

# 控制与决策

Control and Decision

## 多源多汇网络的极限范围与运行边界

肖峻, 屈玉清, 宋晨辉, 陈飞龙, 孙哲, 吕良福

引用本文:

肖峻, 屈玉清, 宋晨辉, 等. 多源多汇网络的极限范围与运行边界[J]. 控制与决策, 2022, 37(3): 676–684.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1157>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 基于视觉引导多AGV系统的改进A\*路径规划算法

Improved A\* path planning algorithm for vision-guided multi-AGV system

控制与决策. 2021, 36(8): 1881–1890 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1670>

### 基于不变网络模型和故障注入的分布式信息系统故障溯源方法

Fault source location algorithm for distributed information system based on invariant network and fault injection

控制与决策. 2020, 35(11): 2723–2732 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0214>

### 无人飞行器航迹方案的VIKOR择优评价

Unmanned aerial vehicle path scheme optimal evaluation based-VIKOR

控制与决策. 2020, 35(12): 2950–2958 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0415>

### 基于改进堆叠自动编码器的循环冷却水系统工艺介质温度预测控制方法

Predictive control method of process medium temperature in circulating cooling water system based on improved stacked auto encoders

控制与决策. 2020, 35(12): 2835–2844 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0694>

### 基于数据驱动的浓密-压滤过程协调优化控制

Data driven coordinated optimization control of thickening-filter process

控制与决策. 2021, 36(5): 1095–1100 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1151>

# 多源多汇网络的极限范围与运行边界

肖峻<sup>1†</sup>, 屈玉清<sup>1</sup>, 宋晨辉<sup>1</sup>, 陈飞龙<sup>1</sup>, 孙哲<sup>1</sup>, 吕良福<sup>2</sup>

(1. 天津大学电气自动化与信息工程学院, 天津 300072; 2. 天津大学数学学院, 天津 300072)

**摘要:** 研究并得到多源多汇网络的极限范围与运行边界. 首先, 定义临界流, 现有研究的最大流和堵塞流是临界流的一部分; 其次, 得到多源多汇网络的所有临界流, 并绘制成临界流曲线, 完整刻画网络传输流量能力的极限范围, 最大流流量位于曲线最高点、最小流流量位于曲线最低点; 再次, 利用临界流确定网络流的运行边界, 边界内部和边界上均为可行流, 边界外均为不可行流, 同时提出多源多汇网络临界流、临界流曲线和运行边界的数学定义及求解方法; 最后, 给出临界流曲线和运行边界在规划和运行领域中的用途, 多源多汇网络模型更接近于实际网络, 其临界流曲线和运行边界的发现能帮助人们更深入地了解实际网络运行的极限范围.

**关键词:** 多源多汇网络; 最大流; 堵塞流; 临界流; 临界流曲线; 运行边界

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1157

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 肖峻, 屈玉清, 宋晨辉, 等. 多源多汇网络的极限范围与运行边界[J]. 控制与决策, 2022, 37(3): 676-684.

## Limit range and operation boundary of multi-source and multi-sink network

XIAO Jun<sup>1†</sup>, QU Yu-qing<sup>1</sup>, SONG Chen-hui<sup>1</sup>, CHEN Fei-long<sup>1</sup>, SUN Zhe<sup>1</sup>, LV Liang-fu<sup>2</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China; 2. School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** The limit range and operation boundary of the multi-source and multi-sink network are obtained. Firstly, the critical flow is defined. The maximum flow and blocking flow in existing researches are parts of the critical flow. Then, all critical flows of the multi-source and multi-sink network are obtained for the first time and plotted as a CF curve. The CF curve completely describes the limit range of the network transmission flow capacity, where the maximum flow is located at its highest point and the minimum flow is located at its lowest point. The critical flow is also used to determine the network operational boundary, inside which are feasible flows, and outside which are unfeasible flows. The mathematical definitions and solutions method of critical flow, CF curve and operational boundary of the multi-source and multi-sink network are proposed. Finally, the possible applications of the critical flow curve and the operational boundary in planning and operation fields are demonstrated. Since most real networks are the multi-source multi-sink networks, so the proposal of critical flow curve and operation boundary can help us know the full limit range of network operation.

**Keywords:** multi-source and multi-sink network; maximum flow; blocking flow; critical flow; critical flow curve; operation boundary

## 0 引言

物理网络广泛存在于人类生活和工作的各个方面, 如由通信线路、路由器和基站等组成的通讯网络, 由道路组成的交通网络, 由电力线路、设备和杆塔等组成的电力网络等. 人们在研究这些实际的物理网络时, 可通过数学建模将其抽象为弧具有容量和流量的网络, 简称流量网络或容量网络<sup>[1]</sup>.

物理网络存在工作的极限范围, 在极限范围内可

以正常工作, 若工作状态超过了极限范围, 则会带来不好的后果. 例如, 电流超过导线允许容量会使导线烧坏, 交通网络车流超过最大承载车流可能造成交通堵塞. 关于流量网络极限范围的早期研究是最大流(maximum flow, MF 或 mf)理论. 最大流问题是在所有弧的流量都不超过其容量条件下, 求解从源点到汇点的最大流量, 该问题最早出现在铁路网最大通过能力的研究中<sup>[2]</sup>. 最大流的研究主要在其求解算法<sup>[3-6]</sup>

收稿日期: 2020-08-19; 录用日期: 2020-12-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(51877144).

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: xiaojun@tju.edu.cn.

和应用<sup>[7-11]</sup>上.

最大流能表征流量网络的最大极限,但并不完整,网络还存在其他极限状态——堵塞流. Dinic<sup>[4]</sup>最早发现了“堵塞流”,但仅将其看作最大流的过渡解. Sleator等<sup>[12]</sup>命名了堵塞流,在非循环网络中找到一个从源点 $s$ 到汇点 $t$ 的每条路径都包含一条饱和弧(弧流量等于其容量)的流. Goldberg等<sup>[13]</sup>完善了堵塞流的概念,从 $s$ 到 $t$ 的每条路径都包含至少一条饱和弧的流. Ning<sup>[14]</sup>提出了饱和流概念,本质上与堵塞流相同. Kornilova<sup>[15]</sup>最早提出了最小流,即流量值最小的满足平衡条件且弧流量不小于其容量的流. Malyshko等<sup>[16]</sup>完善了最小流的概念,即流量值最小的堵塞流. 从概念上看,堵塞流包含了最大流与最小流. 堵塞流提出后,在模型、算法、应用等方面有很好的进展<sup>[16-18]</sup>.

现有堵塞流的大部分研究仅求解了最大流和最小流,很少关注最大流和最小流以外的其他堵塞流. Wu等<sup>[19-20]</sup>的算法有所进展,但还只能求解流量值为整数的堵塞流,尚未得到完整的堵塞流,且其仅将结果用于网络的可靠性评估与改造.

本文首次计算得到完整的堵塞流,将其用于描述流量网络的极限范围与运行边界. 实际网络一般都是多源多汇网络,因此选择多源多汇网络作为研究对象. 现有关于多源多汇网络的相关研究大多是最大流求解算法<sup>[21-23]</sup>和网络资源分配<sup>[24-25]</sup>及网络可靠性<sup>[26-27]</sup>等,很少有研究多源多汇网络堵塞流的报道. 为描述网络流的极限范围和运行边界,将堵塞流重命名为临界流,这是因为堵塞流本质上是可行流到

不可行流的临界状态,而堵塞流的名称更适合交通网络. 给出临界流的数学定义和求解方法,得到多源多汇网络的所有临界流,从而确定其运行边界,并提出临界流曲线以完整描述网络的极限范围.

### 1 网络的临界状态

文中涉及的变量符号和术语如表1和表2所示.

表1 变量符号

符号	含义
MF/mf	最大流
$G$	流量网络/容量网络/网络
$V$	顶点集合
$A$	弧集合
$S$	源点集
$T$	汇点集
$M$	中间顶点的集合
$a$	弧
$(v_i, v_j)$	以 $v_i$ 为始点、 $v_j$ 为终点的弧
$c_{ij}/c_k$	弧的容量
$f_{ij}/f_k$	弧的流量
$f$	网络流/可行流
$v$	顶点
$val(f)$	可行流流量
$F$	可行流集合
cf	临界流
CF	运行边界/临界流集合
$S_x$	观测变量
$F_c$	常量
$L()$	线性表示
CF Curve	临界流曲线
$b$	临界流曲线的采样点序号
$n$	采样得到的临界流个数
$MF/CF_{max}$	最大流流量
$MCF/CF_{min}$	最小流流量
mcf	最小流
$\overline{CF}$	平均临界流流量
$CF/F$	临界流占比

表2 术语定义

序号	术语	符号	定义	公式
1	可行流	$f$	满足平衡条件和容量约束的网络流	(1)和(2)
2	可行流流量	$val(f)$	可行流的流量值,即源点的净输出量或汇点的净输入量	
3	临界性	—	可行流任一弧增加任意流量后,在其余弧流量不减小条件下形成的新流总是至少有一弧会过载,则原可行流是临界的	
4	临界流	cf	具有临界性的可行流	(3)
5	运行边界	CF	所有临界流构成的集合	(4)
6	临界流曲线	CF Curve	所有临界流的流量按从小到大排序构成的曲线	(5)
7	平均临界流流量	$\overline{CF}$	临界流流量的平均值	
8	临界流占比	$CF/F$	临界流流量范围与可行流流量范围之比	

#### 1.1 最大流的多值性与临界性

最大流是流量网络(简称网络)中具有最大允许流通流量的网络流<sup>[1]</sup>. 有的网络的最大流只有一个,有的则有多个,例如两源两汇网络CASE1<sup>[28]</sup>(在Ahuja<sup>[28]</sup>网络基础上增加了一条弧,见图1中弧 $a_6$ ). 根据Ford等<sup>[1]</sup>所述方法,先将CASE1网络转换为单源单汇网络,然后采用标号算法计算CASE1最

大流mf,其流量为 $val(mf)$ ,文中简记为MF. CASE1的MF为14,在弧流量为整数的条件下,可得到7个最大流,其中的2个最大流如图1所示,图中弧上的数字表示弧的容量和流量 $(c_i, f_i)$ . 需要指出,经典网络流理论研究最大流时未考虑顶点容量<sup>[1,28]</sup>,本文也不加以考虑.

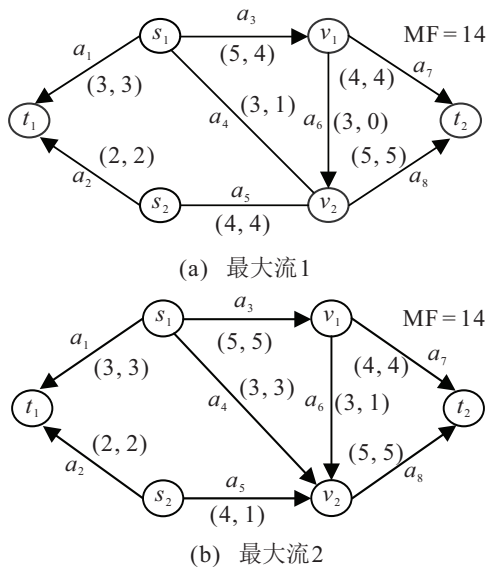


图1 CASE1的2个最大流

观察图1(a)发现,该最大流处于一种临界状态,具有临界性,即任意弧流量均已不能增加,若增加流量将导致弧流量超容量(过载).分两种情况进行说明.

**情况1** 若某弧流量增加,则导致该弧过载,如弧 $a_1、a_2、a_5、a_7、a_8$ .

**情况2** 若某弧流量增加,则该弧流量不过载,但会导致其他弧过载,如弧 $a_3、a_4$ 和 $a_6$ .以 $a_3$ 为例,若 $a_3$ 流量增加,则需满足流量平衡条件(见2.1.1节) $f_3 = f_6 + f_7$ 及 $f_4 + f_5 + f_6 = f_8$ ,从而导致 $a_7$ 或 $a_8$ 过载.

综上所述,最大流具有临界性,网络存在多个最大流,这表明网络的临界状态并不唯一.那么,除最大流外,网络是否可能存在其他的临界状态.

### 1.2 非最大流的临界状态

网络还存在不是最大流的临界状态,图2给出了CASE1的4个小于最大流的临界状态.

图2(a)、(b)、(c)、(d)的流量分别为12、12.4、13和13.6,均小于最大流14,但是它们均处于临界状态,均具有临界性.验证发现,此时任意一个弧的流量均不能增加.以图2(a)为例,分两种情况讨论.

**情况3** 若某弧流量增加,则导致该弧过载,如弧 $a_1、a_2、a_3、a_6、a_8$ .

**情况4** 若某弧流量增加,则该弧不过载,但导致其他弧过载,如弧 $a_4、a_5$ 和 $a_7$ .以 $a_4$ 为例,若 $a_4$ 流量增加,则需满足平衡条件 $f_4 + f_5 + f_6 = f_8$ ,从而导致 $a_8$ 过载.

综上所述,最大流是一种临界状态,网络还存在小于最大流的临界状态,文中将这种临界状态称为临界流.

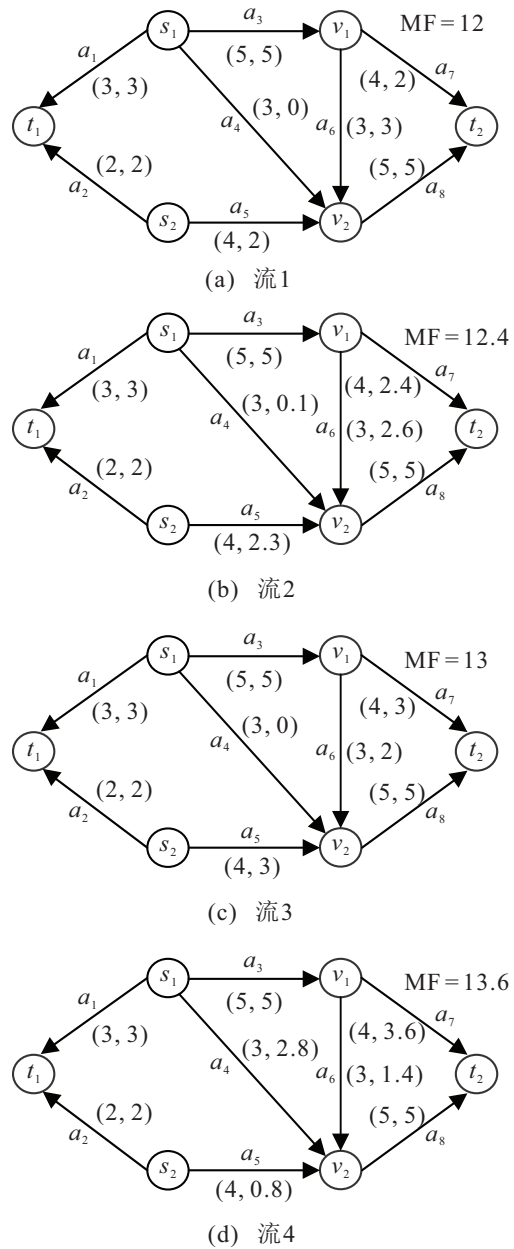


图2 CASE1中小于最大流的临界状态

## 2 临界流相关定义及计算方法

### 2.1 临界流

#### 2.1.1 预备定义

**定义1**(流量网络) 给定有向图 $G = (V, A)$ .  $V = \{M, S, T\}$ 为 $G$ 中顶点的集合; $M$ 为 $G$ 中除 $S$ 和 $T$ 外中间顶点的集合,中间顶点是入度和出度均不为0的顶点; $S$ 为 $G$ 中源点的集合(简称源点集),源点是入度为0且出度不为0的顶点; $T$ 为 $G$ 中汇点的集合(简称汇点集),汇点是入度不为0且出度为0的顶点; $A = \{a | a = (v_i, v_j)\}$ 为 $G$ 中弧的集合(简称弧集);非负实数 $c$ 为弧的容量集, $c_{ij}$ 为弧 $(v_i, v_j)$ 的容量;称 $G$ 为流量网络或容量网络<sup>[1]</sup>,记为 $G = (V, A, c)$ ,简称网络.

当网络中的源点集和汇点集都只含一个顶点时,称为单源单汇网络,其余的为多源多汇网络<sup>[1]</sup>.

**定义2(可行流)** 网络流为弧集  $A$  上的实函数  $f: V \times V \rightarrow R$ , 定义为  $f = \{f_{ij}\}$ ,  $f_{ij}$  为弧  $(v_i, v_j)$  的流量. 对于  $G$  上的一个网络流  $f$ , 如果满足下述两个条件, 则称  $f$  是  $G$  上的一个可行流<sup>[1]</sup>:

1) 平衡条件. 即-3pt

$$\begin{cases} f(v, V) - f(V, v) = 0, v \in M; \\ f(S, V) - f(V, S) = \text{val}(f); \\ f(T, V) - f(V, T) = -\text{val}(f). \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\text{val}(f)$  为可行流  $f$  的流量, 即源点集的净输出量或汇点集的净输入量.

2) 容量约束. 对于  $\forall (v_i, v_j) \in A$ , 均满足

$$0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}. \quad (2)$$

所有可行流集合记为  $F$ . 不满足平衡条件或容量约束的网络流是不可行流.

### 2.1.2 临界流定义

**定义3(临界流)** 设  $f = \{f_{ij}\}$  是网络  $G$  上的可行流, 如果  $f$  满足临界性条件, 则称  $f$  是  $G$  上的临界流, 记为  $cf$ . 临界性条件为

$$f \in F, f' = f, \forall (v_i, v_j) \in A, f'_{ij} = f_{ij} + \varepsilon, \varepsilon > 0.$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} f'(v, V) - f'(V, v) = 0, v \in M; \\ f'(S, V) - f'(V, S) = \text{val}(f'); \\ f'(T, V) - f'(V, T) = -\text{val}(f'); \\ f'_{ml} \geq f_{ml}, \forall (v_m, v_l) \in A, v_m \in V, \\ v_l \in V, (v_m, v_l) \neq (v_i, v_j). \end{cases}$$

$$\exists f'_{ij} > c_{ij}, (v_i, v_j) \in A.$$

式(3)的含义是: 对于一个可行流  $f$ , 若任一弧  $(v_i, v_j)$  增加任意小的流量 ( $f'_{ij} = f_{ij} + \varepsilon$ ), 则形成一个新流  $f'$ . 在其余弧  $(v_m, v_l)$  流量不能减少 ( $f'_{ml} \geq f_{ml}$ ) 的条件下,  $f'$  为满足平衡条件, 部分弧的流量会增加. 如果  $f'$  至少存在一个弧流量过载, 即  $f'_{ij} > c_{ij}$ , 则可行流  $f$  具有临界性.

在上述定义中有一个条件: 某弧增流量后, 其余弧的流量不允许减少. 这表示不允许削减其余弧的流量需求. 若没有该条件, 即允许进行任意的流量优化, 则最终优化结果必然成为一个最大流.

需要指出, 上述临界流数学定义与堵塞流<sup>[13]</sup>是等价的, 堵塞流数学上定义为从  $s$  到  $t$  的每条路径都包含至少一条饱和弧的可行流<sup>[16]</sup>. 由于式(3)的临界性更符合文中研究网络极限范围的角度, 文中采用式(3)临界性定义.

### 2.2 运行边界

**定义4(运行边界)** 有

$$CF = \{cf\}. \quad (3)$$

可以发现, 在网络运行的状态空间中, 所有临界流构成的集合形成了网络的运行边界, 在边界内部和边界上均为可行流, 边界外均为不可行流.

现有研究尚未找到多源多汇网络的所有临界流, 本文认为有必要找到它们, 因为只有如此, 才能完整地描述网络的运行边界. 给出两种计算网络完整临界流的方法, 即解析法和采样法.

**算法1 解析法.** 根据网络结构、容量约束和流量平衡关系推导所有临界流集合(即运行边界)对应的解析表达式, 具体过程和示例见第3.1.1节.

**算法2 采样法.** 总体思路是在状态空间中采样得到能代表完整运行边界的有限个临界流. 算法基于网络结构及流量平衡关系, 对采样的弧变量个数进行降维; 在弧容量状态空间中, 按给定步长进行完整地采样, 生成该步长下的全部可行流; 对每一个可行流进行临界性校验, 得到采样步长下的完整临界流. 具体步骤如下.

**step 1: 降维.** 弧变量个数为采样的变量维度, 为提高采样算法效率, 根据网络结构和流量平衡关系减少采样的弧变量个数, 步骤如下:

**step 1.1:** 选取以源点集中的顶点为始点的弧流量为一组观测变量, 记为  $Sx$ ;

**step 1.2:** 结合临界流定义确定网络临界状态的满载弧(流量等于容量), 计算临界流时, 这些弧流量将始终为常量(容量), 记为  $Fc$ , 当  $Sx$  中含有满载弧时, 该弧流量取常量(容量), 归入  $Fc$ ;

**step 1.3:** 基于网络结构与平衡关系, 利用常量  $Fc$  与变量  $Sx$  对其余弧流量进行线性表示, 记为  $L(Sx, Fc)$ , 若弧流量无法用  $Fc$  与  $Sx$  唯一表示, 则增添该弧流量为观测变量, 归入  $Sx$ ;

**step 1.4:** 网络流可表示为  $\{Sx, Fc, L(Sx, Fc)\}$ .

**step 2: 可行流观测.** 在状态空间中, 以一定步长采样, 生成该步长下的网络流, 然后利用平衡条件和容量约束求解得到可行流.

**step 3: 临界性校验.** 对每一个可行流, 判断其是否满足临界性条件, 若满足则是一个临界流.

需要指出, 在求解多源多汇网络最大流时, 也可先将多源多汇网络转换为单源单汇网络, 然后再求解<sup>[1]</sup>, 但 Megiddo<sup>[21]</sup> 指出, 在某些情况下特别是在经济应用中, 人们不仅希望将总流量最大化, 而且希望将其“公平”地分配到源点或汇点, 此时, 将多源多汇网络转换为单源单汇网络求解可能得不到最优的最大流解. 此外, Miller等<sup>[22]</sup> 指出, 在平面图中如果源点和汇点属于不同的面, 将多源多汇网络转换为单源单汇网络求解可能会破坏图的平面性. 据此, 本文求解临界流时直接对多源多汇网络求解, 不采用转换为单源单汇网络求解的方法.

2.3 临界流曲线

定义临界流曲线(critical flow curve, CF Curve)是将所有临界流流量按从小到大顺序形成向量,再以流量为纵坐标、序号为横坐标绘制出的曲线。

实际中不可能对无限个临界流进行处理,因此利用采样法生成有限个临界流,对其进行排序绘制曲线。以一定步长采样得到 $n$ 个临界流,曲线为

$$CF\ Curve = \{val(cf_b)\};$$

$$s.t. val(cf_b) \leq val(cf_{b+1}), b \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4)$$

其中: $b$ 为采样后排序的序号,即曲线横坐标; $val(cf_b)$ 是序号为 $b$ 的临界流的流量,即曲线的纵坐标。

CF Curve能够完整描述网络流的极限范围,其指标包括:

$CF_{max}$  为最大流流量,即MF或mf的流量。

$CF_{min}$  为最小流流量,即最小临界流(minimum critical flow, mcf)的流量,流量值为 $val(mcf)$ ,简记为MCF。

$\overline{CF}$ 为平均临界流流量,即临界流流量的平均值,能综合反映网络流的极限。

$CF/F$ 为临界流占比,即临界流流量范围大小与可行流流量范围大小之比,在一定程度上反映了临界流在所有可行流中所占比例。

3 算例分析

3.1 临界流计算结果

3.1.1 临界流的解析表达式

根据网络结构、容量约束和流量平衡关系推导出CASE1的临界流解析表达式如下:

$$f_3 = f_6 + f_7, f_4 + f_5 + f_6 = f_8,$$

$$f_1 = 3, f_2 = 2, f_8 = 5,$$

$$\begin{cases} 0 \leq f_6 < 1, \\ f_7 = 4, \\ 0 < f_4 \leq 3, \\ 1 < f_5 \leq 4; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} 1 \leq f_6 \leq 3, \\ f_3 = 5, \\ 0 \leq f_4 \leq 3, \\ 0 \leq f_5 \leq 4. \end{cases} \quad (5)$$

该临界流的解析式是CASE1网络完整临界流的充要条件,即CASE1的任意临界流都满足该临界流解析式,且任意满足该临界流解析式的可行流都是CASE1的临界流。

3.1.2 完整临界流的采样点

对于1.1节的CASE1网络,采用2.2节的采样法(算法2),以0.1为步长进行临界流采样,共得到816个临界流,部分临界流见表3。这816个采样得到的临界流能够完整代表所有临界流。

表3 CASE1的临界流采样点

采样点 序号	弧流量								总流量	流量下降 比例/%
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$		
1	3	2	5.0	0.0	2.0	3.0	2.0	5	12.0	14.29
22	3	2	5.0	0.0	2.1	2.9	2.1	5	12.1	13.57
44	3	2	5.0	0.0	2.2	2.8	2.2	5	12.2	12.86
67	3	2	5.0	0.2	2.1	2.7	2.3	5	12.3	12.14
91	3	2	5.0	0.1	2.3	2.6	2.4	5	12.4	11.43
116	3	2	5.0	0.0	2.5	2.5	2.5	5	12.5	10.71
142	3	2	5.0	0.0	2.6	2.4	2.6	5	12.6	10.00
169	3	2	5.0	0.0	2.7	2.3	2.7	5	12.7	9.29
197	3	2	5.0	0.2	2.6	2.2	2.8	5	12.8	8.57
226	3	2	5.0	0.1	2.8	2.1	2.9	5	12.9	7.86
256	3	2	5.0	0.0	3.0	2.0	3.0	5	13.0	7.14
287	3	2	5.0	0.0	3.1	1.9	3.1	5	13.1	6.43
318	3	2	5.0	0.0	3.2	1.8	3.2	5	13.2	5.71
349	3	2	5.0	0.2	3.1	1.7	3.3	5	13.3	5.00
380	3	2	5.0	0.1	3.3	1.6	3.4	5	13.4	4.29
411	3	2	5.0	0.0	3.5	1.5	3.5	5	13.5	3.57
442	3	2	5.0	0.0	3.6	1.4	3.6	5	13.6	2.86
472	3	2	5.0	2.8	0.8	1.4	3.6	5	13.6	2.86
473	3	2	5.0	0.0	3.7	1.3	3.7	5	13.7	2.14
504	3	2	5.0	0.2	3.6	1.2	3.8	5	13.8	1.43
535	3	2	5.0	0.1	3.8	1.1	3.9	5	13.9	0.71
566	3	2	4.1	2.3	2.6	0.1	4.0	5	14.0	0.00
580	3	2	4.0	1.0	4.0	0.0	4.0	5	14.0	0.00
802	3	2	5.0	3.0	1.0	1.0	4.0	5	14.0	0.00
816	3	2	4.9	2.7	1.4	0.9	4.0	5	14.0	0.00

表3中,流量下降比例是相对最大流的下降比例,其中临界流 $f^1$ 、 $f^{91}$ 、 $f^{256}$ 、 $f^{472}$ 、 $f^{580}$ 、 $f^{802}$ 已在图1和图2中给出。经验证,816个临界流均满足式(6),表明解析法和采样法是完全对应的,即采样法能得到代表完整临界流的有限个采样点。

3.2 运行边界计算结果

由表3临界流得到CASE1网络在最大流和临界流时各弧的流量范围,再加上弧容量形成表4。

表4 CASE1在最大流和临界流时的弧流量范围

弧	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
最大流时的弧流量范围	3	2	[4, 5]	[0, 3]	[1, 4]	[0, 1]	4	5
临界流时的弧流量范围	3	2	[4, 5]	[0, 3]	[0, 4]	[0, 3]	[2, 4]	5
按容量时的弧流量范围	[0, 3]	[0, 2]	[0, 5]	[0, 3]	[0, 4]	[0, 3]	[0, 4]	[0, 5]

将表4可视化生成图3。最大流、临界流和可行流数据如图4~图6所示。

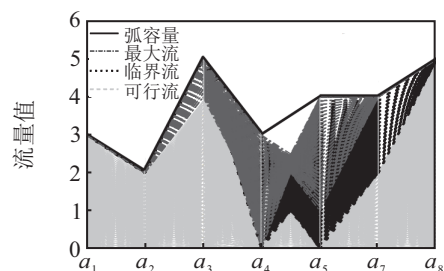


图3 CASE1的运行边界(不含耦合弧 $a_6$ )

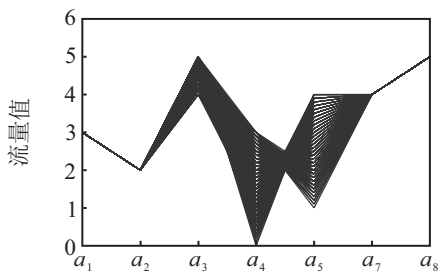


图4 最大流的可视化(不含耦合弧 $a_6$ )

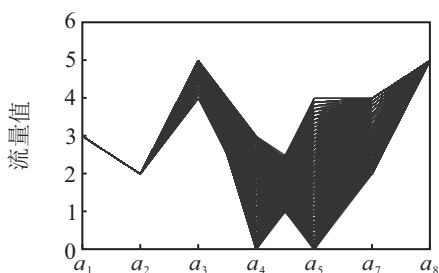


图5 临界流的可视化(不含耦合弧 $a_6$ )

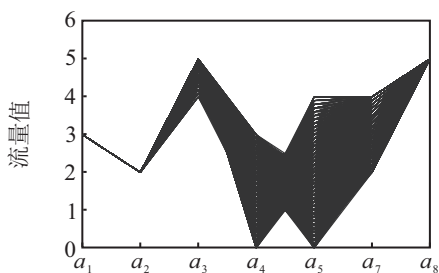


图6 可行流的可视化(不含耦合弧 $a_6$ )

图3中, 每条 $a_1$ - $a_2$ - $a_3$ - $a_4$ - $a_5$ - $a_7$ - $a_8$ 的连线对应一个可行流, 图中去掉两条路径之间的耦合弧 $a_6$ , 因为 $a_6$ 的流量取决于其他的弧流量, 以便用各弧流量反映网络整体的流量。

图3在弧流量状态空间中描绘了CASE1网络可行流、临界流、最大流和弧容量的关系, 从下向上观察图3, 网络流分为4层:

- 1) 虚线区域由非临界的可行流组成, 位于最下层, 范围从零到临界流下限。
- 2) 点区域由临界流(不包含最大流)组成, 位于倒数第2层, 每条 $a_1$ - $a_2$ - $a_3$ - $a_4$ - $a_5$ - $a_7$ - $a_8$ 的连线对应一个临界流。
- 3) 虚线点区域由最大流组成, 每条 $a_1$ - $a_2$ - $a_3$ - $a_4$ - $a_5$ - $a_7$ - $a_8$ 的连线对应一个最大流。最大流位于运行边界中的最上层, 代表网络效率最高的区域。
- 4) 黑线为弧容量, 位于最大流外, 是不考虑平衡条件的状态空间范围。

综上, 将临界流在状态空间可视化, 表明临界流是网络的运行边界, 最大流位于其最上层。

### 3.3 临界流曲线计算结果

对第3.1.2节中的816个临界流采样点按流量大小排序后绘制临界流曲线, 如图7所示。

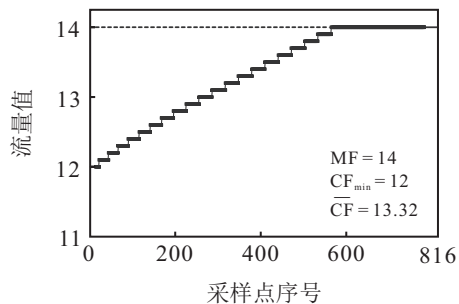


图7 CASE1的临界流曲线(步长为0.1)

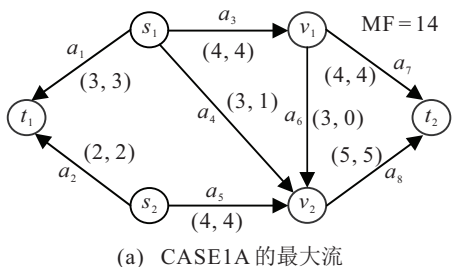
由表3和图7可见, 采样点566~816是达到最大流14时的采样点, 共有251个最大流, 约占30.76%; 采样点1~565是小于最大流的临界流采样点, 共有565个, 约占69.24%。在小于最大流部分的CF Curve, 临界流下降呈非线性。

CASE1的临界流曲线指标为: 最大流 $CF_{max}$ 为14, 最小流 $CF_{min}$ 为12, 平均临界流流量 $\overline{CF}$ 为13.32, 临界流流量范围为12~14, 临界流占比 $CF/F$ 为0.14。

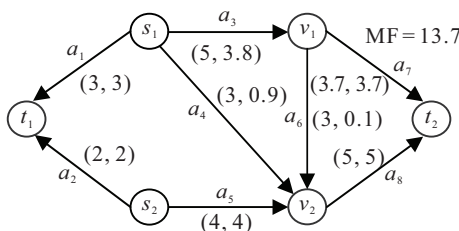
## 4 应用价值

### 4.1 应用举例1——规划方案优选

临界流曲线及其指标能够完整地反映网络流的极限, 能更综合地衡量网络在极限状态下传输流量的能力(简称传输能力), 仅用最大流衡量网络流的极限具有局限性。没有临界流曲线, 人们可能忽略存在这样的事实: 最大流较小的网络可能具有更好的综合性能。在CASE1网络的基础上加以说明, 如图8所示(CASE1A中弧 $a_3$ 的容量由5变为4, CASE1B中弧 $a_7$ 的容量由4变为3.7)。



(a) CASE1A的最大流



(b) CASE1B的最大流

图8 网络最大流

图8两个规划方案中,CASE1A最大流为14,CASE1B最大流为13.7,仅从最大流看,CASE1A比CASE1B传输能力更强,事实真的如此吗?

图9为这两个网络的临界流曲线,表5为临界流指标,采样点数据如表6和表7所示.

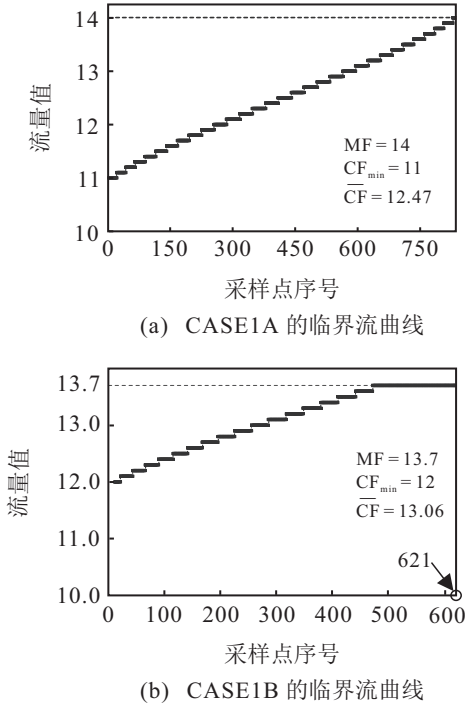


图9 临界流曲线的对比

表5 CASE1A和CASE1B的临界流指标

临界流指标	CF <sub>max</sub>	CF <sub>min</sub>	CF	CF/F
CASE1A	14.0	11	12.47	0.21
CASE1B	13.7	12	13.06	0.12

由图9和表5可知,CASE1B的最大流虽然小于CASE1A的,但其平均临界流和最小流均大于CASE1A,更多的临界流位于12以上.综合来看,CASE1B传输能力更高,应作为优选推荐方案.

可见,临界流边界的确定能更精准地判断网络的综合性能.这是因为任一网络都客观存在临界状态(即临界流),且在不同流分布下的临界状态不同.要完整描述网络的临界状态,需要计算出所有临界流.由所有临界流流量按从小到大排序绘制成的临界流曲线,能够完整刻画网络传输能力.最大流流量仅构成曲线的部分.临界流曲线指标除包含最大流流量外,还包含最小流流量和平均临界流流量,平均临界流流量能够综合反映网络流的极限.因此,对于任一网络,计算其临界流曲线及其指标后,当进行网络方案优选时,可通过对比临界流曲线、最大流流量、最小流流量和平均临界流流量,综合衡量网络在所有临界状态下的传输能力,进而优选方案.仅靠最大流单一指标,可能导致优选结果的不合理.

表6 CASE1A的临界流采样点(步长为0.1)

采样点序号	弧流量								总流量	流量下降比例/%
	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>	a <sub>7</sub>	a <sub>8</sub>		
1	3	2	4	0.0	2.0	3.0	1.0	5	11.0	21.43
22	3	2	4	0.0	2.1	2.9	1.1	5	11.1	20.71
44	3	2	4	0.0	2.2	2.8	1.2	5	11.2	20.00
67	3	2	4	0.2	2.1	2.7	1.3	5	11.3	19.29
91	3	2	4	0.1	2.3	2.6	1.4	5	11.4	18.57
116	3	2	4	0.0	2.5	2.5	1.5	5	11.5	17.86
142	3	2	4	0.0	2.6	2.4	1.6	5	11.6	17.14
169	3	2	4	0.0	2.7	2.3	1.7	5	11.7	16.43
197	3	2	4	0.2	2.6	2.2	1.8	5	11.8	15.71
226	3	2	4	0.1	2.8	2.1	1.9	5	11.9	15.00
256	3	2	4	0.0	3.0	2.0	2.0	5	12.0	14.29
287	3	2	4	0.0	3.1	1.9	2.1	5	12.1	13.57
318	3	2	4	0.0	3.2	1.8	2.2	5	12.2	12.86
349	3	2	4	0.2	3.1	1.7	2.3	5	12.3	12.14
380	3	2	4	0.1	3.3	1.6	2.4	5	12.4	11.43
411	3	2	4	0.0	3.5	1.5	2.5	5	12.5	10.71
442	3	2	4	0.0	3.6	1.4	2.6	5	12.6	10.00
473	3	2	4	0.0	3.7	1.3	2.7	5	12.7	9.29
504	3	2	4	0.2	3.6	1.2	2.8	5	12.8	8.57
535	3	2	4	0.1	3.8	1.1	2.9	5	12.9	7.86
566	3	2	4	0.0	4.0	1.0	3.0	5	13.0	7.14
597	3	2	4	0.1	4.0	0.9	3.1	5	13.1	6.43
627	3	2	4	0.2	4.0	0.8	3.2	5	13.2	5.71
656	3	2	4	0.7	3.6	0.7	3.3	5	13.3	5.00
684	3	2	4	0.6	3.8	0.6	3.4	5	13.4	4.29
711	3	2	4	0.5	4.0	0.5	3.5	5	13.5	3.57
737	3	2	4	0.6	4.0	0.4	3.6	5	13.6	2.86
762	3	2	4	0.7	4.0	0.3	3.7	5	13.7	2.14
786	3	2	4	1.2	3.6	0.2	3.8	5	13.8	1.43
809	3	2	4	1.1	3.8	0.1	3.9	5	13.9	0.71
831	3	2	4	1.0	4.0	0.0	4.0	5	14.0	0.00
837	3	2	4	3.0	2.0	0.0	4.0	5	14.0	0.00

表7 CASE1B的临界流采样点(步长为0.1)

采样点序号	弧流量								总流量	流量下降比例/%
	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>	a <sub>5</sub>	a <sub>6</sub>	a <sub>7</sub>	a <sub>8</sub>		
1	3	2	5.0	0.0	2.0	3.0	2.0	5	12.0	12.41
22	3	2	5.0	0.0	2.1	2.9	2.1	5	12.1	11.68
44	3	2	5.0	0.0	2.2	2.8	2.2	5	12.2	10.95
67	3	2	5.0	0.2	2.1	2.7	2.3	5	12.3	10.22
91	3	2	5.0	0.1	2.3	2.6	2.4	5	12.4	9.49
116	3	2	5.0	0.0	2.5	2.5	2.5	5	12.5	8.76
142	3	2	5.0	0.0	2.6	2.4	2.6	5	12.6	8.03
169	3	2	5.0	0.0	2.7	2.3	2.7	5	12.7	7.30
197	3	2	5.0	0.2	2.6	2.2	2.8	5	12.8	6.57
226	3	2	5.0	0.1	2.8	2.1	2.9	5	12.9	5.84
256	3	2	5.0	0.0	3.0	2.0	3.0	5	13.0	5.11
287	3	2	5.0	0.0	3.1	1.9	3.1	5	13.1	4.38
318	3	2	5.0	0.0	3.2	1.8	3.2	5	13.2	3.65
349	3	2	5.0	0.2	3.1	1.7	3.3	5	13.3	2.92
380	3	2	5.0	0.1	3.3	1.6	3.4	5	13.4	2.19
411	3	2	5.0	0.0	3.5	1.5	3.5	5	13.5	1.46
442	3	2	5.0	0.0	3.6	1.4	3.6	5	13.6	0.73
473	3	2	3.7	1.0	4.0	0.0	3.7	5	13.7	0.00
621	3	2	5.0	1.8	1.9	1.3	3.7	5	13.7	0.00

## 4.2 应用举例2——运行安全分析

临界流构成了网络的运行边界,对网络安全监视是非常重要的。

以CASE1为例进行说明。CASE1的一个可行流 $f^1$ 为(3, 2, 4.5, 1, 3, 1, 3.5, 5),其流量为13.5。CASE1的最大流是14,与其接近的是一个最大流。容易知道, $f^1$ 的弧 $a_3$ 流量还可以增加0.5,此时 $a_7$ 的流量变成4,从而达到最大流(3, 2, 5, 1, 3, 1, 4, 5),即可行流 $f^1$ 到运行边界的距离(允许增加流量)是0.5。

另一个可行流 $f^2$ 为(3, 2, 4.9, 2.1, 0, 2.9, 2, 5),其流量为12。若没有临界流边界,则按照现有知识,人们将认为 $f^2$ 到最大流14还有2的距离或到堵塞流13(现有堵塞流计算仅得到整数流)还有1的距离。其实这个认识是错误的,事实是:与 $f^2$ 最近的边界并不是流量为14的最大流或流量为13的堵塞流,而是流量为12.1的临界流(位于运行边界上), $f^2$ 距离它只有0.1。 $f^2$ 的弧 $a_3$ 流量增加0.1后, $a_7$ 的流量变成2.1,从而达到临界流(3, 2, 5, 2.1, 0, 2.9, 2.1, 5)。

可见,临界流边界的确定能够更精准地分析当前状态的安全性。这是因为临界流能完整描述网络在不同流分布下的临界状态,由所有临界流构成了网络的运行边界。对于任一可行流,都能计算到运行边界的最短距离及对应的边界点,利用该边界点的临界流才能精准地分析当前可行流状态的安全性。而现有研究的最大流或整数值堵塞流均没有精确求得该边界点(临界流),因此基于临界流边界的网络运行安全分析更精准。

## 5 结论

本文研究了多源多汇网络的极限范围与运行边界。通过网络分析指出,最大流具有多值性和临界性,网络还存在非最大流的临界状态,将网络的临界状态称为临界流。提出了多源多汇网络临界流、临界流曲线和运行边界的数学定义及求解方法。通过算例分析验证了方法的合理性和有效性。研究结果表明,所提出解析法能够求解网络完整的临界流,采样法能够得到代表完整临界流的有限个采样点。文中所提出运行边界可用于网络的运行安全分析,在边界内部和边界上均为可行流,边界外均为不可行流。所提出临界流曲线能够完整地描述网络流流量的极限范围,曲线具有3个基本指标:最大流流量位于曲线最高点,最小流流量位于曲线最低点,平均临界流流量反映网络的综合效率。曲线及其指标可用于网络效率评估及规划方案优选。

本研究能够帮助人们更深入完整地认识网络运行的极限范围,可为网络运行安全分析和网络效率评估及规划方案优选提供参考。在未来可进一步研究产生小于最大流的临界流的原因、临界流曲线和运行边界的几何性质、利用临界流实现网络的高效利用等。

## 参考文献(References)

- [1] Ford L R, Fulkerson D R. Flows in networks[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1962: 2, 4, 15-21.
- [2] Harris T E, Ross F S. Fundamentals of a method for evaluating rail net capacities[EB/OL]. (2004-04-07) [2020-08-19]. <https://ntlirepository.blob.core.windows.net/lib/13000/13200/13238/AD093458.pdf>.
- [3] Zhao S, Sun X, Chen J, et al. Relational granulation method based on quotient space theory for maximum flow problem[J]. Information Sciences, 2020, 507: 472-484.
- [4] Dinic E A. An algorithm for solution of a problem of maximum flow in networks with power estimation[J]. Soviet Mathematics Doklady, 1970, 11(5): 1277-1280.
- [5] Ghaffari M, Karrenbauer A, Kuhn F, et al. Near-optimal distributed maximum flow[J]. SIAM Journal on Computing, 2018, 47(6): 2078-2117.
- [6] Li H Y, Zhang T, Zhang Y K, et al. A maximum flow algorithm based on storage time aggregated graph for delay-tolerant networks[J]. Ad Hoc Networks, 2017, 59: 63-70.
- [7] Lyoo Y, Kim J E, Yoon S. Modelling information flow along the human connectome using maximum flow[J]. Medical Hypotheses, 2018, 110: 155-160.
- [8] 徐毅, 王建民, 黄向东, 等. 一种基于最大流的分布式存储系统中查询任务最优分配算法[J]. 计算机学报, 2019, 42(8): 1858-1872.  
(Xu Y, Wang J M, Huang X D, et al. An optimal query task assignment algorithm based on maximum flow for distributed storage system[J]. Chinese Journal of Computers, 2019, 42(8): 1858-1872.)
- [9] 杨秋侠, 赵瑞垠. 基于网络最大流的城市雨水管网系统脆弱性评价[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(11): 2987-2992.  
(Yang Q X, Zhao R Y. Vulnerability assessment of urban storm sewer system based on theory of network maximum flow[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2018, 38(11): 2987-2992.)
- [10] 田鹤, 赵海, 邵士亮. 基于网络流的嵌入式互联网中流量控制与优化[J]. 控制理论与应用, 2019, 36(6): 965-974.  
(Tian H, Zhao H, Shao S L. Flow control and optimization in embedded Internet based on network flow[J]. Control Theory & Applications, 2019, 36(6): 965-974.)

- [11] 黄河, 张成才, 王艳梅, 等. 基于网络流的平原城市水系功能连通性评价方法[J]. 应用基础与工程科学学报, 2020, 28(3): 607-619.  
(Huang H, Zhang C C, Wang Y M, et al. Study on the functional connectivity evaluation of plain urban water system based on network flows[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2020, 28(3): 607-619.)
- [12] Sleator D D, Enare Tarjan R. A data structure for dynamic trees[J]. Journal of Computer and System Sciences, 1983, 26(3): 362-391.
- [13] Goldberg A V, Tarjan R E. A parallel algorithm for finding a blocking flow in an acyclic network[J]. Information Processing Letters, 1989, 31(5): 265-271.
- [14] Ning X X. Research on the blocking flow in a transportation network—The general concepts and theory of the blocking flow[J]. Transaction of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 1994, 11(2): 215-223.
- [15] Kornilova L E. Optimal allocation of resources in network planning by the method of minimal flow[J]. Cybernetics, 1970, 6(6): 879-883.
- [16] Malyshko V V, Harary F. Minimal blocking flow in networks[J]. Cybernetics, 1986, 22(2): 199-204.
- [17] Tarjan R E. A simple version of Karzanov's blocking flow algorithm[J]. Operations Research Letters, 1984, 2(6): 265-268.
- [18] Zhao F Q, Xue F L, Zhang Y, et al. A discrete gravitational search algorithm for the blocking flow shop problem with total flow time minimization[J]. Applied Intelligence, 2019, 49(9): 3362-3382.
- [19] Wu W W, Ning A, Ning X X. Evaluation of the reliability of transport networks based on the stochastic flow of moving objects[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2008, 93(6): 838-844.
- [20] 吴薇薇, 宁宣熙. 基于改善紧急疏散网络流通能力的仿真研究[J]. 中国管理科学, 2006, 14(3): 86-91.  
(Wu W W, Ning X X. Simulation research on improving the flow capability of emergency networks[J]. Chinese Journal of Management Science, 2006, 14(3): 86-91.)
- [21] Megiddo N. Optimal flows in networks with multiple sources and sinks[J]. Mathematical Programming, 1974, 7(1): 97-107.
- [22] Miller G L, Naor J. Flow in planar graphs with multiple sources and sinks[J]. SIAM Journal on Computing, 1995, 24(5): 1002-1017.
- [23] Borradaile G, Klein P N, Mozes S, et al. Multiple-source multiple-sink maximum flow in directed planar graphs in near-linear time[J]. SIAM Journal on Computing, 2017, 46(4): 1280-1303.
- [24] 周炳海, 王腾. 考虑多约束的混合流水车间MOJ调度[J]. 控制与决策, 2016, 31(5): 776-782.  
(Zhou B H, Wang T. Scheduling multiple orders per job with various constraints for hybrid flow shop[J]. Control and Decision, 2016, 31(5): 776-782.)
- [25] Arya D, Shah K, Gupta A, et al. Stochastic pinch analysis to optimize resource allocation networks[J]. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2018, 57(48): 16423-16432.
- [26] Lin Y K, Nguyen T P, Yeng C L. Reliability evaluation of a multi-state air transportation network meeting multiple travel demands[J]. Annals of Operations Research, 2019, 277(1): 63-82.
- [27] 李锐, 黄敏. 多等级蓄意攻击下的第三方物流可靠性网络设计[J]. 控制与决策, 2017, 32(8): 1368-1376.  
(Li R, Huang M. Reliable network design of third-party logistics under multi-grade proactive attacks[J]. Control and Decision, 2017, 32(8): 1368-1376.)
- [28] Ahuja R K, Magnanti T L, Orlin J B. Network flows: Theory, algorithms, and applications[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1993: 231.

### 作者简介

肖峻(1971—), 男, 教授, 博士生导师, 从事网络规划与控制、配电网规划与运行等研究, E-mail: xiaojun@tju.edu.cn;

屈玉清(1988—), 男, 博士生, 从事网络规划与控制、配电网规划与运行等研究, E-mail: 01quyuqing@163.com;

宋晨辉(1993—), 男, 博士生, 从事网络规划、综合能源规划与运行等研究, E-mail: songchenhui66399@163.com;

陈飞龙(1998—), 男, 学士, 从事网络规划、配电网规划与运行等研究, E-mail: nameinwater0304@gmail.com;

孙哲(1998—), 男, 学士, 从事网络规划、配电网规划与运行等研究, E-mail: sunzhely@163.com;

吕良福(1979—), 男, 副教授, 博士, 从事网络规划、人工智能中的深度学习和机器学习等研究, E-mail: liangfulv@tju.edu.cn.

(责任编辑: 郑晓蕾)