步降低;反之则代表已求得最优解.子问题模型M4如下所示:

$$\min \delta = \left( c - \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M \beta_{np} V_{K+1}^{np} \right). \quad (42)$$

s.t.

$$\sum_{n \in \mu_j} \sum_{p=1}^M l_p V_{K+1}^{np} \leq 2 \times t, \forall k \in K; \quad (43)$$

$$\sum_{n \in \mu_j} \sum_{p=1}^M V_{K+1}^{np} \leq 2 \times n, \forall k \in K; \quad (44)$$

$$V_{K+1}^{np} \in \mathbf{N}, \forall p \in P, \forall n \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (45)$$

其中  $\beta_{np}$  为限制主问题中各约束的影子价格.

## 3 分支定价算法

前文已将无法直接求解的复杂模型M1转换为能够通过列生成算法求解的线性规划问题M3和M4.但列生成算法得到的解为线性规划解 ( $S_k \geq 0$ ),而方案的使用次数应为正整数 ( $S_k \in \mathbf{N}$ ).因此,使用列生成算法求解并得到最优解后,还需要进一步调整解为整数,本文使用分支定价算法完成该步骤.

### 3.1 变量特性分析

分支定价算法与分支定界算法类似,不同点在于分支定价算法的节点使用列生成算法求解,计算后可能产生新变量,使分支树每层需计算节点数可能随着分支树的加深而增多,每层计算时间随之提升.同时,本文算法不同于文献[13-20]中算法,并非由0-1整数规划松弛得到,变量无法通过一次分支得到整数值,如图4所示,即本文算法较文献[13-20]更难得到整数解.

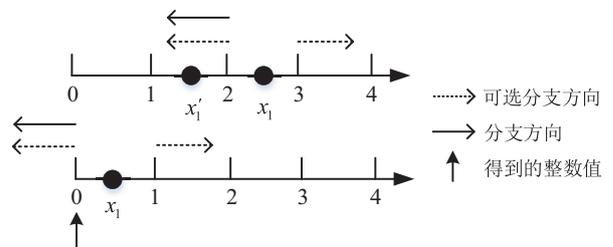


图4 变量特性示意图

本文基于变量特性,设计改进分支定价算法以进行求解:参考文献[21]中总结的节点搜索策略及分支策略并从中选择更适本文算法的策略加以创新,以保证结果准确性的前提下加速收敛,同时基于已有的分

支策略及单纯形法进出基的原理设计以降低可行域维度为目的的降维方法,减少每层需计算的节点数,提高收敛速度.

### 3.2 节点搜索策略及分支策略

就节点搜索策略而言,需要在兼顾准确性的前提下尽快改进下界解以减少分支树层数,不应为提高计算速度而省去对每层各节点各分支目标函数值的计算.故本文节点搜索策略选择最佳优先搜索策略(best-first-search strategy):每层选择目标函数值最优的节点进行分支<sup>[21]</sup>.

就分支策略而言,本文算法每层节点数较多且随着分支树的加深节点数可能增加,故本文在无法预测节点上下分支孰优孰劣,多节点目标函数值可能相同(列生成算法允许生成新的变量)的前提下,提出使用结合最为分数(most-infeasible-branching)<sup>[21]</sup>及强分支(strong-branching)<sup>[21]</sup>的分支策略以满足算法需求.具体处理方法为:设 $x_n$ 为分支树当前层 $n$ 号节点目标值, $G$ 为可分支节点集, $n \in G$ ,存在上下两分支方向供选择( $x_n \leq \lfloor x_n \rfloor, x_n \geq \lceil x_n \rceil$ ),为得到最适分支节点,计算每层节点 $x_n$ 上下两支目标函数值 $Z_n^+$ 和 $Z_n^-$ 后,取该节点目标值 $Z_n = \min\{Z_n^+, Z_n^-\}$ .当变量上下支目标函数值相同时,为加速收敛选择下支( $Z_n = Z_n^-$ ),即 $x_n \leq \lfloor x_n \rfloor$ ,将完成计算与筛选的节点目标值(线性规划解)记入集合 $D$ 中.当多个节点目标函数值相同时,从中选择判别数 $\varepsilon$ 最小的节点进行分支(即最“接近0.5”),计算公式为

$$\varepsilon = |x_n - \lfloor x_n \rfloor - 0.5|. \quad (46)$$

本文提出的分支策略适用于难以找到应优先分支的变量且多个变量值可能相同的情况.

遍历分支树全部空间通常耗时难以接受,故本文算法终止条件除按照以上节点选择及分支策略得到最优整数解外,另设优化程度 $\rho$ ,即

$$\rho = (U - L)/L. \quad (47)$$

其中: $L$ 为下界解, $U$ 为上界解.当 $\rho \leq 5\%$ 时终止计算.

### 3.3 降维方法

前文论述的节点搜索策略及分支策略可以保证兼顾准确性前提下的算法收敛速度,但是由于分支定价算法特性,可行域维度及每层需要计算的节点数较大,这也导致了计算时间的增多,或可接受时间内计算的问题规模的降低.因此,本文提出以下降维方法以降低可行域维度,减少每层计算的节点数.

分支定价算法与分支定界算法相比优点在于其

结果较优,缺点在于收敛速度较慢,且每层的计算时间随着生成变量数的增多而提高.而分支定界算法中常用的方法无法解决分支定价算法特性带来的计算时间延长这一负面效应.列生成算法通过限制主问题及子问题的设置可以完成单纯形法进基的步骤,但是,随着运算的进行大量变量可能不会在结果中出现,即变量值取0.因此,本文基于分支定界算法中伪费用的分支策略(pseudocost-branching strategy)思想<sup>[21]</sup>(因本文算法每层各节点目标函数值可能相同,伪费用的分支策略并不适合,故采用前文所述分支策略)及单纯形法的进出基步骤,提出一种尽可能利用之前分支结果以加速收敛的改进分支定价算法,即:在选择分支节点后,将该节点中值为0的变量视为出基变量,将其值记为0,避免再次对其分支.该方法通过在分支过程中添加额外的约束,保证搜索方向的一贯性,能够在不影响运输方案使用的前提下,提高迭代速度.

## 4 算法实现步骤

除前文已说明参数外,设 $\Omega$ 为方案集合, $Y$ 为列生成算法解集,节点 $n$ 的最优目标函数值为 $Z_n$ , $Y_n$ 为对 $Y_n^+, Y_n^-$ 筛选后得到的解集,因分支而新增约束集为 $C$ .

step 1: 初始化及生成初始解.按照各需求地坐标进行聚类分析,生成集合 $\mu$ ,以最长车板数据作为计算用数据,按长尺寸乘用车优先装载的原则对各需求地乘用车进行装车作业,将各装载方案去重后录入 $\Omega$ .每地无法满载运输的乘用车并入邻近需求地,若无邻近需求地则尽量装载,算法目标值作为 $U$ 初始值.设 $L = 0, G = \emptyset, C = \emptyset$ ,转step 2.

step 2: 限制主问题计算.以 $\Omega$ 内元素为系数, $C$ 为分支约束,更新对偶变量解 $\beta_{np}$ .若 $C = \emptyset$ ,则更新解集 $Y$ ,目标函数值 $Z, L = Z$ ;若 $C \neq \emptyset$ ,则按分支情况记目标函数值为 $Z_n^+$ 或 $Z_n^-$ ,解集为 $Y_n^+$ 或 $Y_n^-$ ,转step 3.

step 3: 子问题计算.计算检验数 $\delta, \delta \geq 0$ 时,转step 4,否则将子问题解加入 $\Omega$ 并去重(防止增加相同方案导致约束无效),转step 4;

step 4: 路径约束实现.若 $j = N + Z$ (已遍历集合 $\mu$ ),则转step 5;否则 $j = j + 1$ ,转step 3.

step 5: 分支.从 $Y$ 中筛选非整数解加入 $G$ ,对 $G$ 中元素分上下两支,将约束分别加入 $C$ ,转step 2.计算后去除 $C$ 中新增约束,取该节点目标函数值为 $Z_n = \min\{Z_n^+, Z_n^-\}$ ,相同则取 $Z_n^-$ ,同理取 $Y_n$ ,将以上结果加入到集合 $D$ 中.若 $D$ 中存在整数解,则转step 7;若

无整数解,则转 step6.

step 6: 节点选择. 按照最佳优先搜索策略,选择  $D$  中  $Z_n$  最小的节点继续分支,更新  $L = Z_n$ . 若  $D$  中存在多个目标值同为最小值的节点,则取其中判别数  $\varepsilon$  最小的节点继续分支,将该节点对应的分支约束加入约束集合  $C, Y = Y_n$ , 其余节点剪支. 将该节点解中所有为0的变量记为0,转 step 5.

step 7: 终止条件. 若  $\rho \leq 5\%$ , 或  $Z_n$  为该层最优解,则满足终止条件,结束计算,输出上界解  $U = Z_n$ , 解集  $Y = Y_n$ , 转 step 8; 若不满足以上条件,则  $U = Z_n$ , 转 step 6.

step 8: 轿运车使用比例控制. 将  $Y$  中结果按照终到地距始发地距离排序,提取所有路线相同的轿运车并拆分为车板,转而以车板比例体现轿运车种类比例约束,即:根据乘用车总数及轿运车期望使用比例  $\alpha_i$  计算各类型车板  $j$  期望使用数量,设  $g_j$  为车板  $j$  承载乘用车数量. 循环从  $g_j$  个选定(最长)车板中各抽取一辆乘用车,在满足约束(2)和(3)的前提下,组成一新车板,车板  $j$  使用数量满足约束时,更新  $j$ . 完成后,将轿运车车板两两重新组合为轿运车.

## 5 算例分析

算法在 Visual Studio 2019 平台实现,使用 C# 语言进行编程,其中线性规划问题采用 ILOP Cplex 12.9 求解,子问题采用动态规划求解,CPU 为 Intel(R) Core(TM) i9-9800H CPU @2.30 GHz,内存 32 G.

### 5.1 实验结果及分析

为保证实验的真实性,本文算例中轿运车及乘用车尺寸为网络真实数据,其中轿运车尺寸选择国内标准的三类轿运车,可视为两种车板,可装载长度为 18 100 mm 以及 13 750 mm.

#### 5.1.1 与求解器对比

前文已对线性化模型的规模做了分析,本节将求解器结果与本文提出的改进分支定价算法结果做对

比. 为保证数据结果的真实性,本节中需求地位置及需求数量数据源自 Solomon 数据集,设需求 5 种乘用车,计算结果如表 2 所示,其中求解器仅能处理 5~15 个需求地的问题.

表 2 与求解器对比

需求地数量	分支定价	分支定价 运行时间/s	求解器解	求解器 运行时间/s
5	145	55.5	143	913.1
10	372	81.0	359	1 124.0
15	426	132.1	402	1 520.7

由对比结果可见,本文提出的分支定价算法结果与求解器结果相近,能够得到满意解,而求解器计算时间远高于分支定价算法运行时间,且随着问题规模的小幅度提高,求解器计算时间的提高幅度较大,当问题规模提高到 15 个需求地以上时,求解器无法求解该问题,从而表明本文算法在求解效率上优于求解器,能够处理较大规模问题且能够得到满意解.

#### 5.1.2 算法性能分析

就需求地位置及需求而言,实际环境下各周期各需求地对不同乘用车的需求不同,且各周期需求地不固定(需求地位置会产生变化). 因此,本文算例中设乘用车需求量及各需求地位置为随机数:每种乘用车需求量为 0~50 辆,各需求地位置在 100 km×100 km 区域内随机生成,允许轿运车在距离 20 km 以内需求地之间进行多次卸车作业.

本文根据实际情况下问题规模,取 5 种乘用车,10~250 个需求地分别进行计算以显示算法的计算性能,并将结果与本文根据实地工作经验设计的启发式算法(启发式算法来源于一汽物流实际应用项目,为公司所采纳)进行对比. 为方便分析,计算结果显示为一类轿运车,其中设优化水平 = (启发式算法目标值 - 分支定价算法目标值)/启发式算法目标值,保留小数点后 3 位,计算结果如表 3 所示.

表 3 算法计算结果

需求地数量	分支定价解	分支定价 运行时间/s	启发式解	启发式 运行时间/s	优化水平
10	182	81.0	210	19.0	0.099
40	635	323.1	699	37.4	0.092
70	879	582.7	971	40.3	0.095
100	1 678	834.4	1 863	45.2	0.099
130	2 008	1 098.3	2 272	54.1	0.116
160	2 831	1 499.5	3 230	66.3	0.124
190	3 443	1 790.2	3 921	82.3	0.122
220	4 013	2 251.6	4 809	101.6	0.167
250	4 479	2 754.8	5 437	123.2	0.176

由表3结果可知,本文算法能够在一定时间内处理较大规模的轿运车运输问题,虽然运行时间高于启发式算法,但本问题属于周期性计算问题,求解大规模问题的运行时间可以接受.启发式算法解与分支定价算法解的对比情况如图5所示(5.3小节将就本文提出的加速策略是否有效进行对比分析).

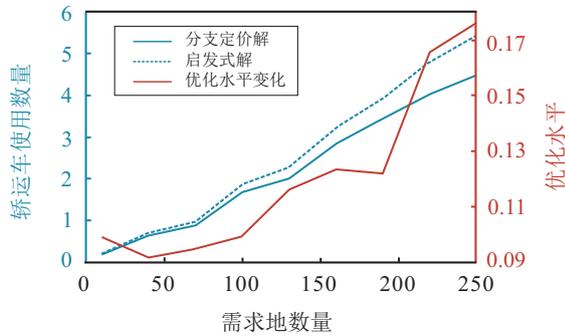


图5 分支定价解与启发式解对比

通过对比可见:本文算法较启发式算法具有一定的优势;而优化水平(见图5)随需求地数量的增加而提高,原因在于启发式算法处理多需求地的能力较分支定价算法差,其与枚举法类似,在同时处理两个需求地以上的问题时,无法保证装载方案最优.以上对比表明,本文算法相比启发式算法能够更好地处理轿运车运输问题,且适用于各种规模情景.

5.2 与智能算法对比

以往研究者已证明了智能算法相比于枚举法综合更优,故本节将本文算法与文献[11]中解决轿运车运输综合优化问题的遗传算法进行对比,以表明本文算法的优势.由于文献[11]发表时轿运车新规并未实行,为使算法对比有效,本文采取以下设计方法:

- 1) 设所有轿运车均为双层单排;
- 2) 将文献[11]结果中双排轿运车车板视为两个车板;

- 3) 根据文献[11]中需求地位置设计需求地集合;
- 4) 按照文献[11]中算例参数调整本文乘用车及轿运车尺寸参数;
- 5) 以车板使用数量对比作为结果对比,简称文献[11]算例中使用的两类车板为短车板及长车板,对比结果如表4所示.

表4 结果对比

算法	短车板 使用数量	长车板 使用数量	运行时间/s
分支定价	21	27	180.3
遗传	24	36	452.0

就运行时间而言,虽然表4中本文的分支定价算法运行时间少于智能(遗传)算法,但本文算法的运行环境优于智能算法运行环境,尽管无法根据运行时间对比算法迭代速度,但本文提出的算法可以使用当前常见设备计算,且相同算例中运行时间不逊于智能算法;就计算结果而言,本文算法结果中使用轿运车车板总数更少,即满载率更高.对文献[11]中具体分析可知,其存在大量不满载运输方案(该情况同样存在于文献[12]).可见本文算法优势在于对轿运车走行方案做优化的前提下,得到了更优的装载方案,即使用轿运车更少.综上所述,本文算法在处理一定规模问题时,具有运行时间可接受、结果准确的优点.

5.3 加速策略效果分析

本文设计了降低可行域维度的降维方法,并以此改进分支定价算法以加速收敛.为验证该加速策略的有效性,本节将在保留前文算例假设的前提下,进行有无采取降维策略的对比分析:调整乘用车及需求地数量进行计算,对比结果如表5所示,其中备选方案数是指列生成算法迭代后,得到的决策变量数量.

表5 有无加速策略对比

需求地 数量	乘用车 种类	有降维方法 的解	无降维方法 的解	有降维方法 运行时间/s	无降维方法 运行时间/s	有降维方法 备选方案数	无降维方法 备选方案数
5	5	147	147	83.4	185.8	89	143
5	10	319	311	95.1	191.9	131	252
5	15	470	463	183.4	571.4	149	357
10	5	337	336	150.9	880.2	329	420
10	10	751	746	480.7	1888.4	370	622
10	15	980	974	998.2	2868.8	557	820

由表5可知:使用本文提出的降维方法能够在传统分支定价算法的基础上,进一步平均降低40%左右的备选方案数以及66%的运行时间;计算结果与不使用降维方法结果相近,平均差距不大于1%.从

而表明本文提出的降维方法能够进一步去除冗余的备选方案,避免不必要的计算,如图6所示(图中总备选方案数是指在不考虑路径规划的情况下,所有需求地的可行方案数).

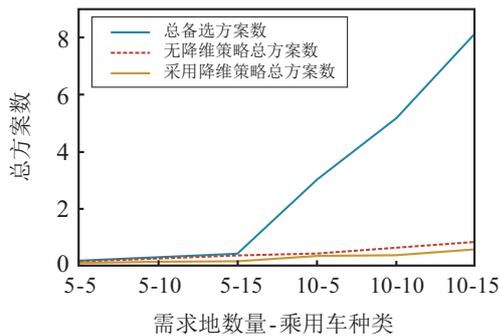


图6 备选方案数变化

图7为在5个需求地及10种乘用车的轿运车运输问题中,使用降维方法及不使用降维方法的分支树每层需要计算的节点数对比情况,可见使用降维方法降低了需要计算的节点数,保证了搜索的有序性;而不使用降维方法则相对无序,无法保证每层计算节点数的下降,继而导致运行时间的提高。

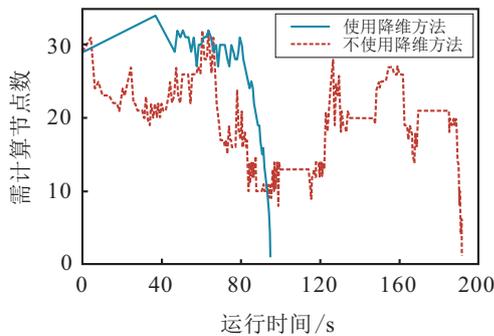


图7 分支树节点数对比

综上所述,在对算法运行时间有要求的前提下,使用本文提出的改进分支定价算法能够有效降低运行时间,且得到的结果较优。但需要指出:无论是否使用降维方法,若不能遍历分支树,则得到的解都是较优解,即本文算法无法保证获得全局最优解。

## 6 结论

本文构建了属于VFRP的双层轿运车运输问题的综合优化模型,并提出了公式推导与配合启发式规则两种有效的线性化方法,在将其线性化后使用改进分支定价算法进行求解,文中设计的模型、线性化策略及求解策略都具有普适性,能够用于求解其他类型的VFRP。算例结果表明:本文算法能够处理较大规模问题,相比于使用求解器直接计算,本文算法的结果较优且耗时远低于求解器;相比以往求解轿运车运输问题的枚举法,本文算法避免了枚举法耗时过长、灵活性较差、规模过大、无法处理路径问题等缺陷;相比于以往的智能算法,本文算法结果中使用的轿运车数量更少且运行时间不逊于智能算法。本文算法的结果相比于根据轿运车运输公司实际工作经

验设计的启发式算法更优,平均优化水平为12%,极大降低了运输成本,且面对复杂情景时结果更优。本文提出的改进分支定价算法进一步降低了问题规模,减少了运行时间:相比于传统分支定价算法进一步去除了平均40%的冗余方案,平均降低了66%的运行时间,且结果差距平均不大于1%。本文使用精确算法求解轿运车运输问题,补充了前人对该类问题研究的缺陷,具有理论意义和实用价值。在未来的研究中,如何进一步提高算法准确性并提高收敛速度是研究的重点。

## 参考文献(References)

- [1] 覃亮, 王志成, 孟磊, 等. 整车物流中轿运车装载方案优化研究[J]. 系统仿真学报, 2015, 27(8): 1868-1874. (Qin L, Wang Z C, Meng L, et al. Study on optimization of loading plan in car carrier of vehicle logistics transportation[J]. Journal of System Simulation, 2015, 27(8): 1868-1874.)
- [2] 王文宪, 郭经纬, 王建, 等. 多类型乘用车装载方案优化应用研究[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(3): 125-130. (Wang W X, Guo J W, Wang J, et al. Research on the optimized loading plan of multi-type passenger car[J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory, 2018, 48(3): 125-130.)
- [3] 孙军艳, 吴冰莹, 来旭东. 整车物流装载方案优化与验证[J]. 包装工程, 2016, 37(21): 103-109. (Sun J Y, Wu B Y, Lai X D. Optimization and verification of vehicle logistics loading scheme[J]. Packaging Engineering, 2016, 37(21): 103-109.)
- [4] 李阳, 范厚明, 张晓楠, 等. 求解模糊需求车辆路径问题的两阶段变邻域禁忌搜索算法[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(2): 522-531. (Li Y, Fan H M, Zhang X N, et al. Two-phase variable neighborhood tabu search for the capacitated vehicle routing problem with fuzzy demand[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2018, 38(2): 522-531.)
- [5] Reed M, Yiannakou A, Evering R. Packing boxes into multiple containers using genetic algorithm[J]. Applied Soft Computing, 2014, 15: 169-176.
- [6] Goksal F P, Karaoglan I, Altiparmak F. A hybrid discrete particle swarm optimization for vehicle routing problem with simultaneous pickup and delivery[J]. Computers & Industrial Engineering, 2013, 65(1): 39-53.
- [7] Ben T H, Absi N, Feillet D, et al. A branch-and-price algorithm for the vehicle routing problem with time windows on a road network[J]. Networks, 2019, 73(4):

- 401-417.
- [8] Brink M V, Ruben V. A branch and price procedure for the container premarshalling problem[J]. *Journal of Sea Research*, 2015, 96: 23-30.
- [9] Christiansen C H, Lysgaard J. A branch-and-price algorithm for the capacitated vehicle routing problem with stochastic demands[J]. *Operations Research Letters*, 2007, 35(6): 773-781.
- [10] 谢晓, 何俊杰, 祁传达. 基于装载模式的整车物流优化模型研究[J]. *信阳师范学院学报: 自然科学版*, 2016, 29(1): 134-138.  
(Xie X, He J J, Qi C D. Studies on optimization model of vehicle logistics based loading Pattern[J]. *Journal of Xinyang Normal University: Natural Science Edition*, 2016, 29(1): 134-138.)
- [11] 陈胜波, 刘永平, 何世伟, 等. 整车物流双层轿运车车辆装载与路径整合优化研究[J]. *山东科学*, 2017, 30(3): 74-82.  
(Chen S B, Liu Y P, He S W, et al. Research on integrated optimization of double stack car carriers based vehicle loading and routing problems in vehicle logistics[J]. *Shandong Science*, 2017, 30(3): 74-82.)
- [12] 李金夫, 庾先国, 刘勇, 等. 关于整车物流运输车辆路径优化设计的研究[J]. *计算机仿真*, 2016, 33(4): 184-188.  
(Li J F, Tuo X G, Liu Y, et al. Study on vehicle routing problems in logistics distribution[J]. *Computer Simulation*, 2016, 33(4): 184-188.)
- [13] Cacchiani V, Caprara A, Toth P. A column generation approach to train timetabling on a corridor[J]. *4OR*, 2008, 6(2): 125-142.
- [14] Yu Y, Wang S H, Wang J W, et al. A branch-and-price algorithm for the heterogeneous fleet green vehicle routing problem with time windows[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2019, 122: 511-527.
- [15] 兰泽康, 何世伟, 黎浩东. 铁路网络列车运行调整的优化模型及其分支定价算法[J]. *交通运输系统工程与信息*, 2018, 18(1): 179-185.  
(Lan Z K, He S W, Li H D. Optimization model and branch-and-price algorithm for train dispatching on a railway network[J]. *Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology*, 2018, 18(1): 179-185.)
- [16] 揭婉晨, 杨珺, 杨超. 多车型电动汽车车辆路径问题的分支定价算法研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2016, 36(7): 1795-1805.  
(Jie W C, Yang J, Yang C. Branch-and-price algorithm for heterogeneous electric vehicle routing problem[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2016, 36(7): 1795-1805.)
- [17] 王建军, 缪鸿儒, 李播, 等. 随机急诊需求下基于分支定价算法的手术计划研究[J]. *系统工程理论与实践*, 2018, 38(9): 2348-2362.  
(Wang J J, Miao H R, Li B, et al. A branch-and-price algorithm for operating room elective surgery planning under stochastic demand of emergency[J]. *Systems Engineering — Theory & Practice*, 2018, 38(9): 2348-2362.)
- [18] Valouxis C, Housos E. Combined bus and driver scheduling[J]. *Computers & Operations Research*, 2002, 29(3): 243-259.
- [19] Himmich I, El Hallaoui I, Soumis F. Primal column generation framework for vehicle and crew scheduling problems[J]. *Networks*, 2020, 75(3): 291-309.
- [20] Yan S, Tung T T, Tu Y P. Optimal construction of airline individual crew pairings[J]. *Computers & Operations Research*, 2002, 29(4): 341-363.
- [21] Achterberg T, Koch T, Martin A. Branching rules revisited[J]. *Operations Research Letters*, 2005, 33(1): 42-54.

## 作者简介

迟居尚(1997—), 男, 博士生, 从事交通运输规划与管理的研究, E-mail: 19120800@bjtu.edu.cn;

何世伟(1969—), 男, 教授, 博士生导师, 从事交通运输规划与管理等研究, E-mail: shwhe@bjtu.edu.cn;

宋子龙(1989—), 男, 博士生, 从事交通运输规划与管理的研究, E-mail: 17114217@bjtu.edu.cn;

薛守强(1994—), 男, 博士生, 从事交通运输规划与管理的研究, E-mail: 18114050@bjtu.edu.cn;

冯骁(1991—), 男, 博士生, 从事交通运输规划与管理的研究, E-mail: 17114206@bjtu.edu.cn.

(责任编辑: 李君玲)