

# 控制与决策

Control and Decision

## 自适应快速弱敏无迹Kalman滤波算法

姜泰山, 王晓乾, 赵良玉, 赵素娜

引用本文:

姜泰山, 王晓乾, 赵良玉, 等. 自适应快速弱敏无迹Kalman滤波算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(2): 506–512.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1086>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### [基于自适应惯性权重的樽海鞘群算法](#)

Salp swarm algorithm based on adaptive inertia weight

控制与决策. 2022, 37(1): 237–246 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0454>

### [具有全状态约束和未建模动态的严格反馈系统有限时间自适应动态面控制](#)

Finite-time adaptive dynamic surface control for strict-feedback systems with full state constraints and unmodeled dynamics

控制与决策. 2022, 37(1): 108–118 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1023>

### [航天器输入受限的鲁棒自适应姿态跟踪控制](#)

Robust adaptive attitude tracking control of spacecraft with constrained inputs

控制与决策. 2021, 36(9): 2297–2304 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0013>

### [基于数据驱动的非线性网络系统自适应迭代学习控制](#)

Data driven adaptive learning control of nonlinear network system

控制与决策. 2021, 36(6): 1523–1528 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1182>

### [抗遮挡与尺度自适应的改进KCF跟踪算法](#)

Improved KCF tracking algorithm based on anti-occlusion and scale transformation

控制与决策. 2021, 36(2): 457–462 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0394>

# 自适应快速弱敏无迹 Kalman 滤波算法

娄泰山<sup>1</sup>, 王晓乾<sup>1</sup>, 赵良玉<sup>2†</sup>, 赵素娜<sup>1</sup>

(1. 郑州轻工业大学 电气信息工程学院, 郑州 450002; 2. 北京理工大学 宇航学院, 北京 100081)

**摘要:** 针对现有弱敏无迹 Kalman 滤波需要代数求解增益矩阵耗时长和不能实时调节敏感性权重的问题, 提出一种自适应快速弱敏无迹 Kalman 滤波算法. 该算法在弱敏控制技术的基础上, 重新定义弱敏无迹 Kalman 滤波的敏感性权重矩阵, 将状态估计误差对不确定参数的敏感性加入滤波的代价函数, 并通过最小化该代价函数得到滤波增益矩阵的解析解, 减少了滤波计算复杂度和计算时间. 同时基于量测残差正交原理, 设计敏感性权重的自适应渐消因子, 实现滤波过程中敏感性权重的实时调节. 典型算例的数值仿真结果表明: 所提出的自适应快速弱敏无迹 Kalman 滤波算法能够提高计算效率和实时调节敏感性权重, 有效地降低不确定参数对状态估计的不利影响; 相较于传统的弱敏无迹 Kalman 滤波算法, 所提出算法的状态估计误差和计算时间分别减少 19.5% 和 99.9%.

**关键词:** 无迹 Kalman 滤波; 不确定参数; 自适应; 敏感性权重; 非线性滤波

中图分类号: TL361

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1086

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 娄泰山, 王晓乾, 赵良玉, 等. 自适应快速弱敏无迹 Kalman 滤波算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(2): 506-512.

## Adaptive fast desensitized unscented Kalman filter algorithm

LOU Tai-shan<sup>1</sup>, WANG Xiao-qian<sup>1</sup>, ZHAO Liang-yu<sup>2†</sup>, ZHAO Su-na<sup>1</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China; 2. School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that the existing desensitized unscented Kalman filter takes a large amount computational time to algebraically solve the gain matrix and the sensitivity weights cannot be adjusted in real-time, an adaptive fast desensitized unscented Kalman filtering algorithm is proposed. Based on the desensitized control technology, the algorithm redefines the sensitivity weight matrix of the desensitized unscented Kalman filter, and the sensitivity of the state estimation error for uncertain parameters is introduced to the cost function of the filter. The analytical solution of the filter gain matrix is obtained by minimizing the cost function, which reduces the computational complexity and time of the filter. At the same time, based on the orthogonal principle of measurement residuals, the adaptive fading factor of sensitivity weights is designed to realize the real-time adjustment of sensitivity weights in the filtering process. Numerical simulation results of a typical example show that the proposed adaptive fast desensitized unscented Kalman filtering algorithm can improve the computational efficiency, adjust the sensitivity weights in real-time and effectively reduce the adverse impact of uncertain parameters on state estimation. Compared with the traditional desensitized unscented Kalman filtering algorithm, the state estimation error and computational time of the proposed algorithm are reduced by 19.5% and 99.9% respectively.

**Keywords:** unscented Kalman filter; uncertain parameter; adaptive; sensitivity-weighting matrix; nonlinear filter

## 0 引言

面向运动体导航<sup>[1-3]</sup>、目标跟踪<sup>[4]</sup>、多传感器信息融合<sup>[5]</sup>和故障诊断<sup>[6]</sup>等领域的状态估计需求, 国内外专家学者提出了多种可应用于非线性系统的滤波算法, 如扩展 Kalman 滤波 (extended Kalman filter, EKF)、无迹 Kalman 滤波 (unscented Kalman filter, UKF)、容

积 Kalman 滤波、差分 Kalman 滤波、秩 Kalman 滤波和粒子滤波等<sup>[7-9]</sup>. 在假定系统模型参数精确已知、且噪声为 Guass 白噪声等条件下, 上述非线性滤波算法可获得状态的最优估计. 但由于这些滤波算法的状态估计结果对模型参数高度敏感, 当模型参数不匹配时, 滤波精度会显著下降<sup>[10]</sup>.

收稿日期: 2020-08-06; 录用日期: 2020-12-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12072027, 61603346); 郑州轻工业大学博士基金项目 (2018BSJJ007); 河南省高校科技创新团队项目 (19IRTSTHN013).

†通讯作者. E-mail: zhaoly@bit.edu.cn.

为解决模型参数的不确定性影响状态估计精度的问题, Karlgaard等将弱敏控制技术引入状态估计领域, 提出了弱敏Kalman滤波(desensitized Kalman filter, DKF)和弱敏EKF算法<sup>[11]</sup>, 其核心思想是将状态估计误差敏感性的加权和作为惩罚函数引入Kalman滤波框架中构建弱敏代价函数, 并通过最小化该函数获得弱敏最优增益矩阵的代数方程, 进而求解此代数方程得到增益矩阵来修正状态的估计. 随后, 相关研究人员提出了一系列基于确定性采样的弱敏UKF(desensitized UKF, DUKF)<sup>[12-13]</sup>、弱敏差分Kalman滤波<sup>[14]</sup>、弱敏中心微分Kalman滤波<sup>[15]</sup>、弱敏容积Kalman滤波<sup>[16]</sup>以及基于随机采样的弱敏集合Kalman滤波<sup>[17]</sup>, 并将其应用于火星探测器的状态估计<sup>[2,15,18]</sup>、电机的状态估计<sup>[17]</sup>等方面.

上述一系列弱敏滤波算法都面临着两个关键问题: 一是增益矩阵的代数方程求解计算量大、耗时长. Lou<sup>[19]</sup>通过重新定义敏感性矩阵, 提出了具有解析增益的弱敏Kalman滤波算法, 大大减少了滤波计算时间; 二是滤波过程中的敏感性权重需要实时调节以获得较好的估计结果. 但是, 上述弱敏滤波算法大多采用通过反复仿真验证获得的固定敏感性权重求实时调节敏感性权重. Lou<sup>[20]</sup>通过证明具有解析增益的弱敏Kalman滤波和Consider Kalman滤波的等价性, 建议利用不确定参数的方差阵作为敏感性权重. Ishihara等<sup>[13]</sup>通过分析不确定参数在UKF中的影响, 将参数的最大值与最小值之差的平方作为敏感性权重. 虽然Lou、Ishihara等对敏感性权重的初始取值给出了建议, 但并没有解决滤波过程中如何实时选取敏感性权重的问题. 为此, 本文在构建DUKF解析增益矩阵的基础上, 利用量测残差的正交原理<sup>[21-22]</sup>, 设计敏感性权重的自适应因子, 从而提出一种自适应快速弱敏UKF(A daptive fast desensitized unscented Kalman filter, AFDUKF)算法, 并通过弹道目标再入模型, 验证该算法不仅能够减少计算时间, 且可实时调整滤波过程中的敏感性权重, 有效地提高状态估计精度.

## 1 弱敏无迹Kalman滤波的解析增益

考虑模型参数具有不确定性的非线性离散系统

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{c}) + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{c}) + \mathbf{v}_k. \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{x}_k$  和  $\mathbf{z}_k$  分别为  $n$  维状态向量和  $m$  维量测向量;  $\mathbf{f}(\cdot)$  和  $\mathbf{h}(\cdot)$  分别为非线性函数向量;  $\mathbf{c}$  为  $\ell$  维参数

向量;  $\mathbf{w}_k$  和  $\mathbf{v}_k$  分别为过程噪声和量测噪声, 且满足

$$\begin{cases} E[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0}, E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj}, \\ E[\mathbf{v}_k] = \mathbf{0}, E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kj}, \\ E[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T] = \mathbf{0}; \end{cases} \quad (3)$$

非负定矩阵  $\mathbf{Q}_k$  和  $\mathbf{R}_k$  分别为过程噪声和量测噪声的方差阵.

### 1.1 UKF算法

UKF算法基于Sigma点传递和Unscented变换来近似后验概率密度函数, 其流程简要描述如下.

1) 时间更新.

计算  $k-1$  时刻后验方差阵  $\mathbf{P}_{k-1}^+$  的平方根

$$\mathbf{P}_{k-1}^+ = \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^+} (\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^+})^T. \quad (4)$$

计算Sigma点, 有

$$\begin{aligned} \chi_k^0 &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \\ \chi_k^j &= \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ \pm \sqrt{n + \lambda} (\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^+})_j, \quad j = 1, 2, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (5)$$

其中:  $\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$  为比例因子;  $\alpha$  为一个小的正数 ( $0 < \alpha < 1$ );  $\kappa$  为比例因子, 通常为  $0$  ( $n > 3$ ) 或  $3 - n$  ( $n \leq 3$ ).

传递Sigma点, 有

$$\bar{\chi}_k^j = \mathbf{f}(\chi_k^j, \bar{\mathbf{c}}), \quad j = 0, 1, \dots, 2n. \quad (6)$$

状态的先验估计值  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  和先验方差阵  $\mathbf{P}_{xx,k}^-$  分别为

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{j=0}^{2n} w_j^{(m)} \bar{\chi}_k^j, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{xx,k}^- = \sum_{j=0}^{2n} w_j^{(c)} (\bar{\chi}_k^j - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\bar{\chi}_k^j - \hat{\mathbf{x}}_k^-)^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (8)$$

其中

$$\begin{cases} w_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n + \lambda}, \\ w_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta), \\ w_j^{(m)} = w_j^{(c)} = \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n, \end{cases} \quad (9)$$

$\beta$  为调节参数(当噪声为高斯分布时,  $\beta = 2$  是最优的).

2) 量测更新.

计算量测的Sigma点, 有

$$\mathbf{Z}_k^j = \mathbf{h}(\bar{\chi}_k^j, \bar{\mathbf{c}}), \quad j = 0, 1, \dots, 2n. \quad (10)$$

计算量测的先验估计值  $\hat{\mathbf{z}}_k^-$ 、新息方差阵  $\mathbf{P}_{zz,k}$  和协方差阵  $\mathbf{P}_{xz,k}$ , 有

$$\hat{z}_k^- = \sum_{j=0}^{2n} w_j^{(m)} \mathbf{Z}_k^j, \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_{zz,k} = \sum_{j=0}^{2n} w_j^{(c)} (\mathbf{Z}_k^j - \hat{z}_k^-)(\mathbf{Z}_k^j - \hat{z}_k^-)^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_{xz,k} = \sum_{j=0}^{2n} w_j^{(c)} (\bar{\mathbf{X}}_k^j - \hat{x}_k^-)(\mathbf{Z}_k^j - \hat{z}_k^-)^T. \quad (13)$$

计算增益矩阵

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xz,k} \mathbf{P}_{zz,k}^{-1}. \quad (14)$$

计算状态后验估计值  $\hat{x}_k^+$  和后验方差阵  $\mathbf{P}_k^+$ , 有

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{z}_k^-), \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_{xx,k}^- + \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{zz,k} \mathbf{K}_k^T - \mathbf{P}_{xz,k} \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{xz,k}^T. \quad (16)$$

## 1.2 弱敏解析增益

当系统不存在干扰、不确定参数、有色噪声等不确定性时, 其状态估计误差  $\tilde{x}_k = \hat{x}_k - x_k$  的期望为  $E[\tilde{x}_k] = 0$ . 当模型参数具有不确定性时, 状态估计误差期望是有偏的, 且包含了参数不确定性信息. 由此, 定义状态估计误差对参数的敏感性<sup>[20]</sup>为

$$\mathbf{S}_k = \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \mathbf{c}} = \frac{\partial (\hat{x}_k - x_k)}{\partial \mathbf{c}} = \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial \mathbf{c}}. \quad (17)$$

其中:  $\mathbf{S} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_l)$  描述了状态估计误差  $\tilde{x}_k$  随参数  $\mathbf{c}$  的变化,  $\mathbf{s}_i = \partial \tilde{x}_k / \partial c_i$  表示状态估计误差对第  $i$  个参数的敏感性. 特别地, 状态真实值对参数  $\mathbf{c}$  的敏感性为零, 即  $\partial x_k / \partial \mathbf{c} = 0$ .

利用 Sigma 点计算先验敏感性

$$\mathbf{S}_k^- = \frac{\partial \tilde{x}_k^-}{\partial \mathbf{c}} = \sum_{j=0}^{2n} w_j^{(m)} \frac{\partial \mathbf{X}_k^j}{\partial \mathbf{c}}. \quad (18)$$

将式(15)对参数  $\mathbf{c}$  求导, 可得后验敏感性

$$\mathbf{S}_k^+ = \mathbf{S}_k^- - \mathbf{K}_k \gamma_k. \quad (19)$$

其中:  $\gamma_k \triangleq \partial \tilde{z}_k^- / \partial \mathbf{c} = (\gamma_{1,k}, \gamma_{2,k}, \dots, \gamma_{l,k})$  为量测预测误差对参数的敏感性,  $\tilde{z}_k^- = \mathbf{z}_k - \hat{z}_k^-$  为量测的先验估计误差.

将敏感性的加权值  $\text{tr}(\mathbf{S}_k^+ \mathbf{W}_k \mathbf{S}_k^{+T})$  作为惩罚函数加入到代价函数  $\text{tr}(\mathbf{P}_k^+)$  中, 得弱敏代价函数

$$J_d = \text{tr}(\mathbf{P}_k^+) + \text{tr}(\mathbf{S}_k^+ \mathbf{W}_k \mathbf{S}_k^{+T}). \quad (20)$$

其中:  $\text{tr}$  表示求矩阵的迹,  $\mathbf{W}_k$  为  $l \times l$  维半正定对角权重矩阵. 每一个参数的敏感性权重对应于  $\mathbf{W}_k$  主对角线上的一个元素.

将式(16)和(19)代入(20), 并对  $\mathbf{K}_k$  求偏导可得

$$\frac{\partial J_d}{\partial \mathbf{K}_k} = 2\mathbf{K}_k \mathbf{P}_{zz,k} - 2\mathbf{P}_{xz,k} - 2\mathbf{S}_k^- \mathbf{W}_k \gamma_k^T + 2\mathbf{K}_k \gamma_k \mathbf{W}_k \gamma_k^T. \quad (21)$$

令  $\partial J_d / \partial \mathbf{K}_k = 0$ , 可得增益矩阵

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{P}_{xz,k} + \mathbf{S}_k^- \mathbf{W}_k \gamma_k^T) (\mathbf{P}_{zz,k} + \gamma_k \mathbf{W}_k \gamma_k^T)^{-1}. \quad (22)$$

式(22)即为增益矩阵  $\mathbf{K}_k$  的解析解, 它不但平衡了方差阵和敏感性矩阵之间的关系, 且与 UKF 算法具有相似的结构. 当权重  $\mathbf{W}_k = \mathbf{0}$  时, 式(22)退化为 UKF 框架下的增益矩阵形式.

## 1.3 计算量分析

由于本文的 AFDUKF 算法与文献[12]中 DUKF 算法的主要区别在于增益矩阵的计算, 本节利用统计浮点运算次数法来估算二者增益矩阵的计算量来对比整个算法的计算量.

AFDUKF 算法(22)中增益矩阵的计算主要为矩阵的乘积和逆, 其计算量为  $nl^2 + nlm + nm^2 + ml^2 + m^2l + m^3$ , 一般来说  $n \geq m \geq l$ , 则其计算量约为  $O(nm^2)$ . 文献[12]中增益矩阵(维数为  $n \times m$  维)的计算需先利用符号计算建立含有  $nm$  个未知数的线性方程组, 再求解此线性方程组, 其计算量约为  $O(n^3m^3)$ . 由此可见, 文献[12]中增益矩阵的计算量要远大于本文增益矩阵的计算.

## 2 敏感性权重的自适应

上节通过重新定义状态估计误差对不确定参数的敏感性获得了增益矩阵的解析解, 减少了滤波的计算量, 但是滤波过程中敏感性权重如何实时选取的难题仍未解决. 本节主要根据文献[22]中的量测残差正交原理, 设计敏感性权重的自适应因子, 给出其计算方法.

根据量测残差正交原理, 当模型与实际系统完全匹配时, 有

$$E[\tilde{z}_{k+j}^- \tilde{z}_k^{-T}] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots \quad (23)$$

将量测的先验估计误差代入式(23), 整理可得

$$E[\tilde{z}_{k+j}^- \tilde{z}_k^{-T}] = \bar{\mathbf{H}}_{k+j} \Phi_{k+j-1} [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+j-1} \bar{\mathbf{H}}_{k+j-1}] \times \dots \Phi_{k+1} [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \bar{\mathbf{H}}_{k+1}] \Phi_k \Lambda_k. \quad (24)$$

其中

$$\Lambda_k = \mathbf{P}_{xz,k} - \mathbf{K}_k \Lambda_k, \quad (25)$$

$\mathbf{V}_k$  为实际残差矩阵.

欲使  $E[\tilde{z}_{k+j}^- \tilde{z}_k^{-T}] = 0$ , 则必有  $\Lambda_k = 0$ . 令式(22)中的敏感性权重  $\mathbf{W}_k = \lambda_k \mathbf{W}_0$  (其中  $\mathbf{W}_0$  为初始给定的敏感性权重), 则增益矩阵变为

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{P}_{xz,k} + \lambda_k \mathbf{S}_k^- \mathbf{W}_0 \gamma_k^T) (\mathbf{P}_{zz,k} + \lambda_k \gamma_k \mathbf{W}_0 \gamma_k^T)^{-1}. \quad (26)$$

将式(26)代入(25)代替 $\mathbf{K}_k$ ,整理可得

$$\lambda_k(\mathbf{S}_k^- \mathbf{W}_0 \gamma_k^T - \mathbf{P}_{xz,k} \mathbf{V}_k^{-1} \gamma_k \mathbf{W}_0 \gamma_k^T) = \mathbf{P}_{xz,k} \mathbf{V}_k^{-1} (\mathbf{P}_{zz,k} - \mathbf{V}_k). \quad (27)$$

令

$$\theta_k = \frac{\text{tr}(\mathbf{O}_k)}{\text{tr}(\mathbf{M}_k)}. \quad (28)$$

其中

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{S}_k^- \mathbf{W}_0 \gamma_k^T - \mathbf{P}_{xz,k} \mathbf{V}_k^{-1} \gamma_k \mathbf{W}_0 \gamma_k^T, \quad (29)$$

$$\mathbf{O}_k = \mathbf{P}_{xz,k} \mathbf{V}_k^{-1} \mathbf{P}_{zz,k} - \mathbf{P}_{xz,k}. \quad (30)$$

残差矩阵 $\mathbf{V}_k$ 可以通过下式获得:

$$\mathbf{V}_k = \begin{cases} \tilde{z}_1 \tilde{z}_1^T, & k = 1; \\ \frac{\rho \mathbf{V}_{k-1} + \tilde{z}_k \tilde{z}_k^T}{1 + \rho}, & k \geq 2. \end{cases} \quad (31)$$

其中 $\rho$ 为遗忘因子,其取值区间为(0, 1].

由此,敏感性权重的自适应因子可取为

$$\lambda_k = \begin{cases} \theta_k, & \theta_k > 1; \\ 1, & \theta_k \leq 1. \end{cases} \quad (32)$$

### 3 自适应快速弱敏无迹Kalman滤波

综合解析增益矩阵和敏感性权重的自适应方法,可得到自适应快速弱敏无迹Kalman滤波算法. 将其流程描述如下.

1) 初始化.

取状态初始值为 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 、方差阵初始值为 $\mathbf{P}_0$ ,参数的经验值为 $\bar{\mathbf{c}}$ ,敏感性初始值为 $\mathbf{S}_0 = \mathbf{0}_{n \times \ell}$ ,敏感性方差阵初始值为 $\partial \mathbf{P}_0^+ / \partial \mathbf{c} = \mathbf{0}_{n \times n \ell}$ ,敏感性权重为 $\mathbf{W}_0 = \mathbf{P}_{cc}$ ( $\mathbf{P}_{cc}$ 为不确定参数的方差阵)<sup>[19]</sup>.

2) 时间更新.

已知 $k-1$ 时刻的状态估计值为 $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+$ ,方差阵为 $\mathbf{P}_{k-1}^+$ ,敏感性矩阵为 $\mathbf{S}_{k-1}^+$ ,敏感性方差阵为 $\partial \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^+} / \partial \mathbf{c}$ .

利用式(4)计算 $k-1$ 时刻后验方差阵 $\mathbf{P}_{k-1}^+$ 的平方根,利用式(5)计算 $k$ 时刻的Sigma点集 $\{\chi_k^j\}_{j=0,1,\dots,2n}$ ,则Sigma点敏感性矩阵为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_k^0}{\partial \mathbf{c}} &= \mathbf{S}_{k-1}^+, \\ \frac{\partial \chi_k^j}{\partial \mathbf{c}} &= \mathbf{S}_{k-1}^+ + \frac{\partial (\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^+})_j}{\partial \mathbf{c}}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (33)$$

通过式(6)~(8)传递Sigma点集 $\{\bar{\chi}_k^j\}_{j=0,1,2,\dots,2n}$ 和先验Sigma点敏感性

$$\frac{\partial \bar{\chi}_k^j}{\partial \mathbf{c}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\chi_k^j, \bar{\mathbf{c}}, \mathbf{u}_k)}{\partial \chi_k^j} \frac{\partial \chi_k^j}{\partial \mathbf{c}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\chi_k^j, \mathbf{c}, \mathbf{u}_k)}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=\bar{\mathbf{c}}}. \quad (34)$$

计算先验估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ 和先验方差阵 $\mathbf{P}_{xx,k}^-$ . 通过式(18)

计算先验敏感性 $\mathbf{S}_k^-$ . 计算敏感性方差阵

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}_{xx,k}^-}{\partial \mathbf{c}} &= \sum_{j=0}^{2n} w_j^{(c)} \left[ \left( \frac{\partial \bar{\chi}_k^j}{\partial \mathbf{c}} - \mathbf{S}_k^- \right) (\bar{\chi}_k^j - \bar{\mathbf{x}})^T + \right. \\ &\quad \left. (\bar{\chi}_k^j - \bar{\mathbf{x}}) \left( \frac{\partial \bar{\chi}_k^j}{\partial \mathbf{c}} - \mathbf{S}_k^- \right)^T \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

3) 量测更新.

通过式(10)~(11)传递量测Sigma点集 $\{\mathbf{Z}_k^j\}_{j=0,1,2,\dots,2n}$ ,并计算量测的先验估计值 $\hat{z}_k^-$ ,则量测误差的敏感性 $\gamma_k$ 为

$$\gamma_k = \sum_{j=0}^{2n} w_j^{(m)} \frac{\partial \mathbf{Z}_k^j}{\partial \mathbf{c}}, \quad (36)$$

其中

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_k^j}{\partial \mathbf{c}} = \frac{\partial \mathbf{h}(\bar{\chi}_k^j, \bar{\mathbf{c}})}{\partial \bar{\chi}_k^j} \frac{\partial \bar{\chi}_k^j}{\partial \mathbf{c}} + \frac{\partial \mathbf{h}(\bar{\chi}_k^j, \mathbf{c})}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{c}=\bar{\mathbf{c}}}. \quad (37)$$

通过式(12)~(13)计算新息方差阵 $\mathbf{P}_{zz,k}$ 和协方差阵 $\mathbf{P}_{xz,k}$ . 相应的敏感性方差阵 $\partial \mathbf{P}_{zz,k} / \partial \mathbf{c}$ 和 $\partial \mathbf{P}_{xz,k} / \partial \mathbf{c}$ 分别为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}_{zz,k}}{\partial \mathbf{c}} &= \sum_{j=0}^{2n} w_j^{(c)} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{Z}_k^j}{\partial \mathbf{c}} - \gamma_k \right) (\mathbf{Z}_k^j - \hat{z}_k^-)^T + \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{Z}_k^j - \hat{z}_k^-) \left( \frac{\partial \mathbf{Z}_k^j}{\partial \mathbf{c}} - \gamma_k \right)^T \right], \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}_{xz,k}}{\partial \mathbf{c}} &= \sum_{j=0}^{2n} w_j^{(c)} \left[ \left( \frac{\partial \bar{\chi}_k^j}{\partial \mathbf{c}} - \mathbf{S}_k^- \right) (\mathbf{Z}_k^j - \hat{z}_k^-)^T + \right. \\ &\quad \left. (\bar{\chi}_k^j - \hat{\mathbf{x}}_k^-) \left( \frac{\partial \mathbf{Z}_k^j}{\partial \mathbf{c}} - \gamma_k \right)^T \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

4) 计算自适应因子.

通过式(28)~(32)计算自适应因子 $\lambda_k$ ,通过式(26)计算滤波增益矩阵 $\mathbf{K}_k$ .

5) 估计状态.

通过式(15)~(16)计算 $k$ 时刻的后验估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ 和后验方差阵 $\mathbf{P}_k^+$ . 相应的后验敏感性 $\mathbf{S}_k^+$ 和敏感性方差阵 $\partial \mathbf{P}_k^+ / \partial \mathbf{c}$ 分别为

$$\mathbf{S}_k^+ = \mathbf{S}_k^- + \mathbf{K}_k \gamma_k, \quad (40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_k^+}{\partial \mathbf{c}} = \frac{\partial \mathbf{P}_{xx,k}^-}{\partial \mathbf{c}} - \mathbf{K}_k \frac{\partial \mathbf{P}_{zz,k}}{\partial \mathbf{c}} \mathbf{K}_k^T. \quad (41)$$

注1 AFDUKF算法中 $\partial \sqrt{\mathbf{P}} / \partial \mathbf{c}$ 的计算式<sup>[16]</sup>为

$$\frac{\partial \sqrt{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{c}} = \Psi^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \Psi \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{c}} \right)^T \Psi^T - \Gamma \right\}^{-1} \Theta^T. \quad (42)$$

其中: $\Gamma \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为斜对称矩阵, $\Psi$ 和 $\Theta$ 为非奇异矩阵,且满足 $\Psi \sqrt{\mathbf{P}} \Theta = \mathbf{I}$ .

### 4 案例研究

为验证本文所提出算法的有效性和可行性,将其与已知参数真实值的UKF(perfect UKF, PUKF)、仅知道参数经验值而不知真实值的UKF(imperfect

UKF, IUKF)、文献[12]中提出的KSDUKF算法和本文提出的AFDUKF算法进行仿真对比分析. 利用多次仿真的均方根误差(root mean square errors, RMSE)作为指标来对比上述滤波算法的估计效果.

考虑一个弹道式目标的再入问题, 状态变量分别为位置 $x_1(t)$ (m)、速度 $x_2(t)$ (m/s)和弹道常数 $x_3(t)$ , 即 $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$ , 其中弹道系数 $c$ 为不确定参数<sup>[16]</sup>. 相应的非线性状态方程和量测方程分别为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_2^2(t)x_3(t) \exp\left\{\frac{-x_1(t)}{c}\right\} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$\boldsymbol{z} = \sqrt{M^2 + (\boldsymbol{x}_1 - H)^2} + \boldsymbol{v}. \quad (44)$$

其中: 不确定参数 $c$ 的经验值为 $\bar{c} = 2 \times 10^4$ ;  $M = 10^5$  m和 $H = 10^5$  m为观测雷达的位置坐标;  $\boldsymbol{v}$ 为量测的零均值Gauss白噪声, 其方差为 $\boldsymbol{R} = 10^4$  m<sup>2</sup>.

假设参数 $c$ 服从均匀分布 $U(0.75\bar{c}, 1.25\bar{c})$ , 状态的初始真值和初始估计值分别为

$$\begin{aligned} [x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^T = \\ [3 \times 10^5 \text{ m}, -2 \times 10^4 \text{ m/s}, 1 \times 10^{-3}]^T, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} [\hat{x}_1(0), \hat{x}_2(0), \hat{x}_3(0)]^T = \\ [3 \times 10^5 \text{ m}, -2 \times 10^4 \text{ m/s}, 3 \times 10^{-5}]^T. \end{aligned} \quad (46)$$

方差阵的初始值为

$$\boldsymbol{P}_0 = \text{diag}\{1 \times 10^6 \text{ m}^2, 4 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^2, 1 \times 10^{-4}\}. \quad (47)$$

整个仿真时间为60s, 采样时间为0.1s, 仿真次数为1000次. 连续状态方程(42)采用四阶Runge-Kutta方法进行离散化. 仿真中, IUKF算法和AFDUKF算法的敏感性权重为 $W = 10^4$ , KSDUKF算法的敏感性权重为 $\boldsymbol{W}_{KS} = \text{diag}[3 \times 10^4 \ 6 \times 10^3 \ 10^5]$ .

图1~图3分别为3个状态估计误差对参数 $c$ 的敏感性(纵坐标为对数尺度). 可以看出, 本文所提出AFDUKF的状态估计误差对不确定参数的敏感性最低, 其次是KSDUKF, 敏感性最大的是IUKF, 因为IUKF忽略了参数的不确定性.

图4~图6分别是4种滤波状态估计的均方根误差, 表1给出了其RMSE均值. 可以看出, 这4种滤波算法对状态 $x_3$ 的RMSE大致相当; 针对其余2个状态, PUKF的RMSE最小, 这主要是因为PUKF已知参数的真实值; IUKF的RMSE最大, 这是因为IUKF采用了参数的经验值造成模型不匹配, 从而降低了滤波的估计精度; 本文提出的AFDUKF算法相对于KSDUKF而言, 其RMSE比较小.

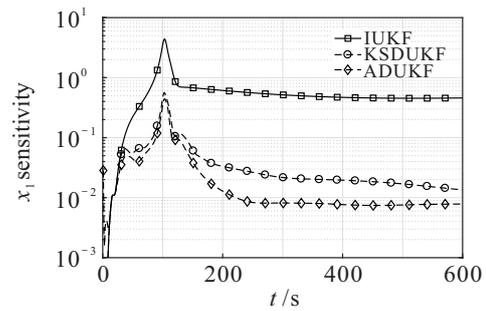


图1 状态误差 $\tilde{x}_1$ 对参数 $c$ 的敏感性

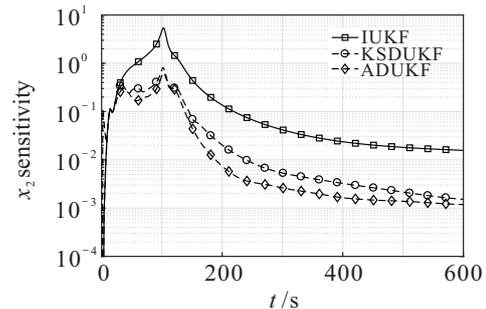


图2 状态误差 $\tilde{x}_2$ 对参数 $c$ 的敏感性

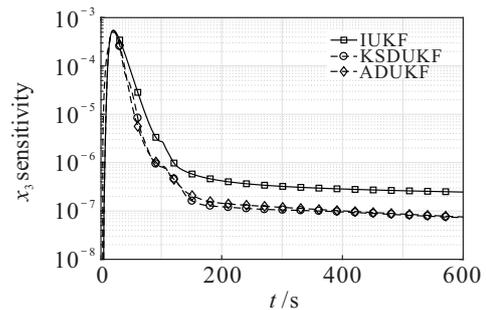


图3 状态误差 $\tilde{x}_3$ 对参数 $c$ 的敏感性

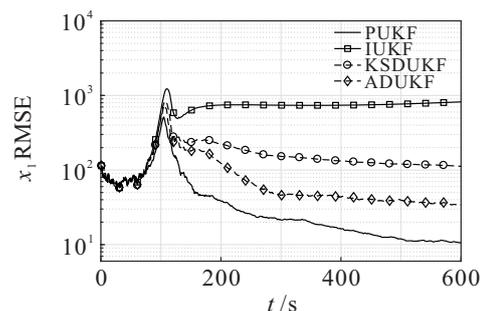


图4 状态 $x_1$ 的RMSE

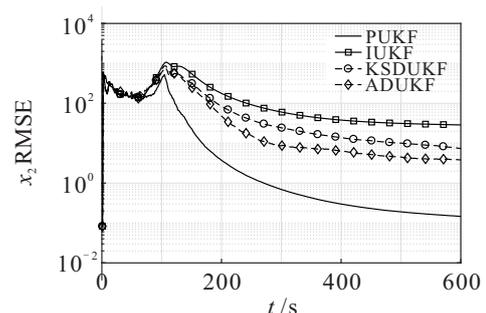


图5 状态 $x_2$ 的RMSE

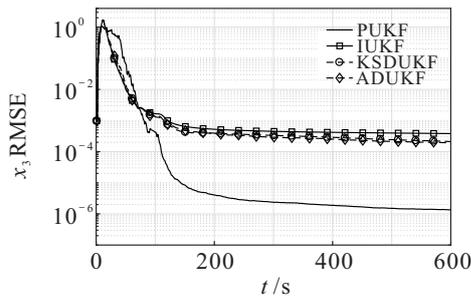


图6 状态 $x_3$ 的RMSE

表1 RMSE的平均值

	PUKF	IUKF	KSDUKF	AFDUKF
$x_1$	48.8673	644.3473	166.5303	91.9382
$x_2$	47.9455	171.7319	114.5872	96.4434
$x_3$	0.0486	0.0319	0.0325	0.0332

图7给出了AFDUKF算法在滤波过程中自适应因子(平均值为31.1)的变化,可以看出,通过敏感性权重的自适应调节有效地提高了滤波精度。

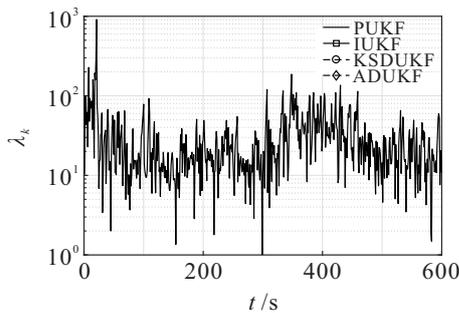


图7 滤波过程中的自适应因子

表2给出了4种滤波算法仿真的单次平均时间,可以看出,PUKF用时最短,IUKF和本文提出的AFDUKF用时大致相当,而KSDUKF的用时远远多于其他3种滤波方法。从理论上来说,IUKF和PUKF的用时一样,但是由于仿真中计算了IUKF的状态估计误差对不确定参数的敏感性,导致其滤波时间变长。

表2 仿真的单次平均时间

	PUKF	IUKF	KSDUKF	AFDUKF
$t/s$	0.0744	0.2982	214.9304	0.3178

由上述分析可以看出:本文提出的AFDUKF算法不但能有效地降低状态估计误差对不确定参数的敏感性,提高滤波精度,而且其相对于KSDUKF在快速性上也具有很大的优势。

### 5 结论

本文针对弱敏无迹Kalman滤波的两个关键问题开展了研究,主要工作和结论如下:

1)为快速获得增益矩阵,重新定义了状态估计误差对参数的敏感性和代价函数,获得了解析形式的增益矩阵,减少了计算量,提高了计算效率;

2)为实时调节滤波过程中的敏感性权重,利用量测残差正交原理设计了敏感性权重的自适应因子,提出了AFDUKF算法;

3)弹道式目标再入模型的数值仿真结果表明,本文提出的算法相比于KSDUKF的计算时间降低了99.9%,状态估计误差平均减少了19.5%。

### 参考文献(References)

- [1] 付梦印, 邓志红, 闫莉萍. Kalman滤波理论及其在导航系统中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 171-185. (Fu M Y, Deng Z H, Yan L P. Kalman filtering theory and its application in the navigation system[M]. Beijing: Science Press, 2010: 171-185.)
- [2] Lou T, Zhao L. Robust Mars atmospheric entry integrated navigation based on parameter sensitivity[J]. Acta Astronautica, 2016, 119: 60-70.
- [3] 郝顺义, 卢航, 魏翔, 等. 简化高阶强跟踪容积分卡尔曼滤波及其在组合导航中的应用[J]. 控制与决策, 2019, 34(10): 2105-2114. (Hao S Y, Lu H, Wei X, et al. Reduced high-degree strong tracking cubature Kalman filter and its application in integrated navigation system[J]. Control and Decision, 2019, 34(10): 2105-2114.)
- [4] Crassidis J L, Junkins J L. Optimal estimation of dynamic systems[M]. 2nd ed. Boca Raton: Chapman & Hall\CRC Press, 2012: 231-238.
- [5] Taghavi E, Tharmarasa R, Kirubarajan T, et al. A practical bias estimation algorithm for multisensor-multitarget tracking[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2016, 52(1): 2-19.
- [6] 杜占龙, 李小民. 多重渐消因子强跟踪SCKF及其在故障参数估计中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(4): 643-649. (Du Z L, L X M. Multiple fading factors strong tracking SCKF and its application in fault parameter estimation[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(4): 643-649.)
- [7] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [8] Dan S. Optimal state estimation[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2006: 395-430.
- [9] 傅惠民, 肖强, 吴云章, 等. 秩滤波方法[J]. 机械强度, 2014, 36(4): 521-526. (Fu H M, Xiao Q, Wu Y Z, et al. Rank filter method[J]. Journal of Mechanical Strength, 2014, 36(4): 521-526.)
- [10] Sayed A H. A framework for state-space estimation with uncertain models[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(7): 998-1013.

[11] Karlgaard C D, Shen H J. Desensitized Kalman filtering[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2013, 7(1): 2-9.

[12] Shen H J, Karlgaard C D. Sensitivity reduction of unscented Kalman filter about parameter uncertainties[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2015, 9(4): 374-383.

[13] Ishihara S, Yamakita M. Adaptive robust UKF for nonlinear systems with parameter uncertainties[C]. IECON 2016-42nd Annual Conference on the IEEE Industrial Electronics Society. Florence, 2016: 48-53.

[14] Karlgaard C D, Shen H J. Robust state estimation using desensitized divided difference filter[J]. ISA Transactions, 2013, 52(5): 629-637.

[15] Lou T, Liu J, Jin P, et al. MACV/radio integrated navigation for Mars powered descent via robust desensitized central difference Kalman filter[J]. Advances in Space Research, 2017, 59(1): 457-471.

[16] Lou T, Wang L, Su H, et al. Desensitized cubature Kalman filter with uncertain parameters[J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(18): 8358-8373.

[17] Yang X, Liu G, Chen N, et al. Desensitized ensemble Kalman filtering for induction motor estimation[J]. IEEE Access, 2019, 7: 78029-78036.

[18] Wang L, Xia Y. Mars entry navigation with uncertain parameters based on desensitized extended Kalman filter[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2015, 11(5): 998-1005.

[19] Lou T. Consider uncertain parameters based on sensitivity matrix[J]. 2015, arXiv: 1503.08379.

[20] Lou T. Desensitized Kalman filtering with analytical gain[J]. 2015, arXiv: 1504.04916.

[21] 周东华, 席裕庚, 张钟俊. 一种带多次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器[J]. 自动化学报, 1991, 17(6): 689-695.  
(Zhou D H, Xi Y G, Zhang Z J. A suboptimal multiple fading extended kalman filter[J]. Acta Automatica Sinica, 1991, 17(6): 689-695.)

[22] 周东华, 叶银忠. 现代故障诊断与容错控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000: 60-68.  
(Zhou D H, Ye Y Z. Modern fault diagnosis and fault-tolerant control[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000: 60-68.)

作者简介

娄泰山(1981—), 男, 讲师, 博士, 从事运动体导航与控制、滤波理论及应用的研究, E-mail: tayzan@sina.com;

王晓乾(1994—), 男, 硕士生, 从事卡尔曼滤波和无人机组合导航的研究, E-mail: xiaoqian.wang233@foxmail.com;

赵良玉(1981—), 男, 副教授, 博士生导师, 从事导航制导与控制、飞行器总体设计等研究, E-mail: zhaoly@bit.edu.cn;

赵素娜(1981—), 女, 讲师, 博士, 从事脑控移动机器人的研究, E-mail: zsnzsn1221@163.com.

(责任编辑: 孙艺红)

下 期 要 目

旋翼无人机环境覆盖与探索规划方法综述..... 张世勇, 等

无人机探测与对抗技术发展及应用综述..... 罗俊海, 等

面向冷链物流配送路径优化的知识型蚁群算法..... 任 腾, 等

面向星地协同观测规划问题的改进人工蜂群算法..... 宋彦杰, 等

舰载机多雷达传感器任务分配与采样间隔融合优化算法..... 李宝鹏, 等

带有策略自适应的状态转移算法..... 董颖超, 等

基于瞬时幅值的光伏系统电流传感器微小故障检测及估计..... 许水清, 等

基于观测优化的双机协同控制与避障..... 史浩然, 等

基于D-NSGA-GKM算法的多阶段武器协同火力分配方法..... 于博文, 等

基于注意力LSTM的多阶段发酵过程集成质量预测..... 高学金, 等

基于收缩约束模型预测控制的无人车辆路径跟踪..... 王志文, 等

基于复原结构与增强纹理融合的水下图像清晰化..... 林 森, 等

基于时空图卷积循环神经网络的交通流预测..... 谷振宇, 等