控制与决策
Control and Decision

基于矩阵半张量积的有限值动态系统的最新进展

冯俊娥，李怡靓，赵荣

第 37 卷 第 2 期 控 制 与 决 策 Vol.37 No.2
2022 年 2 月 Control and Decision Feb. 2022

基于矩阵半张量积的有限值动态系统的最新进展

冯俊娥†, 李怡靓, 赵　荣

(山东大学 数学学院，济南 250100)

摘　要: 布尔网络可以简洁有效地描述作用在有限集上的动态离散模型. 然而,随着研究的深入以及一些实际问题的需要,传统的布尔网络已经不能满足建模的需求,由此衍生出多值逻辑网络以及混合值逻辑网络,统称为有限值动态系统. 通过矩阵半张量积,有限值动态系统可以转化为便于处理的等价代数形式. 鉴于此,对矩阵半张量积以及有限值动态系统的最新发展进行概括与总结,对矩阵半张量的推广即各种广义的矩阵半张量积及其应用做简单梳理,着重总结有限值动态系统的最新成果,包括最新的研究问题、最新的研究方法以及最新的几种控制器设计.

关键词: 有限值动态系统；矩阵半张量积；注入控制；翻转机制

中图分类号: TP273　　　**文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.1596　　　**开放科学(资源服务)标识码(OSID):**

引用格式: 冯俊娥,李怡靓,赵荣. 基于矩阵半张量积的有限值动态系统的最新进展 [J]. 控制与决策, 2022, 37(2): 267-277.

Recent developments of finite-valued dynamic systems based on semi-tensor product of matrices

FENG Jun-e†, *LI Yi-liang*, *ZHAO Rong*

(School of Mathematics，Shandong University，Jinan 250100，China)

Abstract: The Boolean network is a succinct and effective tool for describing dynamic discrete models acting on finite sets. However, with the deepening of research and the need of practical problems, traditional Boolean networks have been unable to satisfy the requirements of modeling. Therefore, multi-valued logical networks and mix-valued logical networks come into being, which are collectively referred to as finite-valued dynamic systems (FVDSs). By virtue of the semi-tensor product (STP) of matrices, FVDSs can be converted into equivalent algebraic forms that are easy to deal with. This paper provides a comprehensive survey on the recent developments of STPs and FVDSs. Various generalizations of STPs and their applications are systematically combed. In addition, the latest achievements of FVDSs are emphatically elaborated, involving the current hot issues, the latest research methods, as well as the novel controller design schemes.

Keywords: finite-valued dynamic systems；semi-tensor product of matrices；injection control；flipping mechanism

0　引　言

矩阵是起源于中国的一个数学分支. 美国哥伦比亚特区大学教授 Katz[1] 所著的数学史中指出: “The idea of a matrix has long history, dated at least from its use by Chineses scholars of Han period for solving systems of linear equations” (矩阵的思想历史悠久,它的使用至少可追溯到汉朝,中国学者用它来求解线性方程组). 英国学者 Crilly[2] 也提到矩阵起源于“公元前200年,中国数学家使用了数字阵列”. 然而,直到19世纪50年代矩阵才作为一个独立的概念被提出. 1958年凯莱发表了《矩阵论的研究报告》,系统地阐述了关于矩阵的理论,传统矩阵乘积的概念也是这时给出的.

除了传统的矩阵乘积,还有其他几种矩阵的乘积,例如 Kronecker 积 (也称为张量积)、Hadamard 积、Khatri-Rao 积,这 3 种乘积都是在传统矩阵乘积基础上定义的,因此矩阵乘积之间有许多运算关系,且这 3 种矩阵乘积都是用矩阵乘积提出者的名字命名的.

为了打破传统矩阵乘积对于维数的限制,中国科学院 Cheng 等[3-5] 提出了一种新的矩阵乘积 —— 矩阵半张量积 (Semi-Tensor Product of Matrices), 本文称为 1-型矩阵半张量积. 其克服了传统矩阵乘积对维数的

收稿日期: 2021-09-13；**录用日期:** 2021-10-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61773371, 61877036)；山东省自然科学基金项目 (ZR2019MF002).

†通讯作者. E-mail: fengjune@sdu.edu.cn.

限制. 因此,1-型矩阵半张量积在许多领域都有重要的应用,从最初的布尔网络[4-10],扩展到博弈论[11-13]、密码学 [14-16],再到多智能体同步与队列控制[17-18]、有限自动机[19-23]、 故障诊断与数字电路设计[24-25],甚至网络查询与遥操作[26-27]、内燃发动机[28-29]、智能家居[30] 等工程问题[31]. 中国科学院Guo[32] 给予了高度评价,称"矩阵的半张量积可能会成为计算机时代呼唤的新的数学工具之一,以实现基于计算发现新现象,解决新问题的目的".

最近,程代展[33] 引入了几种矩阵乘子,将1-型矩阵半张量积推广到更为广义的情形. 特别地,矩阵乘子为 J_n 的矩阵乘积称为2-型矩阵半张量积,这里 J_n 表示 n 维的各元素均为 $1/n$ 的方阵. 无论是1-型矩阵半张量积还是2-型矩阵半张量积,当其作用于矩阵与列向量的乘积时,通常情况下所得结果不是一个列向量,而是一个矩阵. 为了使矩阵与列向量的乘积仍是列向量,程代展[33] 还引入了1-型矩阵与向量的半张量积 (1-型MV半张量积) 与2-型矩阵与向量的半张量积 (2-型MV半张量积). 1-型MV半张量积在变维系统的研究中有着重要的应用[34].

现实世界中的动态系统大致分为两类: 一类是基于数量关系的动力学系统, 一般用微分或差分方程进行建模, 另一类是基于逻辑的动态系统. 布尔网络是最简单也最有用的逻辑动态系统. 1969 年, Kauffman[35] 首次利用布尔网络模型刻画基因调控网络. 该模型将基因状态抽象为"关闭"和"激活"两种状态,分别用"0"和"1"表示,从而可利用布尔函数表示基因之间的相互作用,研究基因调控、细胞分化等生物活动过程. 其研究结果显示,布尔网络模型能够很好地刻画、预测生物活动过程的主要特征. k 值逻辑网络与混合值逻辑网络是布尔网络的自然推广,它们统称为有限值逻辑动态系统. 美国空军部门2004年组织编写的一份研究报告《信息爆炸时代的控制》与微软公司2008年组织编写的研究报告《面向2020年的科学》都强调了逻辑动态系统在刻画复杂系统方面的重要性,特别是在计算机占主导地位的智能时代,因为计算机真正能实现的是有限值运算.

逻辑运算是一种非线性运算,已有的微分代数几何等数学工具都不能直接用于处理逻辑运算这种特殊的非线性运算. 而利用1-型矩阵半张量积方法极大地简化了逻辑运算的运算过程,将繁杂的逻辑动态演化过程转化为简洁的离散的代数迭代形式[3]. 在矩阵半张量积这一开创性工作的引领下,逻辑网络的研究得到了系统性研究与充分发展. 按研究对象分,主要包括布尔网络[36-38]、k 值逻辑网络[39-41]、混合值逻辑网络[42-44]、 奇异逻辑网络[45-49]、 受限逻辑网络[50-53]、 隐布尔网络[54-55]、 时滞逻辑网络[56-58]、 随机逻辑网络[59-69]、 切换逻辑网络[70-76]、脉冲逻辑网络[77-85]、 大型布尔网络[86-87] 等; 按研究的问题分, 主要包括拓扑结构的分析[45,54,88]、 稳定与镇定[41,68,72,74,78,83,89]、 能控能达能观能检性分析[22,47,52-53,56,61,64-66,86,90-92]、能控能观性分解、输出跟踪[40,75,81-82,93-94]、同步与一致性[18,39,69]、系统辨识与解耦[42,44-45,95]、集合能稳(能控)[57,63,71,76-77,79-80,84]、鲁棒性分析[96-100]、结构能控能稳、最优控制[59-60, 70, 101]、模型降阶[102]、标准型问题[103]等;按控制方法分,主要包括自由输入控制、状态反馈控制[7,104]、输出反馈控制[8]、牵制控制[10,105-108]、翻转控制[71,109]、事件驱动控制[42,79]、采样控制[62,84]等.

关于矩阵半张量积及其在逻辑网络中应用的概述性成果,除了上文提到的基本专著外,也有不少综述性论文[110-112],本文将对矩阵半张量积以及逻辑网络最近两年的成果做以概述. 首先,引入一些文中用到的记号:

1) 实矩阵 $A \in \boldsymbol{R}_{m\times n}$ 的第 i 行、第 j 列以及 (i,j) 位置的元素分别记为 $\mathrm{Row}_i(A)$、$\mathrm{Col}_j(A)$、$[A]_{i,j}$,其中 $i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n$. A 的全部列构成 A 的列集,记为 $\mathrm{Col}(A)$.

2) $\mathbf{1}_n$ 与 $\mathbf{1}_{n\times n}$ 分别是元素全为1的 n 维列向量与 n 阶方阵. $\mathbf{0}$ 为具有合适维数的零矩阵 (或向量). $J_n = 1_{n\times n}/n$.

3) 矩阵 $A, B \in \boldsymbol{R}_{m\times n}$, $A \succ (\succeq) B$ 是指对于任意的 i,j,有 $[A]_{i,j} > (\geqslant) [B]_{i,j}$.

4) $\delta_n^i = \mathrm{Col}_i(I_n)$, I_n 为 n 阶单位矩阵.

5) 设 $\mathcal{D}_k = \left\{1, \dfrac{k-2}{k-1}, \ldots, \dfrac{1}{k-1}, 0\right\}$, $\mathcal{D}_2$ 简记为 $\mathcal{D}$, $\Delta_k = \{\delta_k^i | i=1,2,\ldots,k\}$.

6) 如果矩阵 $L \in \boldsymbol{R}_{m\times n}$, 且 $\mathrm{Col}_j(L) \in \Delta_m, j = 1,2,\ldots,n$,则称 L 为逻辑矩阵. 所有 $m\times n$ 阶逻辑矩阵构成的一个集合,记为 $\mathcal{L}_{m\times n}$. 将逻辑矩阵 $[\delta_m^{i_1}, \delta_m^{i_2}, \ldots, \delta_m^{i_n}]$ 简记为 $\delta_m[i_1, i_2, \ldots, i_n]$.

7) 矩阵 $A \in \boldsymbol{R}_{p\times n}$, $B \in \boldsymbol{R}_{q\times n}$,则 A、B 的 Khatri-Rao积 $*$ 定义如下:

$$\mathrm{Col}_j(A*B) = \mathrm{Col}_j(A) \otimes \mathrm{Col}_j(B),\ j=1,2,\ldots,n.$$

本文的内容组织如下: 首先介绍1-型矩阵半张量积的概念性质及几种广义的矩阵半张量积; 然后简要介绍逻辑网络的代数表示以及逻辑网络的最新成果, 主要包括最新的研究对象与研究问题、最新的研究方法、最新的控制信号设计方法; 最后给出结论.

1　几种矩阵半张量积

本节主要介绍1-型矩阵半张量积及其基本性质,并简单介绍其他几种矩阵半张量积及其应用,更详细的内容与应用参见文献[3-5].

定义1[5]　设矩阵$M\in\boldsymbol{R}_{m\times n},N\in\boldsymbol{R}_{p\times q}$,则$M$和$N$的1-型半张量积定义如下:

$$M\ltimes_1 N=(M\otimes I_{t/n})(N\otimes I_{t/p})\in\boldsymbol{R}_{mt/n\times qt/p},$$

其中t为n和p的最小公倍数.

如果$n=p$,则1-型半张量积退化为一般的矩阵乘积,所以说1-型矩阵半张量积是普通矩阵乘积的推广. 最为重要的一点是,1-型半张量积不但保留了传统矩阵乘积所有基本的性质(如分配律、结合律等),而且有普通矩阵乘积所没有的新性质. 因此在本文中,如无特殊说明,默认的矩阵乘积是1-型矩阵半张量积.

1) 分配律. 设矩阵$A,B\in\boldsymbol{R}_{m\times n},C\in\boldsymbol{R}_{p\times q},a,b\in\boldsymbol{R}$,则有

$$\begin{cases}(aA\pm bB)\ltimes_1 C=aA\ltimes_1 C\pm bB\ltimes_1 C,\\ C\ltimes_1(aA\pm bB)=aC\ltimes_1 A\pm bC\ltimes_1 B.\end{cases}$$

2) 结合律. 设A、B、C是任意有限维实矩阵,则$(A\ltimes_1 B)\ltimes_1 C=A\ltimes_1(B\ltimes_1 C)$.

3) 伪交换律. 设列向量$Z\in\boldsymbol{R}_{t\times 1}$,矩阵$A\in\boldsymbol{R}_{m\times n}$,则$ZA=(I_t\otimes A)Z$.

4) 换位矩阵. 设列向量$X\in\boldsymbol{R}_{m\times 1},Y\in\boldsymbol{R}_{n\times 1}$,有

$$Y\ltimes_1 X=W_{[m,n]}\ltimes_1 X\ltimes_1 Y,\tag{1}$$

定义$W_{[m,n]}\in\mathcal{L}_{mn\times mn}$为换位矩阵,形式如下:

$$[\delta_n^1\delta_m^1,\dots,\delta_n^n\delta_m^1,\dots,\delta_n^1\delta_m^m,\dots,\delta_n^n\delta_m^m].$$

1-型矩阵半张量积的伪交换律以及换位矩阵性质(1)在逻辑运算代数化的转化过程中有着重要作用. 下面给出另一种矩阵半张量积.

定义2[33]　设矩阵$M\in\boldsymbol{R}_{m\times n},N\in\boldsymbol{R}_{p\times q}$,则$M$和$N$的2-型半张量积定义如下:

$$M\ltimes_2 N=(M\otimes J_{t/n})(N\otimes J_{t/p})\in\boldsymbol{R}_{mt/n\times qt/p},$$

其中t为n和p的最小公倍数.

2-型半张量积和1-型半张量积同样是传统矩阵乘积的一种推广. 容易验证,当$n=p$时,2-型半张量积也退化为传统矩阵乘积,且它也满足结合律、分配律等性质.

无论是1-型矩阵半张量积还是2-型矩阵半张量积，当作用于矩阵与列向量的乘积时，通常情况下所得结果不是一个列向量，而是一个矩阵. 为了使矩阵与列向量的乘积仍是列向量,程代展[33]引入了1-型矩阵与向量的半张量积(1-型MV半张量积)和2-型矩阵与向量的半张量积(2-型MV半张量积).

定义3[33]　设矩阵$M\in\boldsymbol{R}_{m\times n},x\in\boldsymbol{R}_p$,定义两个矩阵的1-型MV半张量积与2-型MV半张量积为

$$M\ltimes_1 x=(M\otimes I_{t/n})(x\otimes\mathbf{1}_{t/p})\in\boldsymbol{R}_{mt/n},$$

$$M\ltimes_2 x=(M\otimes J_{t/n})(x\otimes\mathbf{1}_{t/p})\in\boldsymbol{R}_{mt/n},$$

其中t为n和p的最小公倍数.

显然,当$n=p$时,1-型MV半张量积与2-型MV半张量积皆为传统的矩阵与向量的乘积. 受定义3启发,1-型MV半张量积与2-型MV半张量积被推广到矩阵与矩阵相乘的情形,称为3-型矩阵半张量积与4-型矩阵半张量积.

定义4[113]　设矩阵$M\in\boldsymbol{R}_{m\times n},N\in\boldsymbol{R}_{p\times q}$,定义两个矩阵的3-型矩阵半张量积与4-型矩阵半张量积分别为

$$M\ltimes_3 N=(M\otimes I_{t/n})(N\otimes 1_{t/p})\in\boldsymbol{R}_{mt/n\times q},$$

$$M\ltimes_4 N=(M\otimes J_{t/n})(N\otimes 1_{t/p})\in\boldsymbol{R}_{mt/n\times q},$$

其中t为n和p的最小公倍数.

显然,当矩阵N为列向量时,3-型矩阵半张量积与4-型矩阵半张量积即为1-型MV半张量积与2-型MV半张量积. 上述3-型矩阵半张量积与4-型矩阵半张量积是良定的,但它们并不满足矩阵的结合律等性质. 因此可以将3-型矩阵半张量积与4-型矩阵半张量积定义中的矩阵N看成是所有列向量的集合,此时定义4自然是定义3的一个推广. 不仅如此,3(4)-型矩阵半张量积与1(2)-矩阵半张量积也有一定的代数关系[113].

Cheng等[34,114]将1-型MV半张量积用于研究变维系统,其优点主要有: 1) 原来不同维数的系统需要切换,而变维系统可以统一表示不同维数的系统; 2) 原来不同维数系统切换前后的连续性在数学上不好描述,而利用变维系统可以用与它们等价的同维空间上向量的连续性刻画系统变维前后的连续性. 目前关于变维系统的已有结果,主要讨论了变维系统解的情况[115-117]、变维系统解的维数变化情况[118-119]、解的稳定性[115,120]、变维系统的能达性[121]以及范维系统[122].

2　逻辑网络的代数表示

2.1　逻辑函数的代数表示

称一个取值于$\mathcal{D}_k$的变量$\bar{x}$为k维变量,其向量形式可以表示为$\dfrac{j}{k-1}\sim\delta_k^{k-j}$, $j=0,1,\dots,k-1$,进而有$\mathcal{D}_k\sim\varDelta_k$. 在下文讨论中,“$\ltimes$”表示1-型半张量积.

引理1　1) 对于任何一个一元逻辑函数$f(\bar{x}):\mathcal{D}_{k_1}\to\mathcal{D}_{k_2}$,均存在唯一逻辑矩阵$M\in\mathcal{L}_{k_2\times k_1}$,使得在向量形式下有$F(x)=Mx$,其中$F(x)$与$x$分别为

$f(\bar{x})$与$\bar{x}$的向量形式,称M为该对应一元逻辑函数的结构矩阵.

2) 对于任何一个二元逻辑函数$f(\bar{x}_1,\bar{x}_2):\mathcal{D}_{k_1}\times\mathcal{D}_{k_2}\to\mathcal{D}_{k_0}$,均存在唯一逻辑矩阵$M\in\mathcal{L}_{k_0\times k}(k=k_1\times k_2)$,使得在向量形式下有$F(x_1,x_2)=Mx$,其中$F(\cdot)$与$x_i$分别为$f(\cdot)$与$\bar{x}_i$的向量形式,且$x=x_1\ltimes x_2=:x_1x_2$,称$M$为该对应二元逻辑函数的结构矩阵.

下面定义的矩阵可以将上述引理推广到一般的n元逻辑函数情形.

1) 降阶矩阵. 设列向量$X\in\Delta_m$,则有$X\ltimes X=\Phi(m)\ltimes X$,其中$\Phi(m)\in\mathcal{L}_{m^2\times m}$为降阶矩阵,$\Phi(m)=\mathrm{Diag}\{\delta_m^1,\delta_m^2,\ldots,\delta_m^m\}$.

2) 哑矩阵. 设列向量$X\in\Delta_m,Y\in\Delta_n$,则有

$$\begin{cases}D_f^{m,n}\ltimes X\ltimes Y=X,\\ D_r^{m,n}\ltimes X\ltimes Y=Y,\end{cases}$$

其中$D_f^{m,n}$、$D_r^{m,n}$为哑矩阵,且有

$$\begin{cases}D_f^{m,n}=I_m\otimes\mathbf{1}_n^{\mathrm{T}},\\ D_r^{m,n}=\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\otimes I_n.\end{cases}$$

利用降阶矩阵、哑矩阵以及上一节中介绍的换位矩阵,对于一般的n元逻辑函数,下面引理给出其代数形式的转化.

引理2[3] 对于逻辑函数$f:\prod\limits_{i=1}^{i=n}\mathcal{D}_{k_i}\to\mathcal{D}_{k_0}$,存在唯一结构矩阵$M_f\in\mathcal{L}_{k_0\times k}$,使得$f(\cdot)$的向量形式为

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=M_f\ltimes_{i=1}^n x_i,$$

其中x_i为k_i维逻辑变量的向量形式,$k=\prod\limits_{i=1}^n k_i$.

2.2 逻辑网络的代数形式

考虑具有n个状态节点的逻辑网络

$$\begin{cases}\bar{x}_1(t+1)=f_1(\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t),\ldots,\bar{x}_n(t)),\\ \bar{x}_2(t+1)=f_2(\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t),\ldots,\bar{x}_n(t)),\\ \quad\vdots\\ \bar{x}_n(t+1)=f_n(\bar{x}_1(t),\bar{x}_2(t),\ldots,\bar{x}_n(t)).\end{cases}$$

其中:$\bar{x}_i$为第i个状态节点,取值于$\mathcal{D}_{k_i}$;$f_i:\prod\limits_{i=1}^{i=n}\mathcal{D}_{k_i}\to\mathcal{D}_{k_i}$为$n$元逻辑函数.

由引理2可知,对于任意$f_i(\cdot)$,存在$M_i\in\mathcal{L}_{k_i\times k}$使得

$$x_i(t+1)=M_ix(t),\ i=1,2,\ldots,n.\tag{2}$$

其中:$x(t)=\ltimes_{i=1}^n x_i(t)\in\Delta_k,k=\prod\limits_{i=1}^{i=n}k_i$.

将式(2)中$x_i(t+1)$依次相乘,可得

$$x(t+1)=Mx(t),\tag{3}$$

其中$M=M_1*M_2*\cdots*M_n\in\mathcal{L}_{k\times k}$.

类似地,对于一般形式带有输出的逻辑控制网络

$$\begin{cases}\overline{x}_1(t+1)=f_1(\overline{u}_1(t),\ldots,\overline{u}_m(t),\overline{x}_1(t),\ldots,\overline{x}_n(t)),\\ \overline{x}_2(t+1)=f_2(\overline{u}_1(t),\ldots,\overline{u}_m(t),\overline{x}_1(t),\ldots,\overline{x}_n(t)).\\ \quad\vdots\\ \overline{x}_n(t+1)=f_n(\overline{u}_1(t),\ldots,\overline{u}_m(t),\overline{x}_1(t),\ldots,\overline{x}_n(t)),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{y}_1(t)=g_1(\overline{x}_1(t),\ldots,\overline{x}_n(t)),\\ \overline{y}_2(t)=g_2(\overline{x}_1(t),\ldots,\overline{x}_n(t)),\\ \quad\vdots\\ \overline{y}_w(t)=g_w(\overline{x}_1(t),\ldots,\overline{x}_n(t)).\end{cases}$$

利用引理2,得到其代数形式为

$$\begin{cases}x(t+1)=Lu(t)x(t),\\ y=Hx(t).\end{cases}\tag{4}$$

其中:$L=M_1*M_2*\cdots*M_n\in\mathcal{L}_{k\times lk},H=H_1*H_2*\cdots*H_w\in\mathcal{L}_{p\times k},M_i\in\mathcal{L}_{k_i\times lk}$与$H_r\in\mathcal{L}_{p_r\times k}$分别为$m+n$元逻辑函数$f_i(\cdot)$与$n$元逻辑函数$g_i(\cdot)$的结构矩阵,$x_i$、$u_j$、$y_k$分别为逻辑变量$\overline{x}_i\in\mathcal{D}_{k_i}$、$\overline{u}_j\in\mathcal{D}_{l_j}$、$\overline{y}_r\in\mathcal{D}_{p_r}$的向量形式,$x(t)=\ltimes_{i=1}^n x_i(t)\in\Delta_k,u(t)=\ltimes_{j=1}^m u_j(t)\in\Delta_l,y(t)=\ltimes_{r=1}^w y_r(t)\in\Delta_p$,$k=\prod\limits_{i=1}^{i=n}k_i,l=\prod\limits_{j=1}^{j=m}l_j,p=\prod\limits_{r=1}^{r=w}p_r$.

逻辑网络与逻辑控制网络的拓扑结构稳定与否、是否能控、是否能观能检等控制性质完全由其代数形式(3)和(4)决定. 更确切地,完全由其结构矩阵M与L决定,这就是为什么1-型矩阵半张量积成为处理逻辑网络的有效工具的具体原因. 特别需要提及的是,对于一个表达遗传系统的实际布尔模型,已有的研究结果只找到该模型6个长度为6的环[123],而Cheng等[3]用逻辑网络的代数形式找到了该系统长度为6的所有环.

3 逻辑网络的最新研究进展

本节将从研究对象与问题、研究方法以及控制信号的设计等方面阐述逻辑网络以及逻辑控制网络的最新研究成果.

3.1 逻辑网络最新研究对象与问题

从研究对象上看,逻辑网络包括布尔网络、多值逻辑网络、混合值逻辑网络、切换逻辑网络、受限逻辑网络、随机逻辑网络、时滞逻辑网络、脉冲逻辑网络等,这里简单介绍几种逻辑网络.

隐逻辑网络:即t时刻状态与$t+1$时刻状态耦合

在一起的系统,形如 $f(x(t), x(t+1)) = \text{Constant}$(常值逻辑变量). 隐逻辑网络与奇异逻辑网络同样都是逻辑网络的推广. 值得一提的是,隐逻辑网络的提出来源于经典决策问题——狼羊白菜渡河问题[54]. 基于这一实际问题,文献[54]首次提出并研究了隐布尔网络的拓扑结构、解的存在唯一性以及隐布尔网络与一般的布尔网络,包括奇异布尔网络之间的转换关系等问题,并将所得结果用于处理生化振荡器这一生物模型.

切换逻辑网络: 即给定一个规则确定若干个子系统之间的切换. 根据切换信号的不同,切换逻辑网络可以细化为周期逻辑网络、随机逻辑网络,脉冲逻辑网络等.

1) 周期逻辑网络: 即子系统按特定顺序进行切换的逻辑网络. 一些实际存在的现象说明了讨论周期逻辑网络的必要性. 例如,昼夜更替使得生物系统在循环环境中进化和生存,一些基因调控网络也会受到周期性医疗干预的影响. 目前,已有文献研究了周期逻辑网络的环[73]、镇定性[74]、输出跟踪[75]等相关问题.

2) 随机逻辑网络: 即子系统之间的切换是随机进行的. 若系统在每个时刻都以一个给定的概率在子系统之间切换,则对应的系统称为概率逻辑网络. 关于概率逻辑网络的研究已经涵盖了稳定性和镇定性[62-63]、能观性和能检性[64-65]、同步[69]等多个控制理论基本问题. 若系统的切换序列是离散时间齐次马尔可夫链,则对应的系统称为马尔可夫跳变逻辑网络. 马尔可夫跳变逻辑网络的能控性[66]、镇定性[67]以及 l_1 增益问题[68]已经被讨论.

3) 脉冲逻辑网络: 用于描述由于网络受到瞬时扰动,导致节点状态发生突变的现象. 切换现象、频率变化或者其他突发噪声都可能导致瞬时扰动的产生,使系统在某些瞬间发生突变,并影响系统轨迹. 根据产生脉冲现象的原因不同,脉冲逻辑网络可以分为时间脉冲逻辑网络和状态脉冲逻辑网络.

① 时间脉冲逻辑网络: 即脉冲现象在特定时刻发生. 显然,时间脉冲逻辑网络可以看作是带有特定切换信号的切换逻辑网络. 时间脉冲逻辑网络的稳定性和镇定性[77-79]、能控性[80]、输出跟踪[81-82]等问题都有了较为详细的研究.

② 状态脉冲逻辑网络: 即脉冲现象的发生与否依赖于系统状态. 不难发现,状态脉冲逻辑网络是一类切换信号依赖于状态的切换逻辑网络. 文献[83-85]给出了状态脉冲逻辑网络的一种混杂模型,用于分析这类逻辑网络的各种稳定性问题.

逻辑网络研究的问题非常广泛,从系统的性能分析到各种控制问题,包括拓扑结构与性能指标的分析,能控能观性分析,系统的镇定、跟踪、解耦,系统的分解、同步、一致以及最优控制等问题. 这里简单介绍几个最新研究的问题.

1) 逻辑函数的完备集. $\{\neg, \vee, \wedge\}$ 是一组标准的2-值完备集,它是2-值逻辑理论的一个重要性质. 同样,多值或混合逻辑函数的完备性及其完备集的判定也是逻辑理论的一个基本问题. 利用1-型矩阵半张量积, Cheng 等[124]首次讨论了多值逻辑函数以及混合值逻辑函数的完备集及标准规范型等问题. 而针对多值逻辑函数,文献[125]在其研究的基础上给出了较小的完备集,这类完备集中只有4个逻辑函数. 最近的文献[126]给出了多值逻辑函数的一个最小的仅包含2个函数的完备集.

2) 模型分解. 模型分解不但可以降低模型分析的复杂度,而且有利于系统性能的分析,例如系统的能控性分解与能观性分解. 文献[6]将大规模的布尔网络进行分块,通过研究子块得到整个系统的性质,大幅度减少了计算的复杂度. 文献[127]与文献[128]分别研究了输入、输出相关的布尔控制网络的分解问题. 文献[129]研究了布尔网络的卡尔曼分解. 文献[95]利用逻辑向量的素分解以及逻辑矩阵方程组的求解研究了布尔网络的输入输出块分解.

布尔网络的标准型分解类似于线性系统的约当标准型分解,利用坐标变换可得逻辑网络的标准型[103],这对逻辑网络拓扑结构的分析有着重要的作用. 从逻辑网络的标准型可直接获得该网络的吸引子,包括不动点与圈及其对应的吸引域,甚至由系统的标准型可直接得到任意状态到其吸引域的时间.

3) 鲁棒控制. 逻辑网络的鲁棒控制旨在保持控制系统在不确定性条件下性能的鲁棒性,包括鲁棒稳定、鲁棒镇定、鲁棒能控能达等问题. 在生物系统中,任何形式的干扰都有可能使生物体发生基因突变. 一些基因突变可能导致基因疾病,也存在某些基因突变对分子医学和分子进化有着积极的影响. 基于这一背景,部分学者研究了逻辑网络的摄动问题. 针对带有函数摄动的逻辑网络,函数摄动对逻辑网络稳定性[96-97]、镇定性[98]、能控性[99]、能观性[100]以及输出跟踪[93]的影响均得到了研究.

3.2 逻辑网络最新研究方法

目前,逻辑网络稳定性分析的方法主要包括: 关联矩阵分析法、基于结构矩阵的分析方法、Lyapunov

函数方法、内核吸引子方法、集合能控方法以及Ledley前提解方法等,由于前面3种方法已有综述或多或少介绍过,这里只介绍后3种方法.

1) 内核吸引子方法. 内核吸引子是在比较环与控制不变子集差异的基础上提出的. 从本质上看,内核吸引子是满足子集中所有状态两两可达的控制不变子集. 针对切换布尔网络(布尔网络可以看作是一种常值切换的布尔网络),文献[72]提出了内核吸引子的概念, 并给出切换布尔网络逐点稳定于内核吸引子的代数判据, 包括一个易于验证的特征多项式判据.

2) 集合能控方法. 由于基因调控网络有必要对某些可能导致疾病的状态进行约束,能控性问题的研究可能只需涉及部分状态,而非所有状态,这便产生了集合能控理论. 对于给定的切换布尔控制网络,文献[76]证明了系统集合镇定的充要条件是系统从给定集合外的状态到该集合的内核吸引子是集合能控的. 此外,集合能控方法还用于研究逻辑网络的能观性[92]、输出跟踪[94]等问题.

3) Ledley前提解方法. 文献[130-131]最早在1-型矩阵半张量积的框架下研究了Ledley解在布尔网络中的应用,最近文献[104]利用Ledley前提解方法研究了逻辑网络状态反馈镇定问题,并给出最短时间镇定逻辑网络的控制器具体设计方案. 该方法与其他方法相比较更直观,且计算复杂度更小.

3.3 逻辑网络最新控制信号设计

控制信号的设计主要包括:自由控制信号、状态反馈控制、输出反馈控制、牵制控制、事件驱动控制、采样控制、翻转控制、注入模式的控制等. 对于大多数控制信号的设计方法,已有综述[110-113]均有介绍,这里只介绍逻辑网络中最新的几种控制信号的设计方法.

1) 牵制控制. 牵制控制策略旨在控制系统的部分节点,并使系统达到期望的目标. 另一方面,一些生物例子说明了为实现大规模逻辑网络的期望目标,只控制系统的部分节点是可以实现系统的完全控制. 例如,在DNA受损的情况下,只控制节点Mdm2或者Wip1,可使p53网络进入凋零吸引子[132]. 文献[10]最早将牵制控制的思想引入到逻辑网络. 文献[106-108]讨论了牵制控制器的设计问题, 给出了几种不同的控制器设计方案. 文献[105]研究了一类特殊的牵制控制,即注入模式的牵制控制,并讨论了布尔网络基于注入模式牵制控制的镇定问题.

2) 翻转机制. 翻转机制的核心思想是针对不能控或不稳定的布尔网络,对布尔网络的部分状态进行一次性翻转,翻转后的布尔网络继续按照原网络演化规则运行便可实现能控或稳定. 这里的翻转可以简要概述为如果原来状态节点的取值为1或0,则翻转后的状态节点取值为0或1. 由于翻转机制仅需要对系统施加较小的干预,翻转机制与其他已有方法相比更加易于实现. 翻转机制最早用来解决吸引子的能控性[133]与镇定问题[134],文献[71]将其推广到切换布尔网络的稳定与镇定问题. 而文献[109]将该思想推广到通过辅助函数的翻转机制控制,并在这种控制下讨论布尔网络的镇定问题.

4 逻辑网络的研究展望与总结

有了矩阵半张量积的助力,有关逻辑网络的研究正日益完善与丰富,尽管如此,仍有许多理论问题尚待解决或尚需彻底解决.

1) 降低计算的复杂度. 无论是布尔网络产生的生物基因网络,还是逻辑网络目前应用比较广泛的有限自动机系统、大型互联网网络、逻辑电路系统以及移位寄存器等实际系统通常都是大型网络. 分析研究这些大型的逻辑网络,首先面临的是如何降低计算的复杂度问题. 目前针对大型逻辑网络,已有较多降低计算复杂度的方法:近似方法[135]、网络聚合方法[86-87]、逻辑矩阵分解方法[88]、牵制控制[136]、模型降阶[102]以及块解耦方法[95]等. 利用半张量积处理这些实际网络模型,网络节点越多,则系统的维数越高,对计算机的计算性能要求便越高,如何降低系统计算的复杂度是逻辑网络理论研究方面目前面临的一个大的挑战.

2) 半张量积与博弈论的进一步结合. 目前,已利用矩阵半张量积对博弈领域进行了初步研究,将逻辑网络的相关研究内容与网络演化博弈相结合,得到了一系列研究成果. 如何进一步结合半张量积探究博弈与控制的相关问题,例如,博弈的控制与优化问题、博弈在网络拥塞控制中的应用、贝叶斯博弈等,都是值得进一步探索和研究的.

3) 半张量积与现代数学的发展. 能否拓宽矩阵半张量积的应用范围,根据实际需求提出其他类型的具有一定意义的矩阵半张量积,仍然是一个值得思考的问题. 另外,如何将跨维系统理论真正用于实际系统的建模,进一步实现跨维系统的分析、控制与应用也是具有重要意义的.

4) 探索更多的应用领域. 布尔网络产生之初用于基因调控网络的建模,随后应用于电子电路系统、移位寄存器、有限自动机等. 逻辑网络自产生之初

直至后来每一步的发展都一直服务于实际应用领域,因此逻辑网络的分析与控制有着非常重要的应用背景. 期待着逻辑网络有更多的应用成果与应用领域,尤其是逻辑网络在信息物理系统、智能控制等领域的应用.

本文对逻辑网络的最新进展作了一个现阶段的梳理和总结,为对半张量积理论或是逻辑网络感兴趣的研究者提供几个思考的方向.

参考文献(References)

[1] Katz V J. A history of mathematics. Brief version[M]. New York: Addison-Wesley, 2004: 418-426.

[2] Crilly T. 50 mathenatical ideas you really need to know[M]. London: Quercus Publishing, 2008: 225-246.

[3] Cheng D Z, Qi H S. A linear representation of dynamics of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(10): 2251-2258.

[4] Cheng D Z, Qi H S. Semi-tensor product of matrices-theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2007: 129-157.

[5] Cheng D Z, Qi H S, Zhao Y. An introduction to semi-tensor product of matrices and its applications[M]. Singapore: World Scientific, 2012: 23-44.

[6] Zhao Y, Kim J, Filippone M. Aggregation algorithm towards large-scale Boolean network analysis[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(8): 1976-1985.

[7] Li R, Yang M, Chu T G. State feedback stabilization for Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(7): 1853-1857.

[8] Li H T, Wang Y Z. Output feedback stabilization control design for Boolean control networks[J]. Automatica, 2013, 49(12): 3641-3645.

[9] Gao B, Li L X, Peng H P, et al. Principle for performing attractor transits with single control in Boolean networks[J]. Physical Review E, 2013, 88(6): 062706.

[10] Lu J Q, Zhong J, Huang C, et al. On pinning controllability of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(6): 1658-1663.

[11] Guo P L, Wang Y Z, Li H T. Algebraic formulation and strategy optimization for a class of evolutionary networked games via semi-tensor product method[J]. Automatica, 2013, 49(11): 3384-3389.

[12] Cheng D Z. On finite potential games[J]. Automatica, 2014, 50(7): 1793-1801.

[13] Cheng D Z, He F H, Qi H S, et al. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(9): 2402-2415.

[14] Zhao D W, Peng H P, Li L X, et al. Novel way to research nonlinear feedback shift register[J]. Science China Information Sciences, 2014, 57(9): 1-14.

[15] Zhong J H, Lin D D. A new linearization method for nonlinear feedback shift registers[J]. Journal of Computer and System Sciences, 2015, 81(4): 783-796.

[16] Liu Z B, Wang Y Z, Cheng D Z. Nonsingularity of feedback shift registers[J]. Automatica, 2015, 55: 247-253.

[17] Wang Y Z, Zhang C H, Liu Z B. A matrix approach to graph maximum stable set and coloring problems with application to multi-agent systems[J]. Automatica, 2012, 48(7): 1227-1236.

[18] Li R, Chu T G. Complete synchronization of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(5): 840-846.

[19] Xu X R, Hong Y G. Matrix expression and reachability analysis of finite automata[J]. Journal of Control Theory and Applications, 2012, 10(2): 210-215.

[20] Xu X R, Hong Y G. Observability analysis and observer design for finite automata via matrix approach[J]. IET Control Theory & Applications, 2013, 7(12): 1609-1615.

[21] Yan Y Y, Chen Z Q, Liu Z X. Semi-tensor product approach to controllability and stabilizability of finite automata[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2015, 26(1): 134-141.

[22] Zhang K Z, Zhang L J. Observability of Boolean control networks: A unified approach based on finite automata[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(9): 2733-2738.

[23] Wang B, Feng J E, Meng M. Matrix approach to model matching of composite asynchronous sequential machines[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(13): 2122-2130.

[24] Li H T, Wang Y Z. Boolean derivative calculation with application to fault detection of combinational circuits via the semi-tensor product method[J]. Automatica, 2012, 48(4): 688-693.

[25] 欧阳城添, 江建慧. 基于概率转移矩阵的时序电路可靠度估计方法[J]. 电子学报, 2013, 41(1): 171-177.
(Ouyang C T, Jiang J H. Reliability estimation of sequential circuit based on probabilistic transfer matrices[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(1): 171-177.)

[26] Chen Y B, Xi N, Miao L, et al. Applications of the semi-tensor product to the Internet-based tele-operation systems[J]. Robot, 2012, 34(1): 50-55.

[27] 刘旭浩, 徐勇. 基于半张量积理论的公交网络查询[J]. 复杂系统与复杂性科学, 2013, 10(1): 38-44.
(Liu X H, Xu Y. An inquiry method of transit network based on semi-tensor product[J]. Complex Systems and Complexity Science, 2013, 10(1): 38-44.)

[28] Wu Y H, Shen T L. A logical dynamical systems approach to modeling and control of residual gas fraction in IC engines[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2013, 46(21): 495-500.

[29] Wu Y H, Shen T L. Policy iteration approach to control residual gas fraction in IC engines under the framework

of stochastic logical dynamics[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2017, 25(3): 1100-1107.

[30] Kabir M H, Hoque M R, Koo B J, et al. Mathematical modelling of a context-aware system based on Boolean control networks for smart home[C]. The 18th IEEE International Symposium on Consumer Electronics. Korea, 2014: 1-2.

[31] Li H T, Zhao G D, Meng M, et al. A survey on applications of semi-tensor product method in engineering[J]. Science China Information Sciences, 2017, 61(1): 1-17.

[32] Guo L. Comments on "Semi-tensor product of matrices — A convenient new tool" [J]. Chinese Science Bulletin, 2011, 56(32): 2662-2663.

[33] 程代展. 矩阵半张量积讲义[M]. 北京: 科学出版社, 2020: 1-27.
(Cheng D Z. Notes on semi-tensor product of matrices[M]. Beijing: Science Press, 2020: 1-27.)

[34] Cheng D Z. From dimension-free matrix theory to cross-dimensional dynamic dystems[M]. Amsterdam: Elsevier, 2019: 187-231.

[35] Kauffman S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets[J]. Journal of Theoretical Biology, 1969, 22(3): 437-467.

[36] Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q. Analysis and control of Boolean networks: A semi-tensor product approach[M]. London: Springer, 2010: 103-139.

[37] Fornasini E, Valcher M E. On the periodic trajectories of Boolean control networks[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1506-1509.

[38] Zhao Y, Qi H S, Cheng D Z. Input-state incidence matrix of Boolean control networks and its applications[J]. Systems & Control Letters, 2010, 59(12): 767-774.

[39] Meng M, Feng J E, Hou Z S. Synchronization of interconnected multi-valued logical networks[J]. Asian Journal of Control, 2014, 16(6): 1659-1669.

[40] Li H T, Song P P, Yang Q Q. Pinning control design for robust output tracking of k-valued logical networks[J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(7): 3039-3053.

[41] Li F F, Sun J T. Stability and stabilization of multivalued logical networks[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(6): 3701-3712.

[42] Wang S L, Li H T, Li Y L, et al. Event-triggered control for disturbance decoupling problem of mix-valued logical networks[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(2): 796-809.

[43] Cheng D Z, Zhao Y, Xu T T. Receding horizon based feedback optimization for mix-valued logical networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(12): 3362-3366.

[44] Liu Z B, Wang Y Z. Disturbance decoupling of mix-valued logical networks via the semi-tensor product method[J]. Automatica, 2012, 48(8): 1839-1844.

[45] Meng M, Feng J E. Topological structure and the disturbance decoupling problem of singular Boolean networks[J]. IET Control Theory & Applications, 2014, 8(13): 1247-1255.

[46] Liu Y, Cao J D, Li B W, et al. Normalization and solvability of dynamic-algebraic Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(7): 3301-3306.

[47] Li B W, Lou J G, Shi W P, et al. Controllability of dynamic-algebraic Boolean networks based on a new normalisation approach[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(13): 2104-2109.

[48] Feng J E, Yao J, Cui P. Singular Boolean networks: Semi-tensor product approach[J]. Science China Information Sciences, 2013, 56(11): 1-14.

[49] Liu Y, Li B W, Chen H W, et al. Function perturbations on singular Boolean networks[J]. Automatica, 2017, 84: 36-42.

[50] 冯俊娥, 于永渊, 李海涛. 受限布尔网络发展现状[J]. 控制与决策, 2018, 33(5): 960-968.
(Feng J E, Yu Y Y, Li H T. Recent development of Boolean networks with constraints[J]. Control and Decision, 2018, 33(5): 960-968.)

[51] Gui N, Guo Y Q. Stabilisation of Boolean control networks with state-dependent constraints via space extension and pre-feedback[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(13): 2072-2080.

[52] Li H T, Wang Y Z. Controllability analysis and control design for switched Boolean networks with state and input constraints[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2015, 53(5): 2955-2979.

[53] Guo Y Q. Controllability of Boolean control networks with state-dependent constraints[J]. Science China Information Sciences, 2016, 59(3): 1-14.

[54] Yu Y Y, Feng J E, Meng M, et al. Topological structure of implicit Boolean networks[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(13): 2058-2064.

[55] Yu Y Y, Feng J E, Wang S. Explicit formula of logical algebraic equations and singular Boolean networks with probability[C]. The 35th Chinese Control Conference. Chengdu, 2016: 1192-1197.

[56] Lu J Q, Zhong J, Ho D W C, et al. On controllability of delayed Boolean control networks[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2016, 54(2): 475-494.

[57] Zheng Y T, Li H T, Feng J E. State-feedback set stabilization of logical control networks with state-dependent delay[J]. Science China Information Sciences, 2020, 64(6): 1-3.

[58] Zheng Y T, Feng J E. Output tracking of delayed logical control networks with multi-constraint[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2020, 21(2): 316-323.

[59] Pal R, Datta A, Dougherty E R. Optimal infinite-horizon control for probabilistic Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(6): 2375-2387.

[60] Liu Q, Guo X, Zhou T. Optimal control for probabilistic

Boolean networks[J]. IET Systems Biology, 2010, 4(2): 99-107.
[61] Liu Y, Chen H W, Lu J Q, et al. Controllability of probabilistic Boolean control networks based on transition probability matrices[J]. Automatica, 2015, 52: 340-345.
[62] Liu J, Liu Y, Guo Y, et al. Sampled-data state-feedback stabilization of probabilistic Boolean control networks: A control Lyapunov function approach[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(9): 3928-3937.
[63] Zhou R P, Guo Y Q, Wu Y H, et al. Asymptotical feedback set stabilization of probabilistic Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 31(11): 4524-4537.
[64] Wang B, Feng J E. On detectability of probabilistic Boolean networks[J]. Information Sciences, 2019, 483: 383-395.
[65] Han X G, Yang W D, Chen X Y, et al. Detectability verification of probabilistic Boolean networks[J]. Information Sciences, 2021, 548: 313-327.
[66] Meng M, Xiao G X, Zhai C, et al. Controllability of Markovian jump Boolean control networks[J]. Automatica, 2019, 106: 70-76.
[67] Zhang Q L, Feng J E, Yan Y Y. Finite-time pinning stabilization of Markovian jump Boolean networks[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(11): 7020-7036.
[68] Meng M, Liu L, Feng G. Stability and l_1 gain analysis of Boolean networks with Markovian jump parameters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 4222-4228.
[69] Huang C, Ho D W C, Lu J Q, et al. Synchronization of an array of coupled probabilistic Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, DOI: 10.1109/TSMC.2021.3073201.
[70] Li F F, Lu X W, Yu Z X. Optimal control algorithms for switched Boolean network[J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(6): 3490-3501.
[71] Zhang Q L, Feng J E, Zhao Y, et al. Stabilization and set stabilization of switched Boolean control networks via flipping mechanism[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2021, 41: 101055.
[72] Yu Y Y, Meng M, Feng J E, et al. Stabilizability analysis and switching signals design of switched Boolean networks[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2018, 30: 31-44.
[73] Zou Y L, Zhu J D. Cycles of periodically time-variant Boolean networks[J]. Automatica, 2015, 51: 175-179.
[74] Gao Y, Liu C C, Wang J Q. Stabilization of periodic switched k-valued logical networks[J]. IEEE Access, 2021, 9: 74488-74498.
[75] Wang B, Feng J E, Meng M. Output tracking of periodically time-variant Boolean control networks[C]. The 36th Chinese Control Conference. Dalian, 2017: 2355-2360.
[76] Zhang Q L, Feng J E, Pan J F, et al. Set controllability for switched Boolean control networks[J]. Neurocomputing, 2019, 359: 476-482.
[77] Xu X J, Liu Y S, Li H T, et al. Robust set stabilization of Boolean control networks with impulsive effects[J]. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2018, 23(4): 553-567.
[78] Li H T, Xu X J, Ding X Y. Finite-time stability analysis of stochastic switched Boolean networks with impulsive effect[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 347: 557-565.
[79] Lin L, Cao J D, Lu G P, et al. Set stabilization of Boolean control networks with impulsive effects: An event-triggered approach[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 67(7): 1244-1248.
[80] Li Y L, Li J J, Feng J E. Set controllability of Boolean control networks with impulsive effects[J]. Neurocomputing, 2020, 418: 263-269.
[81] Xu X J, Li H T, Li Y L, et al. Output tracking control of Boolean control networks with impulsive effects[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2018, 41(4): 1554-1564.
[82] Li Y L, Li J J, Feng J E. Output tracking of Boolean control networks with impulsive effects[J]. IEEE Access, 2020, 8: 157793-157799.
[83] Shen Y W, Guo Y Q, Gui W H. Stability of Boolean networks with state-dependent random impulses[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2021, 22(2): 222-231.
[84] Lin L, Cao J D, Zhu S Y, et al. Sampled-data set stabilization of impulsive Boolean networks based on a hybrid index model[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2020, 7(4): 1859-1869.
[85] Guo Y Q, Shen Y W, Gui W H. Asymptotical stability of logic dynamical systems with random impulsive disturbances[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(2): 513-525.
[86] Zhang K Z, Johansson K H. Efficient verification of observability and reconstructibility for large Boolean control networks with special structures[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(12): 5144-5158.
[87] Zhao Y, Ghosh B K, Cheng D Z. Control of large-scale Boolean networks via network aggregation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 27(7): 1527-1536.
[88] Li H T, Wang Y Z. Logical matrix factorization with application to topological structure analysis of Boolean network[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(5): 1380-1385.
[89] Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q, et al. Stability and stabilization of Boolean networks[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(2): 134-156.
[90] Laschov D, Margaliot M. Controllability of Boolean

control networks via the Perron-Frobenius theory[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1218-1223.

[91] 王彪, 冯俊娥. 关于布尔控制网络的能观性和能检性的研究现状[J]. 控制与决策, 2020, 35(9): 2049-2058. (Wang B, Feng J E. Recent development on observability and detectability of Boolean control networks[J]. Control and Decision, 2020, 35(9): 2049-2058.)

[92] Cheng D Z, Li C X, He F H. Observability of Boolean networks via set controllability approach[J]. Systems & Control Letters, 2018, 115: 22-25.

[93] Zhong J, Ho D W C, Lu J Q, et al. Pinning controllers for activation output tracking of Boolean network under one-bit perturbation[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(9): 3398-3408.

[94] Zhang X, Wang Y H, Cheng D Z. Output tracking of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(6): 2730-2735.

[95] Yu Y Y, Feng J E, Pan J F, et al. Block decoupling of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(8): 3129-3140.

[96] Li H T, Yang X R, Wang S L. Robustness for stability and stabilization of Boolean networks with stochastic function perturbations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(3): 1231-1237.

[97] Li H T, Yang X R, Wang S L. Perturbation analysis for finite-time stability and stabilization of probabilistic Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(9): 4623-4633.

[98] Li X D, Li H T, Zhao G D. Function perturbation impact on feedback stabilization of Boolean control networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2019, 30(8): 2548-2554.

[99] Li H T, Wang S L, Li X D, et al. Perturbation analysis for controllability of logical control networks[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2020, 58(6): 3632-3657.

[100] Wang S L, Li H T. Graph-based function perturbation analysis for observability of multivalued logical networkss[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2021, 32(11): 4839-4848.

[101] Li F F, Lu X W. Minimum energy control and optimal-satisfactory control of Boolean control network[J]. Physics Letters A, 2013, 377(43): 3112-3118.

[102] Meng M, Lam J, Feng J E, et al. l_1-gain analysis and model reduction problem for Boolean control networks[J]. Information Sciences, 2016, 348: 68-83.

[103] Liu Z Q, Cheng D Z. Canonical form of Boolean networks[C]. Chinese Control Conference. Guangzhou, 2019: 1801-1806.

[104] Jia Y Z, Cheng D Z, Feng J E. State feedback stabilization of generic logic systems via Ledley antecedence solution[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, DOI: 10.1002/mma.7554, 2021.

[105] Liu Z Q, Cheng D Z, Liu J B. Pinning control of Boolean networks via injection mode[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2021, 8(2): 749-756.

[106] Li F F. Pinning control design for the stabilization of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2016, 27(7): 1585-1590.

[107] Lu J Q, Liu R J, Lou J G, et al. Pinning stabilization of Boolean control networks via a minimum number of controllers[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(1): 373-381.

[108] Li F F, Tang Y. Pinning controllability for a Boolean network with arbitrary disturbance inputs[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(6): 3338-3347.

[109] Chen B Q, Yang X Y, Liu Y, et al. Controllability and stabilization of Boolean control networks by the auxiliary function of flipping[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(14): 5529-5541.

[110] 程代展, 齐洪胜, 刘挺, 等. 从矩阵半张量积到逻辑控制系统[J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(10): 1401-1424. (Cheng D Z, Qi H S, Liu T, et al. From semi-tensor product of matrices to logical control systems[J]. Scientia Sinica: Mathematica, 2016, 46(10): 1401-1424.)

[111] Lu J Q, Li H T, Liu Y, et al. Survey on semi-tensor product method with its applications in logical networks and other finite-valued systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(13): 2040-2047.

[112] Leifeld T, Zhang Z H, Zhang P. Overview and comparison of approaches towards an algebraic description of discrete event systems[J]. Annual Reviews in Control, 2019, 48: 80-88.

[113] 冯俊娥, 李怡靓, 赵建立. 四种半张量积及其代数关系[J]. 聊城大学学报: 自然科学版, 2020, 33(4): 1-7. (Feng J E, Li Y L, Zhao J L. Four kinds of semi-tensor products and their relationships[J]. Journal of Liaocheng University: Natural Science Edition, 2020, 33(4): 1-7.)

[114] Cheng D Z, Xu Z H, Shen T L. Equivalence-based model of dimension-varying linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(12): 5444-5449.

[115] Zhang Q L, Wang B, Feng J E. Solution and stability of continuous-time cross-dimensional linear systems[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2021, 22(2): 210-221.

[116] Cheng D Z, Qi H S, Liu Z Q. Linear system on dimension-varying state space[C]. IEEE 14th International Conference on Control and Automation. Anchorage, 2018: 112-117.

[117] Zhang K Z, Johansson K H. Long-term behavior of cross-dimensional linear dynamical systems[C]. The 37th Chinese Control Conference. Wuhan, 2018: 158-163.

[118] Feng J E, Wang B, Yu Y Y. On dimensions of linear discrete dimension-unbounded systems[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2021, 19(1): 471-477.

[119] Zhao P X, Guo H F, Yu Y Y, et al. On dimensions

of dimension-bounded linear systems[J]. Science China Information Sciences, 2020, 64(5): 1-3.
[120] Zhang Q L, Wang B, Feng J E. On stability and stabilization of continuous-time cross-dimensional linear systems[C]. Chinese Control and Decision Conference. Nanchang, 2019: 1118-1123.
[121] Li Y L, Feng J E, Li J J. Reachability of dimension-bounded linear systems[J/OL]. 2021, arXiv: 2108.03889.
[122] Cheng D Z. On equivalence of matrices[J]. Asian Journal of Mathematics, 2019, 23(2): 257-348.
[123] Heidel J, Maloney J, Farrow C, et al. Finding cycles in synchronous Boolean networks with applications to biochemical systems[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2003, 13(3): 535-552.
[124] Cheng D Z, Liu Z Q, Qi H S. Completeness and normal form of multi-valued logical functions[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(14): 9871-9884.
[125] Cheng D Z, Feng J E, Zhao J L, et al. On adequate sets of multi-valued logic[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(13): 6705-6722.
[126] Cheng D Z, Feng J E, Zhao J L, et al. A minimum adequate set of multi-valued logic[J]. Control Theory and Technology, DOI: 10.1007/s11768-021-00064-w6-CTT-20713.R1.
[127] Zou Y L, Zhu J D. System decomposition with respect to inputs for Boolean control networks[J]. Automatica, 2014, 50(4): 1304-1309.
[128] Zou Y L, Zhu J D. Graph theory methods for decomposition w.r.t. outputs of Boolean control networks[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2017, 30(3): 519-534.
[129] Zou Y L, Zhu J D. Kalman decomposition for Boolean control networks[J]. Automatica, 2015, 54: 65-71.
[130] Qiao Y P, Qi H S, Cheng D Z. Partition-based solutions of static logical networks with applications[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(4): 1252-1262.
[131] Qi H S, Qiao Y P. Dynamics and control of singular Boolean networks[J]. Asian Journal of Control, 2019, 21(6): 2604-2613.
[132] Lin G Q, Ao B, Chen J W, et al. Modeling and controlling the two-phase dynamics of the p53 network: A Boolean network approach[J]. New Journal of Physics, 2014, 16(12): 125010.
[133] Rafimanzelat M R, Bahrami F. Attractor controllability of Boolean networks by flipping a subset of their nodes[J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2018, 28(4): 043120.
[134] Rafimanzelat M R, Bahrami F. Attractor stabilizability of Boolean networks with application to biomolecular regulatory networks[J]. IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2019, 6(1): 72-81.
[135] Cheng D Z, Zhao Y, Kim J, et al. Approximation of Boolean networks[C]. Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation. Beijing, 2012: 2280-2285.
[136] Zhong J, Ho D W C, Lu J Q. A new approach to pinning control of Boolean networks[J/OL]. 2019, arXiv: 1912.01411.

作者简介

冯俊娥 (1971–), 女, 教授, 博士生导师, 从事逻辑动态系统分析与控制等研究, E-mail: fengjune@sdu.edu.cn;

李怡靓 (1994–), 女, 博士生, 从事逻辑动态系统分析与控制的研究, E-mail: liyiliang@mail.sdu.edu.cn;

赵荣 (1997–), 女, 硕士生, 从事布尔网络的研究, E-mail: zhaorongjy1126@163.com.

科研团队简介

冯俊娥教授科研团队立足于山东大学数学学院,长期专注于逻辑网络与鲁棒控制方面的研究,一直倡导将前沿性基础研究成果与实际应用需求紧密结合. 团队近年来对布尔网络、受限逻辑网络、有限自动机、有限演化博弈等几类有限值动态系统的分析与控制进行了深入研究,这些系统在基因调控、信息安全、电子电路、宏观经济等诸多领域有着广泛应用,取得了一系列高质量的科研成果,获得了国内外同行专家的广泛关注和高度评价. 该团队以矩阵半张量积为工具,提出了逻辑矩阵方程的规范解,逻辑网络 l_1 增益等概念,解决了逻辑网络的模型降阶问题;建立了奇异布尔网络、隐布尔网络等受限逻辑网络模型,发展和丰富了逻辑网络的理论框架. 相关成果可应用于分析生化振荡器、交叉路口流量、逻辑电路故障诊断、大肠杆菌乳糖操纵子等实际问题,给出预测、诊断和相应的控制方案,为逻辑网络的实际应用奠定了坚实的基础.

团队带头人冯俊娥教授主持国家及省部级自然科学基金项目10余项,提任中国自动化学会控制理论与应用专业委员会“逻辑系统控制”学组主任,中国自动化学会“信息物理系统控制与决策专业委员会”委员,山东省自动化学会理事,美国数学评论评论员,《Cogent Mathematics & Statistics》编委,《Mathematical Modelling and Control》编委,《控制与决策》编委,IEEE控制系统学会编委. 团队在IEEE T AUTOMAT CONTR、AUTOMATICA、IEEE T NEUR NET LEAR、INT J ROBUST NONLIN等国内外权威控制论期刊共计发表SCI收录论文100余篇,EI论文50余篇,近五年累计国际和国内会议特邀报告40余次.

(责任编辑: 郑晓蕾)