

# 控制与决策

Control and Decision

## 多智能体系统的多步近似次梯度随机投影优化算法

高文华, 钟衍楠

引用本文:

高文华, 钟衍楠. 多智能体系统的多步近似次梯度随机投影优化算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(2): 431–437.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0888>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 有理模型辨识的两类新方法——混合迭代与柔性最小二乘法

Two novel identification methods for rational models—Compound iterative algorithm and flexible least squares algorithm

控制与决策. 2022, 37(1): 58–66 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0935>

### 基于观测器的网络化多智能体预测控制

Observer-based networked multi-agent predictive control

控制与决策. 2021, 36(9): 2290–2296 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1801>

### 基于协同控制的串联超级电容电压均衡策略

Voltage equalization strategy for series-connected ultracapacitors based on cooperative control

控制与决策. 2021, 36(8): 1997–2001 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1736>

### 基于神经网络的电力系统暂态稳定分布式自适应控制

Neural network-based distributed adaptive control for power system transient stability

控制与决策. 2021, 36(6): 1407–1414 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1168>

### 基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 $H_\infty$ 控制

Non-fragile  $H_\infty$  control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model

控制与决策. 2021, 36(5): 1087–1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

# 多智能体系统的多步近似次梯度随机投影优化算法

高文华<sup>†</sup>, 钟衍楠

(华南理工大学 数学学院, 广州 510640)

**摘要:** 基于切换网络下带有随机时延和随机通讯噪声的多智能体系统模型, 提出分布式多步近似次梯度随机投影算法, 并对算法的收敛性进行分析. 首先, 利用网络扩维的方法将含随机时延的通讯网络转化为无时延网络; 其次, 提出近似次梯度概念, 并设计多步近似次梯度随机批量投影算法, 批量随机投影可以避免在实际问题中整体约束集合不易获得而导致投影算子不易执行等情况; 最后, 通过数值仿真表明即使存在随机噪声, 所提出的算法较一般的分布式多步次梯度算法具有更好的收敛效果, 同时还分析了随机投影集合个数和随机噪声对收敛效果的影响.

**关键词:** 多智能体; 分布式优化; 切换网络; 次梯度; 随机投影; 时延

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0888

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 高文华, 钟衍楠. 多智能体系统的多步近似次梯度随机投影优化算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(2): 431-437.

## Multi-step approximate subgradient random projection optimization algorithm for multi-agent system

GAO Wen-hua<sup>†</sup>, ZHONG Yan-nan

(School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

**Abstract:** Based on a multi-agent system model with random delay and random communication noise under a switched network, a distributed multi-step approximate subgradient random projection algorithm is proposed, and the algorithm convergence analysis is performed. Firstly, we convert a network with random communication delay into a network without delay by using a network expansion method. Then, we propose the concept of approximate subgradient, and design a multi-step approximate subgradient batch random projection algorithm. A batch random projection method is used to deal with the executive problem of projection operators when the overall constraint set is not easy to obtain in practical problems. Finally, the numerical simulations show that the proposed algorithm has better convergence effects than the general distributed multi-step subgradient algorithm even if there exists random noise. And the effect of the number of random projection sets and random noise are also discussed.

**Keywords:** multi-agent; distributed optimization; switching topology; subgradient; random projection; time delay

## 0 引言

近年来,多智能体系统的分布式优化已经融入到人工智能、机器学习、无线传感器网络和计算设备通讯<sup>[1-5]</sup>等许多领域,并得到了广泛地研究和应用.

在离散型分布式算法的研究中,基于梯度的分布式算法是采用较多的方法.随着研究的深入和多智能体系统应用场景的增多,一般不可微的多智能体系统模型逐渐得到关注,如文献[6]讨论了切换网络下不可微的目标函数且带约束的分布式优化问题,提出了次梯度投影算法并进行了收敛性分析.尽管分布式次梯度法较分布式梯度法有更广的适用范围,但

不可避免地在收敛速率上较分布式梯度算法会慢一些.文献[7]提出了一种分布式多步次梯度算法,在计算下降方向时,智能体除了利用自身当前时刻的次梯度外,还利用了个体从开始时刻到当前时刻整个时段内的历史次梯度信息来组成多步次梯度,仿真验证表明,多步次梯度算法较一般次梯度算法具有更快的收敛速率.针对带约束的分布式优化问题,一般在算法中加入投影算子来提高算法的精度.目前的大多数文献考虑的是向整体的约束集合或个体的约束集合上投影,这是因为在文献中一般都假设整体的约束集合是提前知道的.而通常在多智能体系统中,一方面,

收稿日期: 2020-07-03; 录用日期: 2021-01-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61803108); 广州市科技计划项目(202002030158).

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: whgao@scut.edu.cn.

个体的局部约束集仅由自己所知,具有一定的隐私性,这使得整体的约束集合在实际中变得不可得;另一方面,在考虑诸如大范围的无线广播网络等一些实际问题中,个体的局部子约束非常多,在实际中提前计算出整体约束集合会十分困难,因此对约束集合的细致化考虑很有必要.文献[8]提出了分布式随机投影梯度算法,用来解决一个大范围无线网络问题,首次将个体的局部约束集合假定为一组局部约束子集,当整体约束集合或个体的局部约束不易获得时,仅需将智能体沿梯度方向更新后的状态向从个体所有子约束中随机选出的单个子约束上投影,同样能够保证所有个体状态收敛到同一个最优值,这为本文研究整体约束集合不易获得的多智能体系统的分布式次梯度优化算法提供了思路.

多智能体系统中不可避免地存在通讯时延和通讯噪声.许多结果(如文献[9]~文献[11])表明,当系统存在有界通讯时延时,原来一些解决无时延下多智能体系统的分布式算法通过特殊的更新规则(如异步<sup>[12]</sup>),依然可以被证明是收敛的.但是算法的收敛性分析十分复杂.文献[13]提出一种网络扩维的方法,能够将有限固定时延网络转换为新的无时延网络.值得注意的是,在文献[13]的结论中,原通讯网络的邻接矩阵无论是单随机还是双随机,扩维后都是单随机的.

本文研究带有随机时延和随机通讯噪声的多智能体系统的分布式约束优化问题,主要工作如下:首先,利用网络扩维的方法,将含随机时延的通讯网络转化为无时延网络,同时保持网络的邻接矩阵的随机性,在理论上可简化算法的收敛性分析;其次,针对个体子约束数量巨大导致整体约束不易求得的情况,提出批量随机投影的方法,通过随机选取一定数量的子约束进行投影,既可避免实际中通过复杂计算得到整体约束集,也可保证投影的精度;再次,在放松系统通讯带宽的前提下,定义了个体的近似次梯度,提出分布式多步近似次梯度随机投影算法.数值仿真例子表明,所提出的算法比一般的分布式次梯度算法和分布式多步次梯度算法具有更好的收敛效果,并且分析了随机投影个数和随机噪声对收敛效果的影响.

本文符号介绍如下:

记 $0_m$ 是元素全为零的 $m$ 维列向量; $|D|$ 为集合 $D$ 的基数; $P_X[y]$ 为点 $y$ 到集合 $X$ 的投影; $E[z|\mathcal{F}]$ 表示随机变量 $z$ 在 $\sigma$ -代数 $\mathcal{F}$ 下的条件期望; $e_i(A)$ 为 $I_{\dim(A)}$ 的第 $i$ 列向量; $\xi_i(n)$ 为 $n$ 维单位矩阵 $I_n$ 的第 $i$ 列向量; $[\Phi(k,s)]_{ij}$ 表示矩阵 $[\Phi(k,s)]$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素; $z \sim U(1,B)$ 表示随机变量 $z$ 服从1到正整数 $B$ 的均匀分布.

## 1 模型与算法

考虑包含 $n$ 个智能体的带有随机通讯噪声和随机通讯时延的切换网络多智能体系统的优化问题

$$\min_x f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x); \text{ s.t. } x \in X = \bigcap_{i=1}^n X_i. \quad (1)$$

其中:系统的状态 $x \in X \subset R^m$ ;系统的整体约束集 $X = \bigcap_{i=1}^n X_i$ ;个体的成本函数 $f_i(x)$ 和约束 $X_i$ 仅由自身所知,不与其他个体共享.假设任意个体 $i$ 的局部约束 $X_i$ 均由一定数量的子约束相交而成,即 $\forall i \in V$ ,存在一系列子约束 $X_i^j (j \in I_i)$ ,使得 $X_i = \bigcap_{j \in I_i} X_i^j$ .其中: $X_i^j$ 是闭凸集; $I_i$ 称为 $i$ 的索引集,它包含个体 $i$ 的所有子约束的序号. $k$ 时刻系统通讯网络记为 $G(k) = (V, E(k))$ , $V$ 为顶点集, $E = \{(i,j)|i,j \in V\}$ 称为边集;对应的权重邻接矩阵为 $A(k)$ , $A(k)$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素记为 $a_{ij}(k)$ ;个体 $i$ 的局部成本函数记为 $f_i(x)$ ,并假设 $f_i(x)$ 为凸函数.

假设 $\varepsilon_{ij}(k)$ 为 $k$ 时刻通讯边 $(i,j)$ 上的随机噪声,当个体 $i$ 的邻居 $j$ 向 $i$ 发送自己的状态 $x_j(k)$ 时,个体 $i$ 实际接收到的信息为 $x_j(k) + \eta_k \varepsilon_{ij}(k)$ ,其中 $\eta_k$ 称为噪声 $\varepsilon_{ij}(k)$ 的衰减步长.

假设两个个体间默认通讯时间为1s,该时间不计入时延当中.假设任意时延边 $(i,j) \in E(k)$ 的时延值 $b_{ij}$ 是一个有界的随机正整数,它服从 $1 \sim B$ 的均匀分布.若 $(i,j)$ 无时延,则 $b_{ij} = 0$ .

任意选取列向量 $x_i(0) \in R^m (i = 1, \dots, n)$ ,作为个体 $i$ 的初值, $k$ 时刻个体 $i$ 的状态记为 $x_i(k)$ , $d_i(x)$ 为函数 $f_i(x)$ 在点 $x$ 处的一个次梯度.当问题(1)可解时,记 $x^*$ 为最优集 $X^*$ 中的一个最优点,其对应的最优值记为 $f^* = f(x^*)$ .本文所提出的分布式多步近似次梯度随机投影算法如下:

$$v_i(k+1) = \gamma_k \sum_{j=1}^n a_{ij}(k) v_j(k) + \alpha_k \tilde{d}_i(k); \quad (2)$$

$$y_i^0(k) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(k) [x_j(k - b_{ij}) + \eta_k \varepsilon_{ij}(k)] - v_i(k+1); \quad (3)$$

$$y_i^p(k) = P_{X_i^{\omega_i^p(k)}} [y_i^{p-1}(k)], \quad p = 1, \dots, b; \quad (4)$$

$$x_i(k+1) = y_i^b(k). \quad (5)$$

其中: $\{\gamma_k\}$ 、 $\{\alpha_k\}$ 和 $\{\eta_k\}$ 均为非负递减序列,且满足

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k &= +\infty, & \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k^2 &< +\infty, & \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k &= +\infty, \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k^2 &< +\infty, & \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k &= +\infty, & \sum_{k=1}^{+\infty} \eta_k^2 &< +\infty; \end{aligned}$$

符号 $\tilde{d}_i(k)$ 见下面定义1.

**定义1** 记 $\tilde{d}_i(k)$ 为 $k$ 时刻,个体 $i$ 在 $x_i(k)$ 处的近

似次梯度,定义如下:

$$\tilde{d}_i(k) = \frac{d_i(x_i(k)) + d_{j_1}(x_i(k)) + \dots + d_{j_{p_i(k)-1}}(x_i(k))}{p_i(k)}$$

其中:  $j_1, \dots, j_{p_i(k)-1}$  为从  $i$  的邻居集  $N_i(k)$  中随机选取出来的  $p_i(k) - 1$  个个体,彼此之间相互独立;  $k$  时刻,正整数  $p_i(k)$  被称为近似参数,其选择服从  $2 \sim |N_i(k)| + 1$  的均匀分布,不同个体间的近似参数  $p_1(k), \dots, p_n(k)$  也是相互独立的.

在式(4)执行投影时,先从局部子约束集中随机选取  $b$  个子约束  $X_i^{\omega_i^1(k)}, \dots, X_i^{\omega_i^b(k)}$ ,在任意时刻  $k$ ,关于  $\{\omega_i^1(k), \dots, \omega_i^b(k)\}$  的选取都是相互独立的,且与  $0, \dots, k - 1$  时刻的选取都无关. 常数  $b$  为批量投影个数,其值一般取为  $\min_{i \in V} \{|I_i|\}$ .

下面给出一些必要的假设.

**假设1** 任意个体  $i$  的成本函数  $f_i(x)$  在任意点  $x$  处的次梯度  $d_i(x)$  有界,即存在常数  $G_f$ ,使得  $\|d_i(x)\| \leq G_f, \forall x \in X, i \in V$ .

**假设2** 网络拓扑图  $G(k)$  是联合强连通的,即存在正整数  $W$ ,对于任意正整数  $l$ ,图  $\bigcup_{i=1}^W G(i+l)$  是强连通的.

**假设3** 在任意时刻  $k$ ,邻接矩阵  $A(k)$  是双随机,且非负的权重有下界  $\varsigma$ .

$$\exists \varsigma > 0; \text{ s.t. } a_{ij}(k) > \varsigma, \forall (i, j) \in E(k).$$

**假设4** 整体约束集  $X$  有界,即存在常数  $C_B > 0$ ,使得  $\|x\| \leq C_B, \forall x \in X$ .

**假设5** 任意边  $(i, j)$  上的随机噪声  $\varepsilon_{ij}(k)$  是一个鞅差序列,满足

$$E[\varepsilon_{ij}(k)|\mathcal{F}_{k-1}] = 0, E[\|\varepsilon_{ij}(k)\|^2|\mathcal{F}_{k-1}] < \zeta.$$

其中:  $\zeta > 0$  为常数;  $\mathcal{F}_k$  为包含时刻  $k$  之前的所有随机变量的  $\sigma$  代数,即

$$\mathcal{F}_k = \{x_i(0), v_i(0), p_i(s), \varepsilon_{ij}(s); i \in V, 0 \leq s \leq k\} \cup$$

$$\{\omega_i^p(l); 0 \leq l \leq k - 1, 1 \leq p \leq b, i \in V\},$$

$$\mathcal{F}_0 = \{x_i(0), v_i(0), p_i(0), \varepsilon_{ij}(0); i \in V\}.$$

给定  $\mathcal{F}_k$ ,由算法(2)~(5)生成的  $v_i(0), \dots, v_i(k)$  和  $x_i(0), \dots, x_i(k)$  就全部确定了.

注意到算法(3)中存在时延,在进行算法收敛性分析时,会造成较为复杂的分析过程<sup>[14]</sup>. 笔者在文献[15]中提出一种网络扩维的法则,可以保证扩维后的邻接矩阵与原邻接矩阵有相同的随机性,进而可以简化收敛性分析. 本文考虑的是随机时延,无论时延边的时延具体是多少,都按照最大时延来进行扩维,扩维后邻接矩阵由  $A(k)$  变为  $Q(k)$ ,具体扩维方法和记号参见文献[15].

扩维后含时延的算法(2)~(5)转变为如下不含

时延的算法:

$$v_i(k+1) = \gamma_k \sum_{j=1}^{n+\bar{b}} q_{ij}(k) v_j(k) + \alpha_k \tilde{d}_i(k); \quad (6)$$

$$y_i^0(k) = \sum_{j=1}^{n+\bar{b}} q_{ij}(k) [x_j(k) + \eta_k \varepsilon_{ij}(k)] - v_i(k+1); \quad (7)$$

$$y_i^p(k) = P_{X_i^{\omega_i^p(k)}} [y_i^{p-1}(k)], p = 1, \dots, b; \quad (8)$$

$$x_i(k+1) = y_i^b(k). \quad (9)$$

## 2 收敛性分析

为证明算法的收敛性,需要一些基本引理. 参见文献[15]中的引理1、引理2、引理4、引理5以及对应的参考文献,类似于文献[15]中引理3的证明,可得下面的引理.

**引理1** 若假设1~假设5的条件均成立,则对于任意  $\tilde{x} \in X$ ,有如下估计式成立:

$$\|x_i(k+1) - \tilde{x}\|^2 \leq \|\omega_i(k) - \tilde{x}\|^2 + \iota^2 G_f^2 \left[ \left( \theta\beta + \frac{1}{n+\bar{b}} \right) \gamma_k + \alpha_k \right]^2 + \eta_k \|\varepsilon_i(k)\|^2 - 2v_i(k+1)^T (\omega_i(k) - \tilde{x}).$$

其中:  $\iota = \max \left\{ \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}, 1 \right\}, \sum_{j=1}^{n+\bar{b}} q_{ij}(k) x_j(k) = \omega_i(k)$ ,

$$\varepsilon_i(k) = \sum_{j=1}^{n+\bar{b}} q_{ij}(k) \varepsilon_{ij}(k).$$

**引理2** 在假设1~假设5成立的前提下,记  $\bar{x}(k) = \frac{1}{n+\bar{b}} \sum_{l=1}^{n+\bar{b}} x_l(k)$ ,其中  $x_l(k)$  由算法(6)~(9)生成,则如下结论成立:

- 1)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_i(k) - \bar{x}(k)\| = 0$  a.s.,  $\forall i \in \tilde{V}$ ;
- 2)  $\alpha_k \max_{i \in \tilde{V}} \{\|x_i(k) - \bar{x}(k)\|\}$  是可加的,  $\forall i \in \tilde{V}$ , 有

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4p_i(k) + 2}{p_i(k)} \alpha_k \max_{i \in \tilde{V}} \{\|x_i(k) - \bar{x}(k)\|\} < +\infty \text{ a.s.}$$

**证明** 1) 将  $x_i(k+1)$  和  $\bar{x}(k+1)$  按算法(6)~(9)回溯迭代到初始时刻,有

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= \sum_{i=1}^{n+\bar{b}} [\Phi(k, 0)]_{ij} x_j(0) - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n+\bar{b}} [\Phi(k, r+1)]_{ij} v_j(r+1) - \\ &v_i(k+1) + \sum_{r=0}^k \sum_{j=1}^{n+\bar{b}} [\Phi(k, r)]_{ij} \eta_r \varepsilon_{ij}(r) + \\ &\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n+\bar{b}} [\Phi(k, r+1)]_{ij} \phi_j(r) + \phi_i(k), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \bar{x}(0) + \frac{1}{n+\bar{b}} \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n+\bar{b}} \phi_j(r) + \frac{1}{n+\bar{b}} \sum_{i=1}^{n+\bar{b}} \phi_i(k) + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n+\tilde{b}} \sum_{r=0}^k \eta_r \varepsilon_{ij}(r) - \frac{1}{n+\tilde{b}} \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} v_j(r+1) - \frac{1}{n+\tilde{b}} \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} v_i(k+1). \quad (11)$$

将  $v_i(k+1)$  从  $k$  迭代到 0, 注意到  $v_i(0) = 0$ , 则

$$v_i(k+1) = \gamma_k \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} a_{ij}(k) v_j(k) + \alpha_k \tilde{d}_i(k) = \prod_{\tau=0}^k \gamma_\tau \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} [\Phi(k, 0)]_{ij} v_j(0) + \alpha_k \tilde{d}_i(k) + \sum_{r=0}^{k-1} \left( \prod_{\tau=r+1}^k \gamma_\tau \right) \alpha_r \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} [\Phi(k, r+1)]_{ij} \tilde{d}_j(r) = \sum_{r=0}^{k-1} \left( \prod_{\tau=r+1}^k \gamma_\tau \right) \alpha_r \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} [\Phi(k, r+1)]_{ij} \tilde{d}_j(r) + \alpha_k \tilde{d}_i(k) \leq \sum_{r=0}^{k-1} \left( \prod_{\tau=r+1}^k \gamma_\tau \right) \alpha_r \left( \theta \beta^{k-r-1} + \frac{1}{n+\tilde{b}} \right) G_f + \alpha_k \tilde{d}_i(k).$$

由  $\gamma_k$  是递减序列可推得

$$\|v_i(k+1)\| \leq \sum_{r=0}^{k-1} \left( \prod_{\tau=r+1}^k \gamma_\tau \right) \alpha_r \left( \theta \beta^{k-r-1} + \frac{1}{n+\tilde{b}} \right) G_f + \alpha_k G_f \leq \sum_{r=0}^{k-1} \gamma_{r+1}^{k-r+1} \gamma_k \left( \theta \beta^{k-r-1} + \frac{1}{n+\tilde{b}} \right) G_f + \alpha_k G_f \leq \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1} \left( \theta \beta^{k-r-1} + \frac{1}{n+\tilde{b}} \right) G_f \gamma_k + \alpha_k G_f \leq \iota G_f \left[ \left( \theta \beta^{k-r-1} + \frac{1}{n+\tilde{b}} \right) \gamma_k + \alpha_k \right]. \quad (12)$$

根据文献[15]中引理5和式(10)~(12)可得

$$E[\|x_i(k+1) - \bar{x}(k+1)\| | \mathcal{F}_k] \leq \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \left| [\Phi(k, 0)]_{ij} - \frac{1}{n+\tilde{b}} \right| \cdot \|x_j(0)\| + \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} \left| [\Phi(k, r+1)]_{ij} - \frac{1}{n+\tilde{b}} \right| \cdot \|v_j(r+1)\| + \frac{1}{n+\tilde{b}} \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \|v_i(k+1)\| + \sum_{r=0}^k \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} \left| [\Phi(k, r)]_{ij} - \frac{1}{n+\tilde{b}} \right| \cdot \|\eta_r \varepsilon_{ij}(r)\| + \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} \left| [\Phi(k, r+1)]_{ij} - \frac{1}{n+\tilde{b}} \right| \cdot \|v_j(r+1)\| + \frac{1}{n+\tilde{b}} \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \|\phi_i(k+1)\| + \|\phi_i(k+1)\| \leq \theta \beta^k \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} \|x_j(0)\| + (n+\tilde{b}) \theta \iota G_f (\gamma_k + \alpha_k) \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \beta^{k-r-1} +$$

$$2\iota G_f (\gamma_k + \alpha_k) + (n+\tilde{b}) \zeta \theta \sum_{r=0}^k \eta_r \|\varepsilon_{ij}(r)\| + \theta \sum_{r=0}^{k-1} \beta^{k-r-1} \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} \|v_j(r+1)\| + 2\|\phi_i(k+1)\| \leq \theta \beta^k \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \|x_j(0)\| + 2(n+\tilde{b}) \theta \iota G_f (\gamma_k + \alpha_k) \sum_{r=0}^{k-1} \beta^{k-r-1} + 4\iota G_f (\gamma_k + \alpha_k) + (n+\tilde{b}) \zeta \theta \sum_{r=0}^k \eta_r \beta^{k-r}.$$

由文献[15]中引理5及  $\alpha_k \rightarrow 0$ , 可得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_i(k) - \bar{x}(k)\| = 0 \text{ a.s.}$$

2) 根据不等式  $2ab \leq a^2 + b^2$  可得

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \max_{i \in \tilde{V}} \{\|x_i(k) - \bar{x}(k)\|\} \leq \theta \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \|x_j(0)\| \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \beta^k + 2(n+\tilde{b}) \theta \iota G_f \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (\gamma_k + \alpha_k) \sum_{r=0}^{k-1} \beta^{k-r-1} + 4\iota G_f \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (\gamma_k + \alpha_k) + (n+\tilde{b}) \zeta \theta \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^k \alpha_k \eta_r \beta^{k-r} \leq \theta \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \|x_j(0)\| \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \beta^k + 3(n+\tilde{b}) \theta \iota G_f \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{k-1} \alpha_k^2 \beta^{k-r-1} + (n+\tilde{b}) \theta \iota G_f \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{k-1} \gamma_k^2 \beta^{k-r-1} + 6\iota G_f \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k^2 + 2\iota G_f \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k^2 + \frac{\zeta \theta}{2} (n+\tilde{b}) \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^k (\alpha_k^2 + \eta_r^2) \beta^{k-r}.$$

由文献[15]中引理4可得

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \max_{i \in \tilde{V}} \{\|x_i(k) - \bar{x}(k)\|\} < +\infty \text{ a.s.} \quad \square$$

**定理1** 若假设1~假设5均成立, 问题(1)的最优集  $X^*$  非空, 则存在最优点  $x^* \in X^*$ , 使得对于任意个体  $i \in \tilde{V}$ , 算法(6)~(9)生成的状态序列  $x_i(k)$  几乎处处收敛到  $x^*$ , 即  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_i(k) = x^* \text{ a.s.}$

**证明** 由引理1, 有

$$\sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \|x_i(k+1) - x^*\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \|\omega_i(k) - x^*\|^2 +$$

$$\sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \iota^2 G_f^2 \left[ \left( \theta \beta^{k-r-1} + \frac{1}{n+\tilde{b}} \right) \gamma_k + \alpha_k \right]^2 - 2 \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} v_i(k+1)^T (\omega_i(k) - x^*) + \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \eta_k^2 \|\varepsilon_i(k)\|^2. \quad (13)$$

利用不等式  $2ab \leq a^2 + b^2$ , 同时记  $\Gamma(k) = \sum_{r=0}^{k-1} \left( \prod_{\tau=r+1}^k \gamma_\tau \right) \alpha_r$ , 可得

$$\begin{aligned} & -2 \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} v_i(k+1)^T (\omega_i(k) - x^*) = \\ & -2 \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \left[ \Gamma(k) \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} [\Phi(k, r+1)]_{ij} \tilde{d}_j(r) \right]^T (\omega_i(k) - x^*) - \\ & 2 \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \alpha_k \tilde{d}_i(k)^T (\omega_i(k) - x^*) \leq \\ & \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \left[ C_B^2 \left\| \Gamma(k) \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} [\Phi(k, r+1)]_{ij} \tilde{d}_j(r) \right\|^2 \right] - \\ & 2 \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \alpha_k \tilde{d}_i(k)^T (\omega_i(k) - x^*). \end{aligned} \quad (14)$$

因为  $-\tilde{d}_i(k)^T (\omega_i(k) - x^*) = \tilde{d}_i(k)^T (x^* - x_i(k)) + \tilde{d}_i(k)^T (x_i(k) - \omega_i(k))$ , 根据  $\tilde{d}_i(k)$  的定义, 可得

$$\begin{aligned} & \tilde{d}_i(k)^T (x^* - x_i(k)) = \\ & \frac{1}{p_i(k)} d_i(k)^T (x^* - x_i(k)) + \\ & \frac{1}{p_i(k)} d_{j_1}(x_i(k))^T (x^* - x_i(k)) + \dots + \\ & \frac{1}{p_i(k)} d_{j_{p_i(k)-1}}(x_i(k))^T (x^* - x_i(k)) \leq \\ & \frac{1}{p_i(k)} [f_i(x^*) - f_i(x_i(k))] + \\ & \frac{1}{p_i(k)} [f_{j_1}(x^*) - f_{j_1}(x_i(k))] + \dots + \\ & \frac{1}{p_i(k)} [f_{j_{p_i(k)-1}}(x^*) - f_{j_{p_i(k)-1}}(x_i(k))] \leq \\ & \frac{1}{p_i(k)} [f_i(x^*) - f_i(\bar{x}(k))] + \\ & \frac{1}{p_i(k)} [f_i(\bar{x}(k)) - f_i(x_i(k))] \leq \\ & -\frac{1}{p_i(k)} [f_i(\bar{x}(k)) - f_i(x^*)] + \\ & \frac{1}{p_i(k)} d_i(\bar{x}(k))^T (\bar{x}(k) - x_i(k)) \leq \\ & -\frac{1}{p_i(k)} [f_i(\bar{x}(k)) - f_i(x^*)] + \\ & \frac{G_f}{p_i(k)} \max_{i \in \tilde{V}} \{ \|\bar{x}(k) - x_i(k)\| \}. \end{aligned} \quad (15)$$

根据范数的三角不等式, 可得

$$\tilde{d}_i(k)^T (x_i(k) - \omega_i(k)) \leq$$

$$\begin{aligned} & G_f \|x_i(k) - \bar{x}(k)\| + G_f \|\bar{x}(k) - \omega_i(k)\| \leq \\ & 2G_f \max_{i \in \tilde{V}} \{ \|\bar{x}(k) - x_i(k)\| \}. \end{aligned} \quad (16)$$

于是, 由式(14)~(16), 式(13)可整理成

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \|x_i(k+1) - x^*\|^2 \leq \\ & \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \|\omega_i(k) - x^*\|^2 + \\ & \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \iota^2 G_f^2 \left[ \left( \theta \beta^{k-r-1} + \frac{1}{n+\tilde{b}} \right) \gamma_k + \alpha_k \right]^2 + \\ & \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \eta_k^2 \|\varepsilon_i(k)\|^2 - 2\alpha_k [f(\bar{x}) - f(x^*)] + \\ & \frac{4p_i(k) + 2}{p_i(k)} (n + \tilde{b}) G_f \alpha_k \max_{i \in \tilde{V}} \{ \|\bar{x}(k) - x_i(k)\| \} + \\ & \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \left\| \Gamma(k) \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} [\Phi(k, r+1)]_{ij} \tilde{d}_j(r) \right\|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

由文献[15]中引理5和双随机矩阵的定义, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \left\| \Gamma(k) \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} [\Phi(k, r+1)]_{ij} \tilde{d}_j(r) \right\|^2 \leq \\ & G_f^2 \|\Gamma(k)\|^2 \sum_{i=1}^{n+\tilde{b}} \left\| \sum_{j=1}^{n+\tilde{b}} [\Phi(k, r+1)]_{ij} \right\|^2 \leq \\ & (n + \tilde{b}) G_f^2 \|\Gamma(k)\|^2 \left( \theta \beta^{k-r-1} + \frac{1}{n+\tilde{b}} \right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

根据  $\Gamma(k)$  的定义有

$$\begin{aligned} & \|\Gamma(k)\|^2 \left( \theta \beta^{k-r-1} + \frac{1}{n+\tilde{b}} \right)^2 \leq \\ & \left( \theta \beta^{k-r-1} + \frac{1}{n+\tilde{b}} \right)^2 \left\| \sum_{r=0}^{k-1} \gamma_1^{k-r-2} \alpha_r \gamma_r \right\|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

因此, 由假设1~假设5、引理2和式(18)、(19)知(17)右边是收敛的. 根据文献[15]中引理2, 存在  $x^* \in X^*$ , 使得  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_i(k) = x^*$  a.s.  $\square$

### 3 数值仿真与结果分析

考虑包含7个智能体的多智能体系统优化问题(1), 设  $x \in R^{10}$ , 每个个体的局部成本函数如下:

$$f_i(x) = \frac{1}{2} \|A_i x - b_i\|^2 + \lambda \|x\|_1, \quad \forall i \in V.$$

其中:  $A_i = I_{10} + 0.1 \times \Delta$ ,  $\lambda = 0.1$ , 参数  $b_i \in R^{10}$  和  $\Delta \in R^{10 \times 10}$  的每一个元素都是从正态分布中随机生成. 记整体约束为  $X = \bigcap_{i=1}^7 X_i$ , 个体  $i$  的局部约束为  $X_i = \bigcap_{j=1}^{1000} X_i^j$ , 而  $X_i^j = \{x \| \|x\| \leq 4 + j\}$ . 令

$\bar{x}(k) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i(k)$ ,  $x_i(k)$  由算法(6)~(9)生成. 假定边(1,2)存在服从1~3的均匀分布的随机时延, 而网

络在  $k$  时刻的邻接矩阵  $A(k)$  则由一系列随机生成的初等矩阵取凸组合得到(这种生成随机矩阵的做法原理见文献[16]). 取

$$\alpha_k = \frac{1}{k + 1000}, \quad \gamma_k = \left(\frac{1000}{k + 1000}\right)^{0.5},$$

$$\eta_k = \frac{1}{(k + 1000)^{0.2}},$$

同时在个体状态通讯过程中加入高斯白噪声, 初始设置  $\zeta = 1$ .

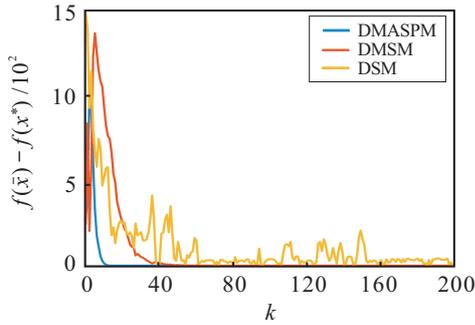


图1 3种算法下误差  $f(\bar{x}) - f(x^*)$  的收敛情况对比

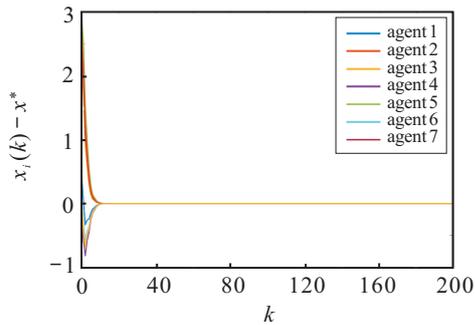


图2 DMASPM算法下所有个体的状态  $x_i(k)$  的收敛情况

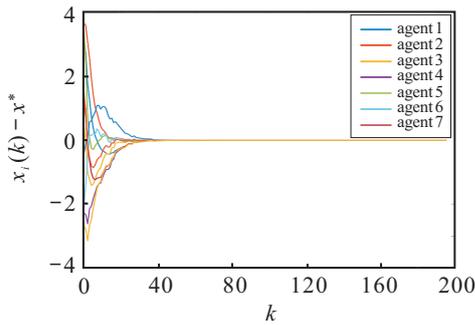


图3 DMSM算法下所有个体的状态  $x_i(k)$  的收敛情况

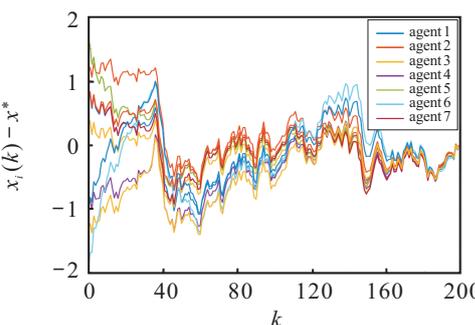


图4 DSM算法下所有个体的状态  $x_i(k)$  的收敛情况

一方面, 比较本文的多步近似次梯度随机投影算法(记为DMASPM,  $b = 500$ )、分布式多步次梯度算法(记为DMSM)和分布式次梯度算法(记为DSM)的收敛情况. 从不同算法下个体均值函数值收敛到最优值的速度比较(图1)中可以看出, DMASPM的收敛速度最快, DMSM次之, 从而表明DMASPM算法较DSM和DMSM算法有着更快的收敛速率. 从各算法下个体状态收敛情况(图2~图4)可以看出, 随机通讯噪声对DSM算法的影响较大, 而DMSM和DMASPM算法对随机噪声的适用性较好, 从图2~图4中状态表现来看DMASPM算法最稳定.

3种算法在3次运行后的平均时间对比见图5, DMSM的运行时间比DSM增加了34.4%, DMASPM的运行时间则比DSM增加了1.08倍. 这是一种可预见的结果, 因为DMASPM算法相比于DSM和DMSM算法额外执行了随机投影和多步近似次梯度的计算, 所以需要更长的运行时间来换取收敛速度的提升.

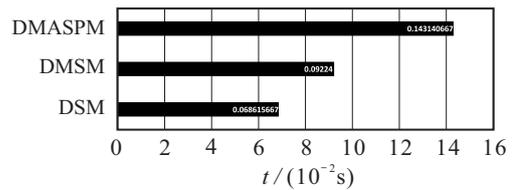


图5 3种算法平均收敛时间对比

另一方面, 以DMASPM算法为实验对象, 研究批量投影个数和噪声参数  $\zeta$  对  $f(\bar{x}) - f(x^*)$  收敛的影响. 首先, 从图6结果可以看出, 增加批量随机投影个数可以提高算法的收敛速度. 其次, 从图7的结果来看, 当  $\zeta < 10$  时(图7(a)),  $\zeta$  越小,  $f(\bar{x}) - f(x^*)$  收敛得越快, 但是区别不大; 当  $\zeta = 10$  时(图7(b)), 序列  $f(\bar{x}) - f(x^*)$  变得十分不稳定, 这是因为  $\zeta = 10$  已经超过了状态  $x_i$  的值, 完全破坏了状态  $x_i(k)$  的通讯, 导致  $f(\bar{x}) - f(x^*)$  无法收敛. 因此可以得出: 当  $\zeta$  值较小时, 改变  $\zeta$  的取值均不会改变算法的收敛性; 当  $\zeta$  值过大时(如  $\zeta$  超过状态  $x_i(k)$  值), 代表着通讯过程中噪声占据了主导地位, 导致算法不收敛.

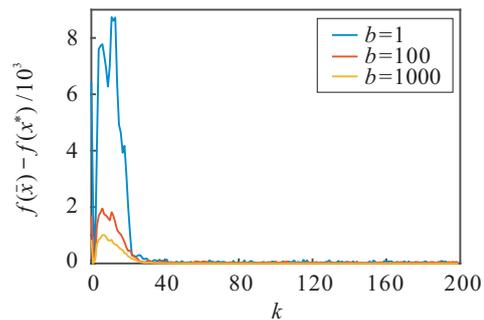


图6 随机投影个数  $b$  对  $f(\bar{x}) - f(x^*)$  收敛的影响

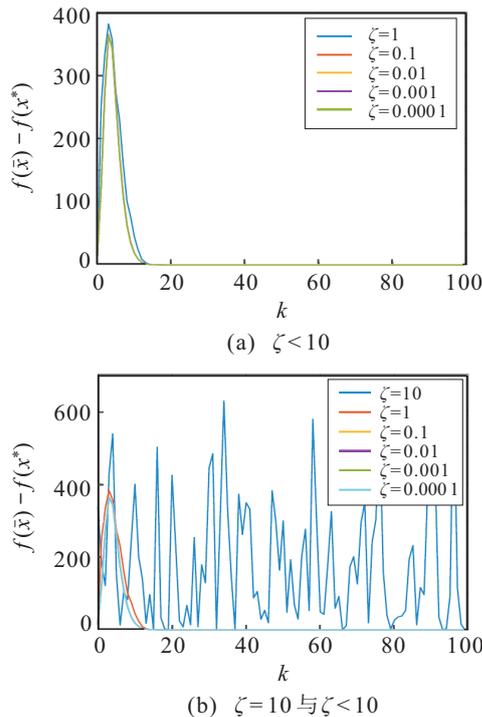


图7 参数 $\zeta$ 的不同取值下 $f(\bar{x}) - f(x^*)$ 的收敛情况对比

## 4 结论

对于切换网络下带有随机通讯噪声和随机通讯时延的多智能体系统,在放松系统通讯带宽的前提下,为个体定义了近似次梯度的概念,并与多步次梯度框架结合,提出了一个分布式多步近似次梯度随机投影算法.数值仿真结果表明,相比于一般的分布式次梯度算法和多步次梯度算法,即使系统受到一定程度随机噪声的影响,多步近似次梯度随机投影算法仍然具有较快的收敛速度.

## 参考文献(References)

- [1] Lyu X C, Ni W, Tian H, et al. Distributed online optimization of fog computing for selfish devices with out-of-date information[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2018, 17(11): 7704-7717.
- [2] Aly S A, Youssef M, Darwish H S, et al. Distributed flooding-based storage algorithms for large-scale wireless sensor networks[C]. IEEE International Conference on Communications. Dresden, 2009: 1-5.
- [3] Scutari G, Facchinei F, Song P R, et al. Decomposition by partial linearization: Parallel optimization of multi-agent systems[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(3): 641-656.
- [4] McCord C, Queralta J P, Gia T N, et al. Distributed progressive formation control for multi-agent systems: 2D and 3D deployment of UAVs in ROS/gazebo with RotorS[C]. European Conference on Mobile Robots (ECMR). Prague, 2019: 1-6.
- [5] Kia S S. Distributed optimal in-network resource allocation algorithm design via a control theoretic approach[J]. Systems & Control Letters, 2017, 107: 49-57.
- [6] Liu S, Qiu Z R, Xie L H. Convergence rate analysis of distributed optimization with projected subgradient algorithm[J]. Automatica, 2017, 83: 162-169.
- [7] Kajiyama Y, Hayashi N, Takai S. Distributed multi-step subgradient algorithm for constrained convex optimization with undirected time-varying communications[C]. IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC). Melbourne, 2017: 4650-4655.
- [8] Lee S, Nedic A. Distributed random projection algorithm for convex optimization[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2013, 7(2): 221-229.
- [9] Liu J S, Lin C H R. Asynchronous distributed joint optimization in wireless multi-hop networks[J]. IEEE Communications Letters, 2015, 19(9): 1620-1623.
- [10] Simonetto A, Leus G. Distributed asynchronous time-varying constrained optimization[C]. The 48th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Pacific Grove, 2014: 2142-2146.
- [11] Chang T H, Hong M Y, Liao W C, et al. Asynchronous distributed ADMM for large-scale optimization — Part I: Algorithm and convergence analysis[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(12): 3118-3130.
- [12] Zhang J Q, You K Y. AsySPA: An exact asynchronous algorithm for convex optimization over digraphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(6): 2494-2509.
- [13] Tsianos K I, Rabbat M G. Distributed consensus and optimization under communication delays[C]. The 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). Monticello, 2011: 974-982.
- [14] Lin P, Ren W, Song Y D. Distributed multi-agent optimization subject to nonidentical constraints and communication delays[J]. Automatica, 2016, 65: 120-131.
- [15] Zhong Y N, Gao W H, Ren H W. Distributed multi-step subgradient random projection algorithm over switching graphs with random time delay[C]. The 39th Chinese Control Conference (CCC). Shenyang, 2020: 4753-4758.
- [16] Birkhoff G. Three observations on linear algebra[J]. Universidad Nacional de Tucumán Revista: Serie A, 1946(5): 147-151.

## 作者简介

高文华(1974—),女,副教授,博士,从事随机时滞系统的鲁棒控制、多智能体系统的控制与优化等研究, E-mail: whgao@scut.edu.cn;

钟衍楠(1994—),男,硕士,从事多智能体系统的分布式优化的研究, E-mail: bugalzyn@outlook.com.

(责任编辑:李君玲)