

控制与决策

Control and Decision

基于一种新得分函数和累积前景理论的毕达哥拉斯模糊TOPSIS法

李美娟, 卢锦呈

引用本文:

李美娟, 卢锦呈. 基于一种新得分函数和累积前景理论的毕达哥拉斯模糊TOPSIS法[J]. 控制与决策, 2022, 37(2): 483–492.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0926>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系](#)

Multiplicative consistent Pythagorean fuzzy preference relation

控制与决策. 2021, 36(4): 1010–1016 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0967>

[乘型一致性毕达哥拉斯模糊偏好关系](#)

Multiplicative consistent Pythagorean fuzzy preference relation

控制与决策. 2021, 36(4): 1010–1016 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0967>

[考虑个体累积共识贡献的犹豫模糊语言自适应共识模型](#)

Adaptive consensus model with hesitant fuzzy linguistic information considering individual cumulative consensus contribution

控制与决策. 2021, 36(1): 187–195 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0556>

[基于前景理论和模糊理论的在线多属性采购拍卖 供应商选择决策](#)

Decision method of supplier selection for online multi-attribute procurement auction based on prospect theory and fuzzy theory

控制与决策. 2020, 35(11): 2637–2645 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1768>

[考虑时间序列的动态大群体应急决策方法](#)

Dynamic large group emergency decision-making method considering time series

控制与决策. 2020, 35(11): 2609–2618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0088>

基于一种新得分函数和累积前景理论的 毕达哥拉斯模糊 TOPSIS 法

李美娟[†], 卢锦呈

(福州大学 经济与管理学院, 福州 350108)

摘要: 针对属性权重未知、评价信息为毕达哥拉斯模糊数的多属性决策问题, 对毕达哥拉斯模糊集的得分函数进行深入分析, 为解决现有得分函数中存在的不足, 提出一种新得分函数, 通过证明其相关定理, 分析新得分函数的性质. 将新得分函数运用到毕达哥拉斯模糊多属性决策问题中, 以帮助决策者更好地处理模糊的决策信息. 此外, 针对现有大多数毕达哥拉斯模糊多属性决策方法基于决策者是完全理性的假设, 忽略决策者在面临风险时的不同主观价值感受, 引入累积前景理论, 提出基于新得分函数和累积前景理论的毕达哥拉斯模糊 TOPSIS 法. 该方法利用前景价值代替各方案与正负理想解之间的距离测度, 能够避免忽略不同属性间相关性对决策结果造成的影响, 同时将各属性的灰靶贡献度近似看作对应指标对评价结果的重要程度以确定各属性的权重大小. 最后, 通过实例分析验证了所提出得分函数及相关定理的正确性, 并通过仿真数据进一步验证了所提出方法的有效性和可行性.

关键词: 毕达哥拉斯模糊集; 得分函数; 累积前景理论; 理想解法; 多属性决策问题

中图分类号: C934

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.0926

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 李美娟, 卢锦呈. 基于一种新得分函数和累积前景理论的毕达哥拉斯模糊 TOPSIS 法[J]. 控制与决策, 2022, 37(2): 483-492.

Pythagorean fuzzy TOPSIS based on novel score function and cumulative prospect theory

LI Mei-juan[†], LU Jin-cheng

(School of Economics & Management, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: Due to the deficiencies of the existing score function in Pythagorean fuzzy sets, a novel score function is proposed, and the relevant theorems are proved to analyze the properties of the novel score function. Then, the novel score function is introduced to Pythagorean fuzzy multi-attribute decision making methods to help decision makers (DM) process the fuzzy decision information. Additionally, most Pythagorean fuzzy decision methods are based on the expected utility theory, which assumes that the DM has perfect knowledge about the decision environment associated with perfectly rational when making decisions, and the subjective value perception of the DM is ignored when facing losses and gains. Therefore, the cumulative prospect theory is introduced to reflect the subjective value perception of the DM and the prospect values are used to replace the distance measure between alternatives and ideal solution for avoiding the effects of correlation between different attributes, then the Pythagorean fuzzy TOPSIS method based on the novel score function and the cumulative prospect theory is proposed, where the attribute weights are known and attribute values are in the form of Pythagorean fuzzy number (PFN), and the weights of attributes are determined by the contributing degree of the grey target theory. Finally, an example is given to illustrate the validity of the proposed score function, and then several sets of simulation data are used to verify the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Keywords: Pythagorean fuzzy set; score function; cumulative prospect theory; TOPSIS; multi-attribute decision

收稿日期: 2020-07-09; 录用日期: 2020-11-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71872047); 福建省社会科学规划项目(FJ2018B029, FJ2019B086); 福建省高校领军人才项目.

责任编辑: 徐泽水.

[†]通讯作者. E-mail: 758300@qq.com.

0 引言

在多属性决策问题中,随着决策的复杂性和不确定性的不断提高,以及事物本身的模糊性和人类自身知识水平的局限性,决策者往往难以用精确的数值对事物进行评价,而是用“很好、好、一般、差、较差”等模糊语言表达自己对于事物的判断.因此,越来越多的学者将模糊集^[1]的概念引入到多属性决策方法中.针对Zadeh^[1]所提出模糊集中仅考虑隶属度的缺陷,在传统模糊集的基础上,学者们对模糊集进行拓展,使其更加满足多属性决策问题的需求.如Atanassov^[2]提出了包含隶属度、非隶属度和犹豫度的直觉模糊集,弥补了传统模糊集仅考虑隶属度的不足,使其在实际运用中更具有灵活性,同时更加契合决策者在制定决策过程中存在着不同程度的犹豫以及知识水平局限性的特征. Atanassov等^[3]对直觉模糊集进一步推广,提出了区间直觉模糊集的概念以弥补某些情形下直觉模糊集中隶属度和非隶属度难以用精确数表示的不足.近20年来,直觉模糊理论引起了众多学者的关注和研究^[4-5],取得了丰硕的研究成果,并应用于广泛的领域中^[6-7].

随着直觉模糊集不断发展,其在决策过程中的不足之处也逐渐显现出来,Yager^[8]发现在直觉模糊集中,会出现专家给出各属性下的隶属度与非隶属度之和大于1的情形,此时专家需要重新给出隶属度和非隶属度以满足直觉模糊集中隶属度与非隶属度之和小于等于1的约束,这样可能会造成修改后的隶属度和非隶属度不能准确地表达专家的偏好信息,从而影响决策结果的准确性.为此,Yager^[8]提出了毕达哥拉斯模糊集,允许隶属度与非隶属度之和大于1,但隶属度与非隶属度的平方不超过1,使专家能够不受隶属度与非隶属度之和不超过1的约束,从而更加准确地表达他们的偏好信息,提高了应用的灵活性.毕达哥拉斯模糊集被提出后引起了学者们的广泛关注,对其的研究主要分为两类,一类是对其运算法则、集结算子等的研究^[9-10];另一类是将多属性决策方法拓展到毕达哥拉斯模糊环境中^[11-12].

TOPSIS法^[13]作为一种应用广泛的多属性决策方法,自提出以来吸引了学者们的广泛研究^[14-15],其基本思想是从有限的可行方案中选择距离正理想解最近、同时距离负理想解最远的方案作为最优方案.随着决策的复杂性和不确定性不断提高,越来越多的学者将TOPSIS法推广到模糊环境中以满足实际应用的需要,如将TOPSIS法拓展到直觉模糊环境^[16]、犹豫模糊环境^[17]等.毕达哥拉斯模糊集提出

后,学者们逐渐将TOPSIS法拓展到毕达哥拉斯模糊环境中以增强其应用的灵活性.Zhang等^[10]通过将毕达哥拉斯模糊集与直觉模糊集进行比较,定义了毕达哥拉斯模糊集的运算法则,并提出了毕达哥拉斯模糊环境下的TOPSIS法.Liang等^[18]将毕达哥拉斯模糊集与犹豫模糊集相结合,定义了毕达哥拉斯犹豫模糊集,并提出了基于毕达哥拉斯犹豫模糊集的TOPSIS法.曾守楨等^[19]在分析现有距离测度方法不足的基础上,给出了新的毕达哥拉斯模糊距离测度,同时探讨其特征以及与现有毕达哥拉斯模糊测度的关系,并提出了基于毕达哥拉斯模糊距离测度的TOPSIS方法.

以上基于毕达哥拉斯模糊集的TOPSIS法大多都是建立在决策者行为完全理性的基础上,然而在实际多属性决策问题中,决策者由于知识水平等具有局限性,其决策行为是有限理性的,并且决策者对于结果是具有风险偏好的^[20],因此将决策者的风险偏好考虑到多准则决策问题中尤为重要.前景理论^[21]自1979年提出以来已经成为了学者们的研究热点之一,为了使其更符合实际运用,Tversky等^[22]于1992年提出累积前景理论,其理论模型由损益参考点、价值函数和决策权重3部分构成.该理论认为,人们通常在决策中会高估小概率事件的发生概率而低估大概率事件的发生概率,因此需要对客观概率进行修正,从而给出了概率权重函数,更加符合人们决策过程中的实际情况.因此,针对TOPSIS法中认为决策者是完全理性的不足,结合前景理论的特征,学者们逐渐将前景理论引入到TOPSIS法中.王正新等^[23]考虑决策者的风险偏好对多准则决策的影响,将累积前景理论与灰色关联分析方法相结合解决多准则决策问题.王娟等^[24]将前景理论引入到三角犹豫模糊环境下的TOPSIS法中,以反映决策者心理行为特征对决策的影响.

现有文献将前景理论引入TOPSIS法时,主要是将前景理论与距离测度相结合,忽略属性间相关性的影响.此外,在分析现有文献的基础上,为解决现有得分函数存在的问题,本文提出一种新得分函数,其不仅考虑了毕达哥拉斯模糊数(PFN)中的犹豫度,而且利用人们的从众心理对犹豫度进行处理^[25-27],还考虑了决策者希望犹豫度越低越好的期望以及人们希望不确定性决策信息越少越好的认知习惯,从而使得得分函数更加完善.最后利用所提出的得分函数将毕达哥拉斯模糊数转换成精确数,从而解决了利用模糊数不易进行决策的问题.同时使用距离测度,尤其

是欧氏距离表示各方案与正负理想解之间距离时会受到属性间的相关性的影响,这是TOPSIS法中存在已久的问题^[28],以往文献通常利用马氏距离^[28]或独立成分分析^[29]等方法进行解决.然而,在表示各方案与正负理想解之间的差距时并不局限于使用距离测度^[30].本文通过计算各方案相对于正负理想解的前景损益值代替各方案与正负理想解之间的距离测度,从而避免了欧氏距离忽略属性间相关性而对结果的影响.在此基础上,提出了基于新得分函数和累积前景理论的毕达哥拉斯模糊TOPSIS法.

1 基础理论

1.1 毕达哥拉斯模糊集

定义1^[10] 设 U 为给定论域, $F = \{(x, F(\mu(x), \nu(x))) \mid x \in U\}$ 为论域 U 上的毕达哥拉斯模糊集(PFS),其中 $\mu(x)$ 和 $\nu(x)$ 分别为论域 U 中 $x \in F$ 的隶属度和非隶属度,并且满足: $\forall x \in U, \mu(x), \nu(x) \in [0,1], 0 \leq \mu(x)^2 + \nu(x)^2 \leq 1$.同时,称 $\forall x \in U, \pi(x) = \sqrt{1 - \mu(x)^2 - \nu(x)^2}$ 为论域 U 中 x 属于 F 的不确定性,即犹豫度.为方便表述,设 $f = F(\mu, \nu)$ 为毕达哥拉斯模糊数(PFN).

定义2^[10] 设 $f = F(\mu, \nu)$ 为任意PFN,则有 $f^c = F(\nu, \mu)$.

1.2 累积前景理论

累积前景理论由Tversky等^[22]于1992年提出,在“有限理性”的基础上,考虑了决策者主观风险的偏好,其理论模型主要由损益参考点、价值函数和决策权重3部分组成.其中,损益参考点是决策者评判预期与结果差距的重要依据,结果大于参考点表示决策者的心理感受为收益;结果小于参考点表示决策者的心理感受为损失.参考点的选取包括零点、中位数、各属性的期望值以及正负理想解,本文在毕达哥拉斯模糊问题中选取正、负理想解点作为损益参考点.价值函数类似于期望效用理论中的效用函数,是将具体的损益转化为人们主观的前景价值的函数,具体形式^[22]如下:

$$v(\Delta x) = \begin{cases} (\Delta x)^\alpha, & \Delta x \geq 0; \\ -\theta(-\Delta x)^\beta, & \Delta x < 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中: Δx 为 x 偏离某一参考点 x_0 的大小, $\Delta x \geq 0$ 表示收益, $\Delta x < 0$ 表示损失; α, β 为决策者对收益和损失的敏感程度,决策者在面临收益时更倾向于风险规避,面临损失时更倾向于风险偏好; θ 为损失厌恶系数, $\theta > 1$ 表明决策者相对于收益而言对损失更加敏感.经Tversky等^[22]分析研究, $\alpha = \beta = 0.88, \theta = 2.25$.

累积前景理论区别于前景理论的关键在于权

重函数的不同,前者所采用的权重函数不再是线性函数,而是反S型曲线,反映出决策者往往会高估小概率事件的发生概率而低估大概率事件的发生概率.针对收益和损失的概率权重计算公式分别为

$$\begin{aligned} \Pi^+(p) &= \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\delta}}}, \\ \Pi^-(p) &= \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\gamma}}}. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: p 为概率; γ, δ 为参数,表示概率权重函数的弯曲程度,经Tversky等^[22]分析研究, $\gamma = 0.61, \delta = 0.69$.为了更加形象地说明累积前景理论中权重函数的特征,给出 $\gamma = 0.61, \delta = 0.69$ 时收益和损失状态下的权重函数如图1^[22]所示.

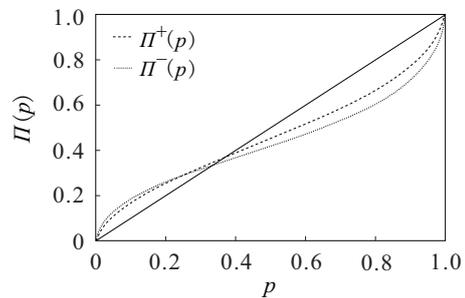


图1 收益和损失状态下的权重函数

由图1可见,经过式(2)调整后,客观概率转变为决策权重,此时小概率事件的权重将被放大,使得 $\Pi(p) > p$,大概率事件的权重将被缩小,使得 $\Pi(p) < p$,从而更加符合实际决策过程.虽然 $\sum p = 1$,但是经过权重函数的调整后使得转换后的 $\sum \Pi^+(p)$ 和 $\sum \Pi^-(p)$ 会出现不等于1的现象^[22].

2 毕达哥拉斯模糊集中新得分函数

2.1 关于毕达哥拉斯模糊集中现有得分函数的分析

假设一个PFN为 $f = F(\mu, \nu)$,其中 μ 和 ν 分别为隶属度和非隶属度.Zhang等^[10]提出的毕达哥拉斯模糊得分函数为

$$s_{Zhang}(f) = \mu_f^2 - \nu_f^2, \quad (3)$$

其中 $s(f) \in [0,1]$.

虽然文献[10]提出的得分函数通常能够比较出PFN的大小,但是在一些特殊情形中可能会失效.例如,现有两个模糊数 $f_1 = F(0.3, 0.3)$ 和 $f_2 = F(0.2, 0.2)$,此时运用上述得分函数得出 $s(f_1) = s(f_2) = 0$,无法区分 f_1 与 f_2 的大小.为了解决该问题,Peng等^[31]提出了精确函数,以便进一步区分不同的PFN,有

$$h_{Peng}(f) = \mu_f^2 + \nu_f^2, \quad (4)$$

其中 $h(f) \in [0,1]$.

虽然Peng等^[31]提出的精确函数能够进一步区

得分函数无法区分的PFN,但是也增加了决策者的计算负担. Ma等^[32]通过分析发现,上述得分函数和精确函数实际上在对隶属函数和非隶属函数进行平方计算后,数值会被压缩而偏小,因此对Zhang等^[10]所提出的得分函数进行处理^[32],设处理后的得分函数为 $s_{\text{Ma}}(f)$ 和 $h_{\text{Ma}}(f)$.但是, $s_{\text{Ma}}(f)$ 同样无法处理上述问题,且上述所提出的得分函数和精确函数都没考虑犹豫度($\pi(x)$)的影响,从而不能有效地利用PFN所提供的信息,造成决策信息的丢失^[33].为了解决这一问题,Peng等^[33]在得分函数中考虑了犹豫度的影响,提出一种新得分函数,即

$$s_{\text{Peng and Ma}}(f) = \mu_f^2 - \nu_f^2 + (\mu_f^2 - \nu_f^2)\pi_f^2, \quad (5)$$

其中 $s_{\text{Peng and Ma}}(f) \in [-1, 1]$.

Peng等^[33]所提出方法将PFN中的犹豫度纳入得分函数中,最大效度地利用了决策信息,并且遇到上述隶属度与非隶属度相等无法区分PFN情形时, $s_{\text{Peng and Ma}}(f)$ 可以通过比较其犹豫度进行区分.例如,同样对于模糊数 $f_1 = F(0.3, 0.3)$ 和 $f_2 = F(0.2, 0.2)$,虽然 $s_{\text{Peng and Ma}}(f_1) = s_{\text{Peng and Ma}}(f_2) = 0$,但是 $\pi_{f_1} = \sqrt{0.72} < \pi_{f_2} = \sqrt{0.92}$,所以有 $f_1 > f_2$.更重要的是,Peng等^[31]所提出的得分函数还引入了人们在决策时的从众心理^[25-27],犹豫度会受到支持度和反对度(即隶属度和非隶属度)的影响,当支持度大于反对度时($\mu > \nu$),处于犹豫中的人们更倾向于跟随大流,即转向支持,从而对得分函数起到激励作用($(\mu_f^2 - \nu_f^2)\pi_f^2$ 为正);当支持度小于反对度时($\mu < \nu$),处于犹豫中的人们更倾向于转向反对,从而对得分函数起到惩罚作用($(\mu_f^2 - \nu_f^2)\pi_f^2$ 为负).

虽然Peng等^[33]所提出得分函数具有很多优点,但同样存在不足,即 $s_{\text{Peng and Ma}}(f)$ 存在与决策者预期和人们认知习惯相悖的问题.当决策者利用得分函数对方案进行排序时,希望最优方案支持度越高越好,反对度越低越好,并且犹豫度越低越好^[34].例如,现有两个模糊数 $f_1 = F(0.7, \sqrt{0.34})$ 和 $f_2 = F(0.6, \sqrt{0.21})$,使用 $s_{\text{Peng and Ma}}(f)$ 进行计算可得

$$s_{\text{Peng and Ma}}(f_1) = 0.176,$$

$$s_{\text{Peng and Ma}}(f_2) = 0.215,$$

且 $\pi_{f_1} = 0.17, \pi_{f_2} = 0.43$.由计算结果可见, $f_1 < f_2$,但是除了反对度外,无论从支持度还是从犹豫度而言, f_1 都要优于 f_2 ,并且使用 $s_{\text{Zhang}}(f)$ 和 $h_{\text{Peng}}(f)$ 计算这两个PFN可得

$$s_{\text{Zhang}}(f_1) = s_{\text{Zhang}}(f_2) = 0.15,$$

$$h_{\text{Peng}}(f_1) = 0.83 > h_{\text{Peng}}(f_2) = 0.57,$$

得出的结论也是 $f_1 > f_2$.因此,无论从直觉上看,还是从理论上分析,都应该是 $f_1 > f_2$,同时与文献^[33]中所阐述的使用 $s_{\text{Peng and Ma}}$ 计算的结果与使用 $s_{\text{Zhang}}(f)$ 和 $h_{\text{Peng}}(f)$ 计算的结果一致这一结论不符.

通过分析发现,Peng等^[33]所提出得分函数之所以会存在这一缺陷,主要是因为在处理犹豫度时忽略了决策者希望犹豫度越小越好的期望,以及人们在做决策时希望不确定信息越少越好的认知习惯,特别是在处理支持度大于反对度时($\mu > \nu$),由 $s_{\text{Peng and Ma}}$ 的表达式可知,犹豫度越大得分函数越大,从而与决策者的期望和人们的认知相悖,甚至在某些情况下与事实不符.为了解决这一问题,下一节本文将提出一种新得分函数,不仅能够保留 $s_{\text{Peng and Ma}}$ 的优点,还能弥补其不足之处.

2.2 一种新的毕达哥拉斯模糊得分函数

在实际决策过程中,决策者总是希望最优方案中PFN支持度越高越好,反对度越低越好,并且犹豫度越低越好(即不确定性越低越好).同时,为了充分利用决策信息,应该将PFN中的犹豫度也考虑到得分函数中,并且引入从众心理处理犹豫度^[25-27],这样更加符合实际情况.基于此,本文提出一种新得分函数,具体如下.

定义3 假设 $f = F(\mu, \nu)$ 为一个PFN,则其得分函数为

$$s_{\text{proposed}}(f) = \mu_f^2 - \nu_f^2 + \frac{\mu_f^2 - \nu_f^2}{1 + \pi_f^2}. \quad (6)$$

在犹豫度部分(即 $\frac{\mu_f^2 - \nu_f^2}{1 + \pi_f^2}$), $\mu_f^2 - \nu_f^2$ 反映出人们的从众心理,当支持度大于反对度时($\mu > \nu$),犹豫中的人们倾向于转向支持;当支持度小于反对度时($\mu < \nu$),犹豫中的人们倾向于转向反对. $\frac{1}{1 + \pi_f^2}$ 反映出决策者希望犹豫度越小越好的期望以及人们希望不确定性越低越好的认知习惯,更符合实际情况.

定义4 对于两个PFN, $f_1 = F(\mu_1, \nu_1)$ 和 $f_2 = F(\mu_2, \nu_2)$,有

- 1) 如果 $s_{\text{proposed}}(f_1) > s_{\text{proposed}}(f_2)$,则 $f_1 > f_2$;
- 2) 如果 $s_{\text{proposed}}(f_1) < s_{\text{proposed}}(f_2)$,则 $f_1 < f_2$;
- 3) 如果 $s_{\text{proposed}}(f_1) = s_{\text{proposed}}(f_2)$,则比较 π_{f_1} 与 π_{f_2} 的大小,若 $\pi_{f_1} > \pi_{f_2}$ 则 $f_1 < f_2$,若 $\pi_{f_1} < \pi_{f_2}$ 则 $f_1 > f_2$.

对本文所提出的得分函数进行深入分析,得出以下定理.

定理1 假设 $f = F(\mu, \nu)$ 为一个PFN,新得分函

数 $s_{\text{proposed}}(f)$ 相对于 μ 单调递增, 相对于 ν 单调递减.

证明 将 $\pi_f^2 = 1 - \mu_f^2 - \nu_f^2$ 代入 $s_{\text{proposed}}(f)$ 中, 可得

$$s_{\text{proposed}}(f) = (\mu_f^2 - \nu_f^2) \left(1 + \frac{1}{2 - \mu_f^2 - \nu_f^2} \right).$$

对 μ 求偏导, 得

$$\frac{\partial s_{\text{proposed}}(f)}{\partial \mu} = \frac{2\mu_f[(\mu_f^2 + \nu_f^2 - 3)^2 - 3 + 2\mu_f^2]}{(2 - \mu_f^2 - \nu_f^2)^2}.$$

又因为 $0 \leq \mu_f^2 + \nu_f^2 \leq 1$, 所以 $(\mu_f^2 + \nu_f^2 - 3)^2 - 3 \geq 1$, 且 $\mu_f, \nu_f \in [0, 1]$, 进而有 $\frac{\partial s_{\text{proposed}}(f)}{\partial \mu} > 0$, 因此 $s_{\text{proposed}}(f)$ 相对于 μ 单调递增. 同理, 对 ν 求偏导, 得

$$\frac{\partial s_{\text{proposed}}(f)}{\partial \nu} = \frac{2\nu_f[(\mu_f^2 + \nu_f^2 - 3)^2 - 3 + 2\nu_f^2]}{(2 - \mu_f^2 - \nu_f^2)^2}.$$

因为 $0 \leq \mu_f^2 + \nu_f^2 \leq 1$, 且 $\mu_f, \nu_f \in [0, 1]$, 所以 $\frac{\partial s_{\text{proposed}}(f)}{\partial \nu} < 0$, $s_{\text{proposed}}(f)$ 相对于 ν 单调递减. \square

定理2 假设 $f = F(\mu, \nu)$ 为一个 PFN, 则新得分函数满足:

1) $s_{\text{proposed}}(f) \in [-2, 2]$;

2) 当且仅当 $f = F(1, 0)$ 时, 有 $s_{\text{proposed}}(f) = 2$, 当且仅当 $f = F(0, 1)$ 时, 有 $s_{\text{proposed}} = -2$.

证明 由定理1可知, $s_{\text{proposed}}(f)$ 相对于 μ 单调递增且相对于 ν 单调递减, 所以有

$$s_{\text{proposed}}(F(0, \nu))_{\min} = \min_{0 \leq \nu \leq 1} \left\{ -\nu_f^2 - \frac{\nu_f^2}{2 - \nu_f^2} \right\} = -\nu_f^2 - \frac{\nu_f^2}{2 - \nu_f^2} \Big|_{\nu=1} = -2,$$

此时 PFN 为 $F(0, 1)$. 同理可证, $s_{\text{proposed}}(F(1, \nu))_{\max} = 2$, 此时 PFN 为 $F(1, 0)$. 综上所述, 有 $s_{\text{proposed}}(f) \in [-2, 2]$, 当且仅当 $f = F(0, 1)$ 时, 有 $s_{\text{proposed}}(f) = -2$, 当且仅当 $f = F(1, 0)$ 时, 有 $s_{\text{proposed}}(f) = 2$. \square

定理3 假设 $f_1 = F(\mu_1, \nu_1)$ 和 $f_2 = F(\mu_2, \nu_2)$ 为两个 PFN, 当 $\mu_1 > \mu_2$ 且 $\nu_1 < \nu_2$ 时, 有 $f_1 > f_2$; 当 $\mu_1 <$

μ_2 且 $\nu_1 > \nu_2$ 时, 有 $f_1 < f_2$.

证明 由定理1可知, $s_{\text{proposed}}(f)$ 相对于 μ 单调递增且相对于 ν 单调递减, 所以当 $\mu_1 > \mu_2$ 且 $\nu_1 < \nu_2$ 时, 有 $f_1 > f_2$. 同理可证, 当 $\mu_1 < \mu_2$ 且 $\nu_1 > \nu_2$ 时, 有 $f_1 < f_2$. \square

定理4 $f = F(\mu, \nu)$ 为一个 PFN, 若 $f^c = F(\nu, \mu)$, 则有 $s_{\text{proposed}}(f) = -s_{\text{proposed}}(f^c)$.

证明 由得分函数的定义可知

$$s_{\text{proposed}}(f) = \mu_f^2 - \nu_f^2 + \frac{\mu_f^2 - \nu_f^2}{1 + \pi_f^2}.$$

根据定义2可得

$$s_{\text{proposed}}(f^c) = \nu_f^2 - \mu_f^2 + \frac{\nu_f^2 - \mu_f^2}{1 + \pi_f^2} = -s_{\text{proposed}}(f),$$

即 $s_{\text{proposed}}(f) = -s_{\text{proposed}}(f^c)$. \square

定理1表明, 支持度越高得分函数越大, 反对度越高得分函数越小, 符合人们的认知习惯. 定理2分析了得分函数的取值范围以及极端情形下的取值. 定理3表明了新得分函数的有效性. 定理4阐述了 PFN 与其补集的得分函数之间的关系. 定理1~定理4描述了新得分函数所具有的性质, 并且反映出其不仅保留了 $s_{\text{Peng and Ma}}(f)$ 所具有的优势, 还弥补了 $s_{\text{Peng and Ma}}(f)$ 的不足.

为更形象地表明 $s_{\text{proposed}}(f)$ 相较 $s_{\text{Peng and Ma}}(f)$ 的优势所在, 给出具体说明如表1所示.

由表1中例1可知, 所提出方法解决了上述 $s_{\text{Peng and Ma}}(f)$ 存在的问题, 并且使用 $s_{\text{proposed}}(f)$ 计算所得的结果与将 s_{Zhang} 、 h_{Peng} 相结合计算所得的结果一致, 初步验证了所提出得分函数的有效性. 同时, 与 s_{Zhang} 和 h_{Peng} 相比, $s_{\text{proposed}}(f)$ 可以直接得出比较结果, 而单独使用 s_{Zhang} 无法区分 f_1 与 f_2 的大小, 需要再使用 h_{Peng} 才能得出结果, 因此相比于 s_{Zhang} 和 h_{Peng} , 所提出得分函数不需要二次比较, 简化了决策过程.

表1 不同得分函数的比较

	PFN	得分函数	比较大小
例1	$f_1 = F(0.7, \sqrt{0.34}), f_2 = F(0.6, \sqrt{0.21})$	$s_{\text{Zhang}}(f_1) = 0.15, s_{\text{Zhang}}(f_2) = 0.15$	$f_1 = f_2$
		$h_{\text{Peng}}(f_1) = 0.83, h_{\text{Peng}}(f_2) = 0.57$	$f_1 > f_2$
		$s_{\text{Peng and Ma}}(f_1) = 0.1755, s_{\text{Peng and Ma}}(f_2) = 0.2145$	$f_1 < f_2$
		$s_{\text{proposed}}(f_1) = 0.2782, s_{\text{proposed}}(f_2) = 0.2549$	$f_1 > f_2$
例2	$f_1 = F(0.8, \sqrt{0.3}), f_2 = F(0.7, \sqrt{0.15})$	$s_{\text{Zhang}}(f_1) = 0.34, s_{\text{Zhang}}(f_2) = 0.34$	$f_1 = f_2$
		$h_{\text{Peng}}(f_1) = 0.94, h_{\text{Peng}}(f_2) = 0.64$	$f_1 > f_2$
		$s_{\text{Ma}}(f_1) = 0.5831, s_{\text{Ma}}(f_2) = 0.5831$	$f_1 = f_2$
		$h_{\text{Ma}}(f_1) = 0.9695, h_{\text{Ma}}(f_2) = 0.8$	$f_1 > f_2$
		$s_{\text{proposed}}(f_1) = 0.6608, s_{\text{proposed}}(f_2) = 0.59$	$f_1 > f_2$

由表1中例2可知,相比于得分函数 $s_{Zhang}(f)$ 和 $s_{Ma}(f)$,所提出得分函数具有更强的区分能力. 相比于其他得分函数需要通过精确函数进行区分的情况,所提出得分函数能够直接区分而不需进行二次比较,大大减轻了决策者的负担,同时与通过精确函数进行二次比较的结果一致,进一步验证了所提出得分函数的有效性.

3 一种新的毕达哥拉斯模糊TOPSIS法

本节运用所提出得分函数将PFN转换为精确数,从而更好地进行决策. 大多数毕达哥拉斯模糊多属性决策方法是基于“期望效用理论”^[35],即决策者是完全理性的,但是在实际决策过程中,决策者在面对损失和收益时具有不同的心理偏好,从而对决策结果产生不可忽视的影响. 因此本文将累积前景理论引入到毕达哥拉斯模糊多属性决策方法中,提出了基于新得分函数和累积前景理论的毕达哥拉斯模糊TOPSIS法. 该方法不仅考虑决策者的主观价值感受,而且能够克服使用欧氏距离忽略属性间相关性的问题^[28],具体如下.

假设一个毕达哥拉斯模糊环境下的多属性决策问题包括 m 个备选方案和 n 个决策属性. 令 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 为方案集, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ 为属性集,设属性的权重向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ 未知,且满足 $\omega_j \in [0, 1], \sum_{j=1}^n \omega_j = 1$. 方案 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 在属性 $C_j (j=1, 2, \dots, n)$ 的毕达哥拉斯模糊数为 $f_{ij} = F(\mu_{ij}, \nu_{ij})$, f_{ij} 表示决策者给出的方案 A_i 关于属性 C_j 的评估值, μ_{ij} 和 ν_{ij} 分别为方案 A_i 关于属性 C_j 的隶属度和非隶属度. 最终得到毕达哥拉斯模糊多属性决策矩阵为

$$P = (f_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} F(\mu_{11}, \nu_{11}) & \dots & F(\mu_{1n}, \nu_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F(\mu_{m1}, \nu_{m1}) & \dots & F(\mu_{mn}, \nu_{mn}) \end{bmatrix}$$

基于新得分函数和累积前景理论的毕达哥拉斯模糊TOPSIS法的步骤如下.

step 1: 首先根据所提出得分函数(式(6)),将PFN转换成精确数以便决策,从而得到基于得分函数的决策矩阵 $S = (s_{proposed}(f_{ij}))_{m \times n}$.

step 2: 确定正理想解 X^+ 和负理想解 X^- , 分别为

$$\begin{aligned} X^+ &= \{s_{proposed}(f_1^+), \dots, s_{proposed}(f_n^+)\} = \\ & \quad \{ \max_{1 \leq i \leq m} s_{proposed}(f_{ij}^+) | j = 1, 2, \dots, n \}; \\ X^- &= \{s_{proposed}(f_1^-), \dots, s_{proposed}(f_n^-)\} = \end{aligned}$$

$$\{ \min_{1 \leq i \leq m} s_{proposed}(f_{ij}^-) | j = 1, 2, \dots, n \}. \quad (7)$$

step 3: 根据得分函数确定属性权重. 由于本文使用累积前景理论反映决策者的主观心理感受,属性权重的确定不宜再采用主观赋权法,应使用客观赋权法,以实现从不同角度对决策信息进行处理,从而得到更加合理的结果. 本文采用灰色关联分析理论中的贡献度分析^[36],通过将灰靶贡献度近似看作相应指标对评价结果的重要程度,从而确定各指标的权重. 贡献度越大,权重越大;贡献度越小,则相应的权重也越小,具体计算如下. 第 j 个指标对应的贡献度为

$$g(x_j, x^+) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g_{ij}^+ \quad (8)$$

对 $g(x_j, x^+)$ 进行归一化,得第 j 个指标权重为

$$\omega_j = \frac{g(x_j, x^+)}{\sum_{j=1}^n g(x_j, x^+)} \quad (9)$$

其中

$$r_{ij}^+ = \frac{\min_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} \Delta_{ij}^+(s) + \rho \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} \Delta_{ij}^+(s)}{\Delta_{ij}^+(s) + \rho \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} \Delta_{ij}^+(s)},$$

$$\Delta_{ij}^+(s) = |s_{proposed}(f_j^+) - s_{proposed}(f_{ij})|,$$

通常取 $\rho=0.5$.

step 4: 由式(1)计算相对于正负理想解的前景收益值 v_{ij}^+ 和前景损失值 v_{ij}^- ,并且用各方案在各属性下相对于正负理想解的前景损益值代替TOPSIS法中各方案与正负理想解之间距离测度.

step 5: 根据step 3所得的权重值计算权重函数 $\Pi^+(\omega_j)$ 和 $\Pi^-(\omega_j)$, 分别为

$$\begin{aligned} \Pi^+(\omega_j) &= \frac{\omega_j^\gamma}{\omega_j^\gamma + (1 - \omega_j)^\frac{1}{\gamma}}, \\ \Pi^-(\omega_j) &= \frac{\omega_j^\delta}{\omega_j^\delta + (1 - \omega_j)^\frac{1}{\delta}}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 ω_j 为属性权重,且 $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$. 需要指出的是,正如第1.2节中对权重函数的分析,属性权重 ω_j 由式(10)调整转换后,所得决策权重之和会出现不等于1的现象,但不会影响综合损益值的计算.

step 6: 根据下式分别计算决策者面临收益和损失时的综合收益值和损失值:

$$\begin{aligned} V_i^+ &= \sum_{j=1}^n v_{ij}^+ \Pi^+(\omega_j), \\ V_i^- &= \sum_{j=1}^n v_{ij}^- \Pi^-(\omega_j). \end{aligned} \quad (11)$$

step 7: 基于传统TOPSIS法的思想, 所计算各备选方案的相对贴进度不能保证最优方案在最接近正理想解的同时与负理想解最远, 因此根据 Hadi-Vencheh 等^[37]的研究, 给出在毕达哥拉斯模糊环境下基于新得分函数和累积前景理论的改进相对贴进度

$$RC_i = \frac{|v_i^+|}{\max_i |v_i^+|} - \frac{|v_i^-|}{\min_i |v_i^-|}, \quad (12)$$

其中 $RC_i \leq 0$, 其值越大表明方案 A_i 越接近正理想解的同时距离负理想解越远。

4 决策应用与对比分析

本节首先运用一组实例数据验证所提出得分函数的有效性、相关定理的正确性以及所提出方法的有效性; 然后将所提出方法应用于多组仿真数据中,

并且与其他方法得出的结果进行对比分析, 以验证所提出方法的有效性和优势所在。

4.1 实例分析

为进一步实施创新驱动战略, 某地区政府、高校和企业进行合作从而促进地区经济发展, 其主要实施途径是一系列 R & D 项目的开展^[38]. 现假设有 6 个 R & D 项目 $A_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 可供选择, 考虑的属性指标有 6 项, C_1 : 技术, C_2 : 公司和战略, C_3 : 监管机构, C_4 : 市场, C_5 : 财务状况, C_6 : 应用. 各项指标皆为效益型指标, 相应的属性权重 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6)^T$ 未知, 且满足 $\omega_j \in [0, 1]$ 和 $\sum_{j=1}^n \omega_j = 1$, 并以毕达哥拉斯模糊数的形式给出各方案的评价信息, 需选择最优 R & D 项目, 具体评价信息见表 2.

表 2 毕达哥拉斯模糊决策矩阵

序号	U	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
1	A_1	$F(0.80, 0.32)$	$F(0.85, 0.20)$	$F(0.90, 0.40)$	$F(0.20, 0.80)$	$F(0.30, 0.90)$	$F(0.24, 0.88)$
2	A_2	$F(0.30, 0.90)$	$F(0.30, 0.80)$	$F(0.20, 0.60)$	$F(0.64, 0.42)$	$F(0.74, 0.48)$	$F(0.69, 0.51)$
3	A_3	$F(0.50, 0.60)$	$F(0.70, 0.30)$	$F(0.56, 0.50)$	$F(0.50, 0.80)$	$F(0.70, 0.70)$	$F(0.85, 0.30)$
4	A_4	$F(0.46, 0.70)$	$F(0.68, 0.48)$	$F(0.74, 0.60)$	$F(0.46, 0.55)$	$F(0.76, 0.53)$	$F(0.72, 0.43)$
5	A_5	$F(0.60, 0.50)$	$F(0.80, 0.30)$	$F(0.65, 0.43)$	$F(0.58, 0.53)$	$F(0.68, 0.20)$	$F(0.75, 0.28)$
6	A_6	$F(0.84, 0.50)$	$F(0.92, 0.35)$	$F(0.80, 0.30)$	$F(0.14, 0.86)$	$F(0.10, 0.92)$	$F(0.40, 0.60)$
7	PIS_1	$F(0.80, 0.32)$	$F(0.92, 0.35)$	$F(0.90, 0.40)$	$F(0.64, 0.42)$	$F(0.68, 0.20)$	$F(0.85, 0.30)$
8	NIS_1	$F(0.30, 0.90)$	$F(0.30, 0.80)$	$F(0.20, 0.60)$	$F(0.14, 0.86)$	$F(0.10, 0.92)$	$F(0.24, 0.88)$
9	PIS_2	$F(0.80, 0.32)$	$F(0.85, 0.20)$	$F(0.80, 0.30)$	$F(0.64, 0.42)$	$F(0.68, 0.20)$	$F(0.85, 0.30)$
10	NIS_2	$F(0.30, 0.90)$	$F(0.30, 0.80)$	$F(0.20, 0.60)$	$F(0.14, 0.86)$	$F(0.10, 0.92)$	$F(0.24, 0.88)$
11	PIS_3	$F(0.80, 0.32)$	$F(0.92, 0.35)$	$F(0.90, 0.40)$	$F(0.64, 0.42)$	$F(0.68, 0.20)$	$F(0.85, 0.30)$
12	NIS_3	$F(0.30, 0.90)$	$F(0.30, 0.80)$	$F(0.20, 0.60)$	$F(0.14, 0.86)$	$F(0.10, 0.92)$	$F(0.24, 0.88)$

表 2 第 7~12 行分别为由 $s_{Zhang}(f)$ 、 $h_{Peng}(f)$ 、 $s_{Peng \text{ and } Ma}(f)$ 和 $s_{proposed}(f)$ 计算所得的正负理想解。

根据式 (7) 将毕达哥拉斯模糊数转换成精确数, 具体如表 3 所示. 由表 3 可知, 将 PFN 转换为精确数后, 决策者仅需根据表 3 中的决策信息矩阵进行分析即可, 大大降低了决策难度. 同时由表 2 可知, 根据 $s_{proposed}(f)$ 所得的正理想解 (PIS) 和负理想解 (NIS) 与通过文献 [10, 31] 得分函数计算得到的 PIS 和 NIS 完全一致, 这在一定程度上表明了本文所提出得分函数的有效性, 但是与由文献 [33] 得分函数计算出的 PIS 和 NIS 存在差异. 例如, 通过 $s_{Peng \text{ and } Ma}(f)$ 计算属性 C_2 和 C_3 下的正理想解分别为 A_1 和 A_6 , 使用 $s_{Zhang}(f)$ 、 $h_{Peng}(f)$ 和 $s_{proposed}(f)$ 计算属性 C_2 和 C_3 下的正理想解分别为 A_6 和 A_1 , 其中属性 C_2 下 A_1 和 A_6 的毕达哥拉斯模糊数分别为 $F_{A_1}(0.85, 0.2)$ 和 $F_{A_6}(0.92, 0.35)$, 且 $\pi_{f_{A_1}} = 0.49$, $\pi_{f_{A_6}} = 0.18$. 除非隶属度外, 无论从隶属度还是犹豫度而言, A_6 都要优于

A_1 , 并且使用 $s_{Zhang}(f)$ 和 $h_{Peng}(f)$ 以及 $s_{proposed}(f)$ 得出的结果都是 A_6 优于 A_1 , 即无论从直觉还是从理论而言, A_6 都是优于 A_1 的. 同理, 在属性 C_3 下, A_1 也要优于 A_6 , 与第 2.2 节中相关分析一致, 再次验证了所提出得分函数的有效性和优势所在, 同时也表明了使用 $s_{Peng \text{ and } Ma}(f)$ 可能会得出有偏误的结果。

表 3 各 PFN 的得分函数

方案	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	0.97	1.23	1.28	-1.06	-1.38	-1.33
A_2	-1.38	-0.98	-0.52	0.40	0.58	0.39
A_3	-0.19	0.68	0.11	-0.74	0.00	1.17
A_4	-0.49	0.41	0.36	-0.15	0.56	0.59
A_5	0.19	0.98	0.41	0.10	0.71	0.84
A_6	0.89	1.43	0.98	-1.30	-1.57	-0.34
PIS	0.97	1.43	1.28	0.40	0.71	1.17
NIS	-1.38	-0.98	-0.52	-1.30	-1.57	-1.33

由表 3 可知, 通过所提出得分函数计算的得分皆在区间 $[-2, 2]$ 内, 验证了定理 2 的正确性. 且由表 2 可知, 属性 C_5 和 C_6 下方案 A_2 的 PFN 分别为

$$f_{(A_2)C_5} = F(0.74, 0.48),$$

$$f_{(A_2)C_6} = F(0.69, 0.51),$$

即满足 $\mu_{f_{(A_2)C_5}} > \mu_{f_{(A_2)C_6}}$ 且 $\nu_{f_{(A_2)C_5}} < \nu_{f_{(A_2)C_6}}$. 通过所提出得分函数计算可得, $s_{\text{proposed}}(f_{A_2})_{C_5} = 0.58 > s_{\text{proposed}}(f_{A_2})_{C_6} = 0.39$, 同时在属性 C_1 和 C_2 下方方案 A_1 的 PFN 分别为 $f_{(A_1)C_1} = F(0.8, 0.32)$ 和 $f_{(A_1)C_2} = F(0.85, 0.2)$, 即 $\mu_{f_{(A_1)C_1}} < \mu_{f_{(A_1)C_2}}$ 且 $\nu_{f_{(A_1)C_1}} > \nu_{f_{(A_1)C_2}}$. 通过所提出得分函数计算后, A_1 在属性 C_1 和 C_2 下的得分函数分别为 $s_{\text{proposed}}(f_{A_1})_{C_1} = 0.97 < s_{\text{proposed}}(f_{A_1})_{C_2} = 1.23$, 验证了定理3的正确性. 此外, 由表2可见, 在属性 C_2 下 $f_{A_2} = F(0.3, 0.8)$ 和 $f_{A_5} = F(0.8, 0.3)$ 为互补关系, 通过所提出得分函数计算 A_2 和 A_5 在属性 C_2 下的得分可得, $s_{\text{proposed}}(f_{A_2})_{C_2} = -s_{\text{proposed}}(f_{A_5})_{C_2}$ (对应于表3中的第3列的第3行和第6行), 验证了定理4的正确性. 实际上, 表2中其他相关数据均可验证相关定理的正确性, 限于篇幅, 不一一列举.

运用所提出方法对上述实例进行计算, 同时运用文献[10, 38]方法对同一实例进行计算以进行比较分析, 所得评价结果如表4所示.

表4 针对同一实例不同方法所得结果及排序

备选方案	所提出方法	文献[10]	文献[36]
A_1	-1.3504 (5)	0.5088 (4)	-1.2435 (4)
A_2	-1.8670 (6)	0.3842 (6)	-1.9011 (6)
A_3	-0.9047 (3)	0.5483 (3)	-1.1522 (3)
A_4	-0.8081 (2)	0.6058 (2)	-0.7916 (2)
A_5	0.0000 (1)	0.7522 (1)	0.0000 (1)
A_6	-1.2372 (4)	0.4885 (5)	-1.4556 (5)

由表4可见(评价值后括号内的数值为排序值), 3种方法所得的最优方案均为 A_5 , 初步验证了所提出方法的有效性. 但是, 在具体排序上存在着差异, 这主要是由于文献[10, 38]的决策方法主要基于决策者是完全理性的假设, 但在实际决策过程中, 决策者由于自身知识和精力的限制, 是有限理性的, 特别是在面临损失和收益时会受到主观价值感受的影响, 如果忽略了这一点则会对最终的评价结果造成影响. 此外, 相较于另外两种方法, 所提出方法使用前景价值代替各方案与正负理想解之间的距离测度, 避免了忽略不同属性间的相关性对决策结果造成的影响, 可以得到更加科学合理的决策结果.

4.2 对比分析

为了进一步验证所提出方法的有效性, 本节将所提出方法应用于多组仿真数据中, 并与其他方法进行

对比分析.

首先利用 Matlab R2018a 生成 10 组仿真数据, 每组数据包含 6 个备选方案和 5 种属性值. 然后使用所提出方法、PF-TOPSIS 法^[10] 以及 PFHWD-TOPSIS 法^[19] 对仿真数据进行计算, 并对比分析计算结果. 其中: PF-TOPSIS 法将 TOPSIS 法拓展到了毕达哥拉斯模糊环境中; PFHWD-TOPSIS 法先通过各属性与理想解之间的距离测度靠近平均距离的程度确定距离测度相关联的权重, 再确定各方案与正负理想解之间的混合加权距离, 在此基础上计算各方案相对于理想解之间的相对贴程度, 最后对方案进行排序.

图2展示了3种不同方法在10组仿真数据中得出的最优方案一致的次数. 图2中: 横坐标类型1表示3种不同方法, 类型2表示所提出方法与 PF-TOPSIS 法, 类型3表示所提出方法与 PFHWD-TOPSIS 法, 纵坐标表示不同方法在多组仿真数据中得出相同最优方案的次数.

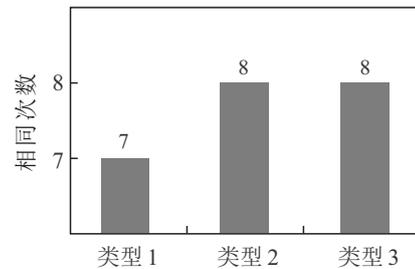


图2 10组仿真数据中不同方法得出相同最优方案次数

由图2可知, 3种不同方法在10组仿真数据中有7组数据得出同样的最优方案, 而所提出方法分别与 PF-TOPSIS 法和 PFHWD-TOPSIS 法在10组仿真数据中的8组数据得出的最优方案都是一致的, 在一定程度上验证了所提出方法的有效性. 进一步看, 所提出方法和 PF-TOPSIS 法在10组仿真数据中只有2组仿真数据得出的最优方案不一致, 但是排名前列的方案是一致的, 虽然在具体选择上有所区别, 但是仍然存在一定的相似性. 同样, 所提出方法与 PFHWD-TOPSIS 法之间也仅有2组仿真数据中得出的最优方案不同, 但是排名前列的方案同样具有一定的相似性. 通过多组仿真数据的分析, 进一步验证了所提出方法的有效性. 值得注意的是, 在10组仿真数据中, 所提出得分函数的相关定理仍然成立, 进一步验证了其正确性和优势所在.

3种方案在最优方案的选择上基本一致, 但是在具体排序上可能存在差别. 造成这些差别的主要原因有: 1) 所提出得分函数将模糊数转化为精确数时, 能够保证转化后数据的准确性, 不会出现如 $s_{\text{Peng and Ma}}(f)$ 在转化模糊数造成的偏误, 在减轻决

策者负担的同时,也减少了处理模糊数可能造成的误差;2) 所提出方法考虑了决策者在面临风险时心理因素的影响,其余两种方法忽略了这一影响因素;3) 所提出方法使用综合前景值代替距离测度,从而避免在使用距离测度时忽略属性之间相关性的影响。相比之下,所提出方法更加符合实际的决策过程。

5 结论

毕达哥拉斯模糊集自提出以来便受到了学者们的广泛关注,并且能够有效解决实际决策过程中由于模糊性和不确定性增加造成的问题。本文对毕达哥拉斯模糊多属性决策问题进行深入研究,提出了基于新得分函数和累积前景理论的毕达哥拉斯模糊TOPSIS法。本文研究内容的主要贡献和创新之处为:1) 针对现有得分函数的不足提出新得分函数,解决了现有得分函数存在的问题,同时证明了新得分函数所具有的性质特征,并且通过实例分析验证了新得分函数及相关定理的正确性和优势;2) 将新得分函数应用于毕达哥拉斯模糊多属性决策问题中,帮助决策者更好地处理模糊信息;3) 使用相对于正负理想解的前景价值代替距离测度,为解决欧氏距离忽略属性间相关性的问题提供不同的思路。最后,通过实例分析验证了所提出得分函数的优势和相关定理的正确性,并且初步验证了所提出方法的有效性。此外,使用仿真数据与其他方法进行比较分析,进一步验证了所提出方法的有效性和合理性,表明了该方法所具有的优势。未来将针对区间毕达哥拉斯模糊得分函数进行研究,并构建相应的决策模型解决群决策问题。

参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets & Systems*, 1986, 20(1): 87-96.
- [3] Atanassov K, Gargov G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy sets and Systems*, 1989, 31(3): 343-349.
- [4] 李伟伟, 易平涛, 郭亚军. 混合评价信息的随机转化方法和应用[J]. *控制与决策*, 2014, 29(4): 753-758.
(Li W W, Yi P T, Guo Y J. Blended evaluation information random transformation method and its application[J]. *Control and Decision*, 2014, 29(4): 753-758.)
- [5] 王露, 易平涛, 李伟伟, 等. 广义梯形模糊数密度加权算子及其应用[J]. *运筹与管理*, 2019, 28(12): 106-111.
(Wang L, Yi P T, Li W W, et al. Generalized trapezoidal fuzzy number density weighted operator and its application[J]. *Operations Research and Management Science*, 2019, 28(12): 106-111.)
- [6] Atanassov K T. Applications of intuitionistic fuzzy sets[C]. *Intuitionistic Fuzzy Sets*. Heidelberg: Physica-Verlag HD, 1999: 237-288.
- [7] Bustince H, Herrera F, Montero J. Fuzzy sets and their extensions: Representation, aggregation and models[M]. Berlin: Springer Heidelberg, 2008.
- [8] Yager R R. Pythagorean membership grades in multicriteria decision making[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2014, 22(4): 958-965.
- [9] Zeng S Z. Pythagorean fuzzy multiattribute group decision making with probabilistic information and OWA approach[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2017, 32(11): 1136-1150.
- [10] Zhang X L, Xu Z S. Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2014, 29(12): 1061-1078.
- [11] Rani P, Mishra A R, Pardasani K R, et al. A novel VIKOR approach based on entropy and divergence measures of Pythagorean fuzzy sets to evaluate renewable energy technologies in India[J]. *Journal of Cleaner Production*, 2019, 238: 117936.
- [12] Chen T Y. A novel PROMETHEE-based method using a Pythagorean fuzzy combinative distance-based precedence approach to multiple criteria decision making[J]. *Applied Soft Computing*, 2019, 82: 105560.
- [13] Hwang C L, Yoon K P. Multiple attribute decision making: Methods and application[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [14] 李美娟, 袁宁, 徐林明. 基于正交投影法的动态评价方法[J]. *中国管理科学*, DOI: 10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2019.1564.
(Li M J, Yuan N, Xu L M. Dynamic evaluation method based on vertical projection method[J]. *Chinese Journal of Management Science*, DOI: 10.16381/j.cnki.issn1003-207x.2019.1564.)
- [15] 徐林明, 李美娟, 欧忠辉, 等. 基于虚拟最劣解TOPSIS和灰关联度的动态评价方法[J]. *系统科学与数学*, 2019, 39(3): 365-377.
(Xu L M, Li M J, Ou Z H, et al. Dynamic evaluation method based on virtual worst solution TOPSIS and gray correlation degree[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2019, 39(3): 365-377.)
- [16] Yue Z L. TOPSIS-based group decision-making methodology in intuitionistic fuzzy setting[J]. *Information Sciences*, 2014, 277: 141-153.
- [17] Sun G D, Guan X, Yi X, et al. An innovative TOPSIS approach based on hesitant fuzzy correlation coefficient and its applications[J]. *Applied Soft Computing*, 2018, 68: 249-267.
- [18] Liang D C, Xu Z S. The new extension of TOPSIS method for multiple criteria decision making with hesitant Pythagorean fuzzy sets[J]. *Applied Soft Computing*, 2017, 60: 167-179.
- [19] 曾守楨, 穆志民. 基于混合加权距离的毕达哥拉斯模糊TOPSIS多属性决策方法研究[J]. *中国管理科学*,

- 2019, 27(3): 198-205.
(Zeng S Z, Mu Z M. A method based on hybrid weighted distance for Pythagorean fuzzy TOPSIS multiple-attribute decision making[J]. Chinese Journal of Management Science, 2019, 27(3): 198-205.)
- [20] Fang L, Yang J W. An integrated ranking approach using cross-efficiency intervals and the cumulative prospect theory[J]. Computers & Industrial Engineering, 2019, 136: 556-574.
- [21] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk[J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263.
- [22] Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty[J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297-323.
- [23] 王正新, 党耀国, 裴玲玲, 等. 基于累积前景理论的多指标灰关联决策方法[J]. 控制与决策, 2010, 25(2): 232-236.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L, et al. Multi-index grey relational decision-making based on cumulative prospect theory[J]. Control and Decision, 2010, 25(2): 232-236.)
- [24] 王娟, 金智新, 邓存宝, 等. 基于前景理论的三角犹豫模糊多属性决策方法[J]. 运筹与管理, 2019, 28(7): 26-33.
(Wang J, Jin Z X, Deng C B, et al. Multiple attribute decision making method for hesitant triangular fuzzy based on prospect theory[J]. Operations Research and Management Science, 2019, 28(7): 26-33.)
- [25] Ye J. Improved method of multicriteria fuzzy decision-making based on vague sets[J]. Computer-Aided Design, 2007, 39(2): 164-169.
- [26] Peng X D, Dai J G, Garg H. Exponential operation and aggregation operator for q-rung orthopair fuzzy set and their decision-making method with a new score function[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2018, 33(11): 2255-2282.
- [27] Tian X L, Niu M L, Zhang W K, et al. A novel todim based on prospect theory to select green supplier with q-rung orthopair fuzzy set[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2020, 27(2): 284-310.
- [28] Liu D, Qi X C, Fu Q, et al. A resilience evaluation method for a combined regional agricultural water and soil resource system based on weighted Mahalanobis distance and a Gray-TOPSIS model[J]. Journal of Cleaner Production, 2019, 229: 667-679.
- [29] Pelegrina G D, Duarte L T, Romano J M T. Application of independent component analysis and TOPSIS to deal with dependent criteria in multicriteria decision problems[J]. Expert Systems With Applications, 2019, 122: 262-280.
- [30] Sun G D, Guan X, Yi X, et al. An innovative TOPSIS approach based on hesitant fuzzy correlation coefficient and its applications[J]. Applied Soft Computing, 2018, 68: 249-267.
- [31] Peng X D, Yang Y. Some results for Pythagorean fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2015, 30(11): 1133-1160.
- [32] Ma Z M, Xu Z S. Symmetric Pythagorean fuzzy weighted geometric/averaging operators and their application in multicriteria decision-making problems[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2016, 31(12): 1198-1219.
- [33] Peng X D, Ma X L. Pythagorean fuzzy multi-criteria decision making method based on CODAS with new score function[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2020, 38(3): 3307-3318.
- [34] 高建伟, 刘慧晖, 谷云东. 基于前景理论的区间直觉模糊多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(12): 3175-3181.
(Gao J W, Liu H H, Gu Y D. Interval-valued intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making method based on prospect theory[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2014, 34(12): 3175-3181.)
- [35] 赵晓冬, 王飞, 张妮. 一种基于前景理论的毕达哥拉斯犹豫模糊不确定语言 ELECTRE 多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2020, 35(9): 2245-2251.
(Zhao X D, Wang F, Zhang N. Method for multi-attribute decision-making with Pythagorean hesitant fuzzy uncertain linguistic ELECTRE based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2020, 35(9): 2245-2251.)
- [36] Deng J L. Contributing degree in grey target theory[J]. The Journal of Grey System, 2000, 1: 40.
- [37] Hadi-Vencheh A, Mirjafari M. Fuzzy inferior ratio method for multiple attribute decision making problems[J]. Information Sciences, 2014, 277: 263-272.
- [38] Liang D C, Xu Z S, Liu D, et al. Method for three-way decisions using ideal TOPSIS solutions at Pythagorean fuzzy information[J]. Information Sciences, 2018, 435: 282-295.

作者简介

李美娟 (1979—), 女, 教授, 博士生导师, 从事科技管理与评价等研究, E-mail: 758300@qq.com;

卢锦呈 (1996—), 男, 硕士生, 从事综合评价方法的研究, E-mail: jclu0405@163.com.

(责任编辑: 魏冰)