

# 基于神经网络的周期扰动非线性系统自适应渐近跟踪控制

吴 健<sup>1,2†</sup>, 孙永波<sup>3</sup>, 赵前进<sup>3</sup>

- (1. 安庆师范大学 计算机与信息学院, 安徽 安庆 246013;
2. 安徽理工大学 计算机科学与工程学院, 安徽 淮南 232001;
3. 安徽理工大学 数学与大数据学院, 安徽 淮南 232001)

**摘要:** 针对一类具有周期扰动和输入时滞的不确定非线性系统, 提出一种基于神经网络的自适应动态面控制方案. 将径向基函数神经网络和傅里叶级数展开结合, 构造一种混合函数逼近器来逼近系统中未知的周期扰动函数. 通过引入一个积分项解决输入时滞问题, 同时采用带有非线性滤波器的动态面控制方法, 避免自适应反推控制方法中普遍存在的复杂性爆炸问题. 所提出的神经网络控制方案能够确保闭环系统中所有信号是半全局有界的, 并且系统输出能渐近地跟踪给定的参考信号. 两个仿真结果验证了所提出的控制方案是有效的.

**关键词:** 不确定非线性系统; 傅里叶级数展开; 神经网络; 动态面控制; 周期扰动; 输入时滞

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1252

**引用格式:** 吴健, 孙永波, 赵前进. 基于神经网络的周期扰动非线性系统自适应渐近跟踪控制 [J]. 控制与决策, 2022, 37(4): 922-932.

## Neural-networks-based adaptive asymptotic tracking control for nonlinear systems with periodic disturbances

WU Jian<sup>1,2†</sup>, SUN Yong-bo<sup>3</sup>, ZHAO Qian-jin<sup>3</sup>

- (1. School of Computer and Information, Anqing Normal University, Anqing 246013, China; 2. College of Computer Science and Engineering, Anhui University of Science & Technology, Huainan 232001, China; 3. College of Mathematics and Big Data, Anhui University of Science & Technology, Huainan 232001, China)

**Abstract:** A dynamic surface control scheme based on neural networks is proposed for a class of uncertain nonlinear systems with periodic disturbances and input delay. Combining the radial basis function neural network (RBFNN) with the Fourier series expansion (FSE), a mixed function approximator is constructed to approximate the unknown periodic disturbances functions in the system. An integral term is introduced to solve the problem of input delay. At the same time, the dynamic surface control method with the nonlinear filter is developed to avoid the problem of explosion of complexity commonly existed in the adaptive backstepping control method. The semiglobal boundedness of all closed-loop signals is guaranteed, and the output of the system can track a given reference signal asymptotically. Finally, two simulation results show that the proposed control scheme is effective.

**Keywords:** uncertain nonlinear systems; Fourier series expansion; neural networks; dynamic surface control; periodic disturbances; input delay

## 0 引言

近几十年来, 不确定非线性控制系统的控制问题备受关注, 并且取得了一定的成果, 其中包括自适应神经网络控制<sup>[1-6]</sup>、自适应模糊控制<sup>[7-13]</sup>. 例如, 针对一类具有严格反馈形式的不确定非线性系统, 文献 [1] 提出了一种基于神经网络的自适应动态面控制方法, 文献 [2] 给出了基于神经网络自适应增益调度的

反推滑模控制方案, 文献 [3] 设计了具有先验跟踪精度的全局稳定自适应反推神经网络控制方法. 此外, 不同于以往的控制方法, 文献 [4] 采用假设仿射非线性系统的方法, 利用神经网络解决了具有输入饱和的不确定非仿射非线性系统的跟踪控制问题. 同样地, 对于模糊逼近的方法也应用到了许多不确定非线性控制系统. 文献 [14] 采用模糊逼近的方法解决了

收稿日期: 2020-09-08; 录用日期: 2021-01-08.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61603003); 安徽省高校学科 (专业) 拔尖人才学术资助项目 (gxbjZD21).

责任编辑: 解学军.

†通讯作者. E-mail: jwu2011@126.com.

MIMO非线性不确定系统的自适应模糊输出跟踪控制问题. 随后, 该研究小组又将此方法应用到了SISO不确定非严格反馈非线性系统的自适应模糊跟踪控制<sup>[7]</sup>和带有死区不确定非线性大系统的自适应模糊分散跟踪控制设计<sup>[8]</sup>. 在文献[13]中, 作者同时运用了神经网络和模糊逼近, 针对一类不确定的非线性随机系统, 提出了自适应模糊神经网络控制方案.

众所周知, 具有已知周期扰动的不确定系统控制问题也是控制领域中一个非常具有挑战性的问题. 目前, 对于这方面研究的文献也有限. 文献[15]研究了具有未知非线性参数和已知周期时变扰动函数的自适应神经网络跟踪控制问题, 将傅立叶级数展开(FSE)和径向基函数神经网络(RBFNN)相结合, 形成一个新的函数逼近器, 对系统中未知的扰动函数进行逼近, 最终证明了跟踪误差收敛于原点附近的一个紧集中. 随后, 文献[16]指出此法可以推广应用到其他控制系统. 例如, 文献[17]中的周期性时变系统的反推控制, 文献[18]采用多层神经网络对周期性时变和非线性参数化系统进行自适应跟踪, 文献[19]将文献[16]推广到了自适应模糊控制. 文献[20]研究了一类具有周期性扰动的不确定非线性系统的自适应鲁棒控制问题. 与文献[15-17]不同, 文献[21]将傅里叶展开与模糊逻辑系统(FLS)相结合, 设计了新的基于FSE-FLS逼近器, 研究了具有不确定周期扰动控制增益函数的非线性系统, 最终实现了闭环系统的半全局有界.

另一方面, 工业控制系统中普遍存在的时滞现象经常影响控制系统的稳定性, 甚至会导致系统崩溃. 因此, 对带有时滞的不确定非线性控制系统的研究也具有非常重要的意义<sup>[22-31]</sup>. 例如, 针对一类时滞未知的严格反馈系统, 文献[23]研究了自适应神经控制问题, 并将此方法推广到文献[24]中一类单输入单输出严格反馈非线性随机系统. 对于一类具有输入时滞的严格反馈系统, 文献[25]提出了一种自适应神经网络跟踪控制方法. 文献[29]研究了具有输入时滞的严格反馈系统的自适应模糊反推跟踪控制问题.

根据以上讨论可知, 目前还没有文献研究具有周期扰动和输入时滞的非线性不确定系统的自适应渐近跟踪控制问题. 本文主要的工作如下:

1) 研究一类具有周期扰动和输入时滞的不确定非线性系统的渐近跟踪控制问题, 提出一种新的基于混合逼近器的自适应控制方案;

2) 通过构造带有非线性滤波器的动态面方法, 避免传统反推设计中出现的复杂性爆炸问题, 同时实现

闭环系统渐近稳定性, 提高控制系统的控制性能.

仿真结果表明本文方法是有效的.

## 1 问题描述及预备知识

### 1.1 系统描述

考虑以下具有周期扰动的非严格反馈系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(x, \omega_i(t)), & i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n = u(t-\tau) + f_n(x, \omega_n(t)); \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  是系统状态变量;  $y \in R$  是系统的输出;  $u$  是系统控制输入;  $\tau$  是延迟时间;  $\omega_i(t)$  是已知周期为  $T_i$  的未知连续时变扰动, 即有  $\omega_i(t+T_i) = \omega_i(t)$ ,  $\omega_i(t) : [0, +\infty) \rightarrow R^{q_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ );  $f_i(\cdot) : R^{n+q_i} \rightarrow R$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 是未知的连续函数.

控制目标: 设计一种新的自适应动态面控制方案, 使系统(1)的输出信号能够渐近地跟踪给定的参考信号  $y_d(t)$ , 并且所有的闭环信号都是半全局有界的.

**注1** 与其他具有周期扰动的控制系统相比较(如文献[15]和文献[21]), 本文的主要区别在于: 1) 研究了具有输入时滞的非严格反馈系统控制问题; 2) 构造了基于FSE-RBFNN的混合逼近器, 通过设计非线性滤波器, 提出一种新的自适应动态面控制策略, 在确保闭环系统的所有信号半全局有界稳定的同时, 实现渐近跟踪控制性能.

为了实现上述控制目标, 对系统(1)做如下假设:

**假设1** 参考轨迹  $y_d(t)$  是有界的, 并且其关于时间的导数  $\dot{y}_d$  和  $\ddot{y}_d$  也是有界的.

**注2** 假设1是自适应动态面控制方案所需的通用假设条件, 普遍存在于已有的文献中, 如文献[13, 15, 21, 32].

### 1.2 基于FSE-RBFNN逼近器

本文设计的主要障碍是周期扰动  $\omega_i(t)$  不能作为径向基函数神经网络的输入. 考虑到  $\omega_i(t)$  具有的周期性质, 首先使用傅里叶级数展开估计  $\omega_i(t)$ , 然后利用被测系统信号  $E_i$  和  $\omega_i$  的估计值作为径向基函数神经网络的输入, 去逼近一些合适的未知函数  $g_i(E_i, \omega_i(t))$ .

为了确保一般性, 假设  $g(E, \omega(t))$  是一个未知函数,  $E \in \Omega_E \subset R^l$  是一个被测信号,  $\omega(t)$  是已知周期为  $T$  的未知连续扰动向量, 并且  $\omega(t) = [v_1(t), \dots, v_q(t)]^T \in \Omega_\omega \subset R^q$ , 其中  $\Omega_E$  和  $\Omega_\omega$  是紧集. 正如文献[26]中所述,  $w(t)$  可以用线性参数化傅立叶级数展

开,表示如下:

$$\omega(t) = \Upsilon^T \varphi(t) + \delta_\omega(t), \|\delta_\omega(t)\| \leq \varepsilon_\omega. \quad (2)$$

其中:  $\Upsilon = [\gamma_1, \dots, \gamma_q] \in \mathbf{R}^{s \times q}$ , 是一个常数矩阵,  $\gamma_i \in \mathbf{R}^s$  是一个由  $v_i(t)$  的傅里叶级数展开的由  $s$  个系数组成的向量 ( $s$  是一个奇数);  $\delta_\omega(t)$  是上界  $\varepsilon_\omega$  最小的截断误差, 可以通过增加  $s$  使得其任意小;  $\varphi(t) = [\psi_1(t), \dots, \psi_s(t)]^T$ ,  $\psi_1(t) = 1, \psi_{2j}(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi jt/T), \psi_{2j+1}(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi jt/T), j = 1, 2, \dots, (s-1)/2$ , 其  $n$  阶导数是连续有界的.

另一方面, 如果  $\omega(t)$  可以测量, 则未知的连续函数  $g(E, \omega(t))$  在紧集  $\Omega = \Omega_E \times \Omega_\omega$  上可以用径向基函数神经网络逼近, 即

$$g(E, \omega(t)) = W^T S(E, \omega(t)) + \delta_b(E, \omega(t)), \quad |\delta_b(E, \omega(t))| \leq \varepsilon_b. \quad (3)$$

其中:  $S(E, \omega(t)) = [s_1(E, \omega(t)), \dots, s_h(E, \omega(t))]$  是已知的光滑向量值函数, 其分量  $s_i(E, \omega(t)) = \exp[-\|\zeta - \nu_i\|^2/\zeta^2]$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ), 其中  $\zeta = [E^T, \omega^T(t)]^T$ ;  $\nu_i \in \Omega$  和  $\zeta > 0$  均是常数, 分别表示  $S(E, \omega(t))$  的中心和宽度. 最优权向量  $W := \arg \min_{\hat{W} \in \{\mathbf{R}\}^h} \{ \sup_{E, \omega(t) \in \Omega} |g(E, \omega(t)) - \hat{W}^T S(E, \omega(t))| \}$ , 这里  $W = [\omega_1, \dots, \omega_h]^T$ . 神经网络逼近误差  $\delta_b(E, \omega(t))$  的最小上界  $\varepsilon_b > 0$ , 可以通过增加神经网络节点  $h$  的数量来减小.

由于  $\omega(t)$  是未知的, 将式(2)中的  $\omega(t)$  代入式(3), 则有

$$g(E, \omega(t)) = W^T S(E, \Upsilon^T \varphi(t) + \varepsilon_\omega) + \varepsilon_b. \quad (4)$$

根据式(4), 设计一种混合的基于傅立叶级数展开的径向基函数神经网络逼近器

$$H(E, t) = W^T S(E, \Upsilon^T \varphi(t)), \quad (5)$$

对未知函数进行逼近, 有

$$g(E, \omega(t)) = W^T S(E, \Upsilon^T \varphi(t)) + \delta(E, t). \quad (6)$$

其中

$$\delta(E, t) = \varepsilon_b + W^T S(E, \Upsilon^T \varphi(t) + \varepsilon_\omega) - W^T S(E, \Upsilon^T \varphi(t)). \quad (7)$$

**引理1**<sup>[15]</sup> 对于  $(E, \omega(t)) \in \Omega$ , 式(7)中的逼近误差  $\delta(E, t)$  满足  $|\delta(E, t)| \leq \varepsilon$ , 其中  $\varepsilon$  表示  $\delta(E, t)$  的最小上界, 可以通过增加  $s$  和  $h$  的值任意减小.

**引理2**<sup>[15]</sup> 对于逼近器(5), 估计误差可以表示为

$$W^T S(E, \Upsilon^T \varphi(t)) - \hat{W}^T S(E, \hat{\Upsilon}^T \varphi(t)) = \tilde{W}^T (\hat{S} - \hat{S}' \Upsilon^T \varphi(t)) + \hat{W}^T \hat{S}' \hat{\Upsilon}^T \varphi(t) + b. \quad (8)$$

其中:  $\hat{S} = S(E, \hat{\Upsilon}^T \varphi(t))$ ,  $\hat{S}' = [\hat{s}'_1, \dots, \hat{s}'_h] \in \mathbf{R}^{q \times h}$ ,  $\hat{s}'_i = (\partial s_i(E, \omega)) / \partial \omega|_{\omega = \hat{\Upsilon}^T \varphi(t)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, h$ ; 余项  $b$

是有界的, 即

$$b \leq \|\Upsilon\|_F \|\varphi(t)\| \hat{W}^T \hat{S}' + \|W\| \|\hat{S}' \hat{\Upsilon}^T \varphi(t)\| + |W|_1. \quad (9)$$

$\hat{W}$  和  $\hat{\Upsilon}$  分别是  $W$  和  $\Upsilon$  的估计, 估计误差  $\tilde{W} = W - \hat{W}$ ,  $\tilde{\Upsilon} = \Upsilon - \hat{\Upsilon}$ .

**注3** 文献[15]的附录给出了引理2的证明, 并且  $|W|_1 = \sum_{i=1}^h |\omega_i| \geq W^T (S(E, \Upsilon^T \varphi(t)) - \hat{S})$ .

**引理3**<sup>[33]</sup> 对于任意  $\zeta > 0$  和  $\lambda \in \mathbf{R}$ , 不等式  $0 \leq |\lambda| - \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 + \zeta^2}} < \zeta$  成立.

**引理4**<sup>[34]</sup> 假设  $a$  是一个未知的非零变量,  $V(t_0, t)$  和  $\mathfrak{N}(t)$  是定义在时间区间  $[t_0, t_f)$  的光滑函数, 并且  $V(t_0, t)$  是非负的,  $\mathfrak{N}(t_0)$  是有界的. 此外,  $\mathcal{N}(\mathfrak{N}(t)) = e^{\mathfrak{N}^2(t)} \mathfrak{N}(t)$  是动态的闭环增益函数,  $\xi$  是正常数,  $\bar{\xi}$  是一个有界变量. 如果不等式

$$V(t_0, t) \leq e^{-\xi t} \int_{t_0}^t a \mathcal{N}(\mathfrak{N}(c)) \dot{\mathfrak{N}}(c) e^{\xi c} dc + e^{-\xi t} \int_{t_0}^t \dot{\mathfrak{N}}(c) e^{\xi c} dc + \bar{\xi}$$

成立, 则可以得出  $\mathfrak{N}(t), V(t_0, t), e^{-\xi t} \int_{t_0}^t \dot{\mathfrak{N}}(c) e^{\xi c} dc$  和  $e^{-\xi t} \int_{t_0}^t a \mathcal{N}(\mathfrak{N}(c)) \dot{\mathfrak{N}}(c) e^{\xi c} dc$  在区间  $[t_0, t_f)$  上一定是有界的, 且  $t_f = \infty$  时, 闭环系统的解是有界的.

**引理5**<sup>[34]</sup> 如果等式  $\dot{\hat{s}}(t) = -a\hat{s}(t) + g\bar{c}(t)$  成立, 其中  $a > 0$  和  $b > 0$  是设计的常数,  $\bar{c}(t)$  是正函数, 则可以得出结论: 如果  $\hat{s}(0)$  的初始值设定为非负的, 则对于任意的  $t > 0$ , 一定有  $\hat{s}(t) \geq 0$  成立.

## 2 主要结果

本文的主要结论可归纳为以下定理:

**定理1** 考虑闭环系统(1), 包括非线性滤波器、实际控制器和自适应律. 根据假设1, 对于任何初始条件满足  $V(0) \leq c$ , 这里  $c$  为设计的正常数, 存在设计参数  $k_i, \eta_i (i = 1, 2, \dots, n), \xi_j (j = 1, 2, \dots, n-1)$  和可逆矩阵  $\Gamma_{W_i}, \Gamma_{Y_i}$ , 使得以下结论成立:

- 1) 所有的闭环信号都是半全局有界的;
- 2) 跟踪误差渐近收敛于零.

定理1的证明包括自适应控制器设计和闭环系统稳定性分析两部分.

### 2.1 自适应神经网络控制器设计

在本节, 提出一种基于反推技术的自适应神经网络动态表面控制方案. 首先, 介绍自适应控制器的设计过程. 为了避免“复杂性爆炸”问题, 构造如下非线性滤波器:

$$\iota_i \dot{s}_i = -\iota_i e_i - \frac{\iota_i \hat{M}_i^2 e_i}{\sqrt{\hat{M}_i^2 e_i^2 + \rho^2}}, \quad (10)$$

$$s_i(0) = \alpha_i(0), i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

其中:  $e_i = s_i - \alpha_i$  是第  $i$  个边界层误差,  $\iota_i$  是一个正常数,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

**注4** 不同于文献[13, 15, 21]所提出的动态面控制策略, 本文采用具有非线性滤波器的动态面技术, 避免了传统反推技术的复杂爆炸性问题, 同时实现了闭环系统的渐近跟踪.

首先, 坐标变换如下:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - y_d; \\ z_i = x_i - s_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n; \\ z_n = x_n - s_{i-1} + \int_{t-\tau}^t u(\bar{a})d\bar{a}. \end{cases} \quad (11)$$

step 1: 根据式(11), 可以进一步得到

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_d = x_2 + f_1(x, \omega_1(t)) - \dot{y}_d. \quad (12)$$

构造 Lyapunov 函数  $V_1$  如下:

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2\eta_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{W}_1^T\Gamma_{W_1}^{-1}\tilde{W}_1 + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{Y}_1^T\Gamma_{Y_1}^{-1}\tilde{Y}_1\}. \quad (13)$$

其中:  $\eta_1$  是设计的参数;  $\Gamma_{W_1} > 0$  和  $\Gamma_{Y_1} > 0$  是设计的可逆矩阵;  $\tilde{W}_1$  和  $\tilde{Y}_1$  的定义类似于式(9)中的  $\tilde{W}$  和  $\tilde{Y}$ ;  $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_1$  和  $\tilde{\theta}_1$  分别是  $\theta_1$  的估计和估计误差,  $\theta_1$  定义为

$$\theta_1 = \sqrt{\|\Upsilon_1\|_F^2 + \|W_1\|^2 + (|W_1|_1 + |\varepsilon_1|)^2}.$$

因此, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & z_1(x_2 + f_1(x, \omega_1(t)) - \dot{y}_d) - \frac{1}{\eta_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 - \\ & \tilde{W}_1^T\Gamma_{W_1}^{-1}\dot{\tilde{W}}_1 - \text{tr}\{\tilde{Y}_1^T\Gamma_{Y_1}^{-1}\dot{\tilde{Y}}_1\}. \end{aligned} \quad (14)$$

根据引理3, 有

$$z_1[f_1(x, \omega_1(t)) - \dot{y}_d] \leq \frac{z_1^2[f_1(x, \omega_1(t)) - \dot{y}_d]^2}{\sqrt{z_1^2[f_1(x, \omega_1(t)) - \dot{y}_d]^2 + \varrho^2}} + \varrho. \quad (15)$$

令

$$g_1(E_1, \omega_1(t)) = \frac{[f_1(x, \omega_1(t)) - \dot{y}_d]^2}{\sqrt{z_1^2[f_1(x, \omega_1(t)) - \dot{y}_d]^2 + \varrho^2}},$$

根据式(6)和引理1有

$$\begin{aligned} g_1(E_1, \omega_1(t)) = & W_1^T S_1(E_1, \Upsilon_1^T \varphi_1(t)) + \delta_1(E_1, \omega_1(t)), \\ |\delta_1(E_1, \omega_1(t))| \leq & \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (16)$$

其中:  $E_1 = [x_1, \dots, x_n, \dot{y}_d]$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  为逼近误差的上界.

将式(15)和(16)代入(14)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & z_1(z_2 + e_1 + \alpha_1 + W_1^T S_1(E_1, \Upsilon_1^T \varphi_1(t))z_1 + \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 z_1) - \frac{1}{\eta_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 - \tilde{W}_1^T\Gamma_{W_1}^{-1}\dot{\tilde{W}}_1 - \text{tr}\{\tilde{Y}_1^T\Gamma_{Y_1}^{-1}\dot{\tilde{Y}}_1\} + \varrho. \quad (17)$$

应用 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} z_1 e_1 & \leq \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}e_1^2, \\ z_1 z_2 & \leq \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2. \end{aligned} \quad (18)$$

虚拟控制器  $\alpha_1$  设计如下:

$$\alpha_1 = \mathcal{N}(\varpi_1)\bar{\alpha}_1. \quad (19)$$

其中:  $\mathcal{N}(\varpi_1)$  是定义在引理4中的动态增益函数;  $\varpi_1$  的自适应律设计为  $\dot{\varpi}_1 = -\mathcal{C}_1 z_1 \bar{\alpha}_1$ ;  $\bar{\alpha}_1$  是虚拟控制器  $\alpha_1$  的等效单元, 有

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 = & -(k_1 + 1)z_1 - \hat{W}_1^T S_1(E_1, \hat{Y}_1^T \varphi_1(t))z_1 - \\ & \hat{\theta}_1 \frac{z_1^3 \vartheta_1^2}{\sqrt{z_1^4 \vartheta_1^2 + \varrho^2}}, \end{aligned} \quad (20)$$

$\vartheta_1$  定义为

$$\vartheta_1 = \sqrt{\|\varphi_1(t)\hat{W}_1^T \hat{S}'_1\|_F^2 + \|\hat{S}'_1 \hat{Y}_1^T \varphi_1(t)\|^2 + 1},$$

$k_1$  和  $\varrho$  是正的设计参数.

将式(18)~(20)代入(17), 下面不等式成立:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & z_1 \left( -k_1 z_1 + W_1^T S_1(E_1, \Upsilon_1^T \varphi_1(t))z_1 + \varepsilon_1 z_1 - \right. \\ & \left. \hat{W}_1^T S_1(E_1, \hat{Y}_1^T \varphi_1(t))z_1 - \hat{\theta}_1 \frac{z_1^3 \vartheta_1^2}{\sqrt{z_1^4 \vartheta_1^2 + \varrho^2}} \right) - \\ & \frac{1}{\eta_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 - \tilde{W}_1^T\Gamma_{W_1}^{-1}\dot{\tilde{W}}_1 - \text{tr}\{\tilde{Y}_1^T\Gamma_{Y_1}^{-1}\dot{\tilde{Y}}_1\} + \varrho + \\ & \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + z_1\mathcal{N}(\varpi_1)\bar{\alpha}_1 - z_1\bar{\alpha}_1. \end{aligned} \quad (21)$$

根据引理2, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & z_1 \left( -k_1 z_1 + \tilde{W}_1^T (\hat{S} - \hat{S}'_1 \hat{Y}_1^T \varphi_1(t))z_1 + b z_1 + \right. \\ & \left. \varepsilon_1 z_1 + \hat{W}_1^T \hat{S}'_1 \hat{Y}_1^T \varphi_1(t)z_1 - \hat{\theta}_1 \frac{z_1^3 \vartheta_1^2}{\sqrt{z_1^4 \vartheta_1^2 + \varrho^2}} \right) - \\ & \frac{1}{\eta_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1 - \tilde{W}_1^T\Gamma_{W_1}^{-1}\dot{\tilde{W}}_1 - \text{tr}\{\tilde{Y}_1^T\Gamma_{Y_1}^{-1}\dot{\tilde{Y}}_1\} + \varrho + \\ & \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + z_1\mathcal{N}(\varpi_1)\bar{\alpha}_1 - z_1\bar{\alpha}_1. \end{aligned} \quad (22)$$

然后, 利用引理2和引理3可知

$$\begin{aligned} (b_1 + \varepsilon_1)z_1^2 \leq & \left[ \|\Upsilon_1\|_F \|\varphi_1(t)\hat{W}_1^T \hat{S}'_1\|_F + |W_1|_1 + \right. \\ & \left. \|W_1\| \|\hat{S}'_1 \hat{Y}_1^T \varphi_1(t)\| + |\varepsilon_1| \right] z_1^2 \leq \theta_1 |z_1^3 \vartheta_1| \leq \\ & \theta_1 \frac{z_1^4 \vartheta_1^2}{\sqrt{z_1^4 \vartheta_1^2 + \varrho^2}} + \theta_1 \varrho. \end{aligned} \quad (23)$$

结合式(22)和(23), 下列不等式成立:

$$\dot{V}_1 \leq$$

$$z_1 \left( -k_1 z_1 + \tilde{W}_1^T (\hat{S}_1 - \hat{S}'_1 \hat{\Upsilon}_1^T \varphi_1(t)) z_1 + \hat{W}_1^T \hat{S}'_1 \hat{\Upsilon}_1^T \varphi_1(t) z_1 - \tilde{\theta}_1 \frac{z_1^3 \vartheta_1^2}{\sqrt{z_1^4 \vartheta_1^2 + \varrho^2}} \right) + (\theta_1 + 1) \varrho - \frac{1}{\eta_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 - \tilde{W}_1^T \Gamma_{W_1}^{-1} \dot{\tilde{W}}_1 - \text{tr}\{\tilde{\Upsilon}_1^T \Gamma_{\Upsilon_1}^{-1} \dot{\tilde{\Upsilon}}_1\} + \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + z_1 \mathcal{N}(\varpi_1) \bar{\alpha}_1 - z_1 \bar{\alpha}_1. \quad (24)$$

其中

$$\hat{W}_1^T \hat{S}'_1 \hat{\Upsilon}_1^T \varphi_1(t) = \text{tr}\{\tilde{\Upsilon}_1^T \varphi_1(t) \hat{W}_1^T \hat{S}'_1\}.$$

构造自适应律如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = \eta_1 \frac{z_1^4 \vartheta_1^2}{\sqrt{z_1^4 \vartheta_1^2 + \varrho^2}} - \bar{\eta}_1 \hat{\theta}_1, \\ \dot{\tilde{W}}_1 = \Gamma_{W_1} [(\hat{S}_1 - \hat{S}'_1 \hat{\Upsilon}_1^T \varphi_1(t)) z_1^2 - \bar{\sigma}_1 \tilde{W}_1], \\ \dot{\tilde{\Upsilon}}_1 = \Gamma_{\Upsilon_1} [\varphi_1(t) \hat{W}_1^T \hat{S}'_1 z_1^2 - \bar{\mu}_1 \tilde{\Upsilon}_1], \\ \dot{\varpi}_1 = -\mathcal{C}_1 z_1 \bar{\alpha}_1. \end{cases} \quad (25)$$

其中  $\bar{\eta}_1, \bar{\sigma}_1, \bar{\mu}_1, \mathcal{C}_1$  是正的设计参数.

应用 Young 不等式, 则下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1 \hat{\theta}_1 &\leq -\frac{1}{2} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\ \tilde{W}_1 \hat{W}_1 &\leq -\frac{1}{2} \|\tilde{W}_1\|^2 + \frac{1}{2} \|W_1\|^2, \\ \text{tr}\{\tilde{\Upsilon}_1 \hat{\Upsilon}_1\} &\leq -\frac{1}{2} \|\tilde{\Upsilon}_1\|_F^2 + \frac{1}{2} \|\Upsilon_1\|_F^2. \end{aligned} \quad (26)$$

根据式(24)~(26)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -k_1 z_1^2 - \frac{\bar{\eta}_1}{2\eta_1} \tilde{\theta}_1^2 - \frac{\bar{\sigma}_1}{2} \|\tilde{W}_1\|^2 - \frac{\bar{\mu}_1}{2} \|\tilde{\Upsilon}_1\|_F^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} e_1^2 + \mathcal{X}_1 - \frac{1}{\mathcal{C}_1} \mathcal{N}(\varpi_1) \dot{\varpi}_1 + \frac{1}{\mathcal{C}_1} \dot{\varpi}_1. \end{aligned} \quad (27)$$

其中

$$\mathcal{X}_1 = \frac{\bar{\eta}_1}{2\eta_1} \theta_1^2 + (\theta_1 + 1) \varrho + \frac{\bar{\sigma}_1}{2} \|W_1\|^2 + \frac{\bar{\mu}_1}{2} \|\Upsilon_1\|_F^2.$$

step  $i$ : 类似于式(12),  $z_i$  的导数为

$$\dot{z}_i = \dot{x}_i - \dot{s}_{i-1} = x_{i+1} + f_i(x, \omega_i(t)) - \dot{s}_{i-1}. \quad (28)$$

构造 Lyapunov 函数  $V_i$  如下:

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2\eta_i} \tilde{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{W}_i^T \Gamma_{W_i}^{-1} \tilde{W}_i + \frac{1}{2} \text{tr}\{\tilde{\Upsilon}_i^T \Gamma_{\Upsilon_i}^{-1} \tilde{\Upsilon}_i\}. \quad (29)$$

其中:  $\eta_i$  是设计参数;  $\Gamma_{W_i} > 0$  和  $\Gamma_{\Upsilon_i} > 0$  是设计的可逆矩阵;  $\tilde{W}_i$  和  $\tilde{\Upsilon}_i$  的定义类似于式(13)中的  $\tilde{W}_1$  和  $\tilde{\Upsilon}_1$ ;  $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \hat{\theta}_i$ ,  $\hat{\theta}_i$  和  $\tilde{\theta}_i$  分别是  $\theta_i$  的估计和估计误差,  $\theta_i$  定义为

$$\theta_i = \sqrt{\|\Upsilon_i\|_F^2 + \|W_i\|^2 + (\|W_i\|_1 + |\varepsilon_i|)^2}.$$

然后, 类似于式(14), 有

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + z_i(x_{i+1} + f_i(x, \omega_i(t)) - \dot{s}_{i-1}) -$$

$$\frac{1}{\eta_i} \tilde{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i - \tilde{W}_i^T \Gamma_{W_i}^{-1} \dot{\tilde{W}}_i - \text{tr}\{\tilde{\Upsilon}_i^T \Gamma_{\Upsilon_i}^{-1} \dot{\tilde{\Upsilon}}_i\}. \quad (30)$$

根据引理3, 下列不等式成立:

$$z_i [f_i(x, \omega_i(t)) - \dot{s}_{i-1}] \leq \frac{z_i^2 [f_i(x, \omega_i(t)) - \dot{s}_{i-1}]^2}{\sqrt{z_i^2 [f_i(x, \omega_i(t)) - \dot{s}_{i-1}]^2 + \varrho^2}} + \varrho. \quad (31)$$

令

$$g_i(E_i, \omega_i(t)) = \frac{[f_i(x, \omega_i(t)) - \dot{s}_{i-1}]^2}{\sqrt{z_i^2 [f_i(x, \omega_i(t)) - \dot{s}_{i-1}]^2 + \varrho^2}},$$

根据式(6)和引理1可知

$$\begin{aligned} g_i(E_i, \omega_i(t)) &= W_i^T S_i(E_i, \Upsilon_i^T \varphi_i(t)) + \delta_i(E_i, \omega_i(t)), \\ |\delta_i(E_i, \omega_i(t))| &\leq \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (32)$$

其中:  $E_i = [x_1, \dots, x_n, \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_{i-1}]$ ,  $\varepsilon_i > 0$  是逼近误差上界. 将式(31)和(32)代入(30)得到结果

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} + z_i(e_i + \alpha_i + z_{i+1} + W_i^T S_i(E_i, \Upsilon_i^T \varphi_i(t)) z_i + \varepsilon_i z_i) - \frac{1}{\eta_i} \tilde{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i - \tilde{W}_i^T \Gamma_{W_i}^{-1} \dot{\tilde{W}}_i - \text{tr}\{\tilde{\Upsilon}_i^T \Gamma_{\Upsilon_i}^{-1} \dot{\tilde{\Upsilon}}_i\} + \varrho. \end{aligned} \quad (33)$$

应用 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} z_i e_i &\leq \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} e_i^2, \\ z_i z_{i+1} &\leq \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} z_{i+1}^2. \end{aligned} \quad (34)$$

虚拟控制器  $\alpha_i$  设计如下:

$$\alpha_i = \mathcal{N}(\varpi_i) \bar{\alpha}_i. \quad (35)$$

其中:  $\mathcal{N}(\varpi_i)$  是定义在引理4中的动态增益函数;  $\varpi_i$  的自适应律设计为  $\dot{\varpi}_i = -\mathcal{C}_i z_i \bar{\alpha}_i$ ;  $\bar{\alpha}_i$  是虚拟控制器  $\alpha_i$  的等效单元, 有

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i &= -\left(k_i + \frac{3}{2}\right) z_i - \hat{W}_i^T S_i(E_i, \hat{\Upsilon}_i^T \varphi_i(t)) z_i - \hat{\theta}_i \frac{z_i^3 \vartheta_i^2}{\sqrt{z_i^4 \vartheta_i^2 + \varrho^2}}, \end{aligned} \quad (36)$$

$\vartheta_i$  定义为

$$\vartheta_i = \sqrt{\|\varphi_i(t) \hat{W}_i^T \hat{S}'_i\|_F^2 + \|\hat{S}'_i \hat{\Upsilon}_i^T \varphi_i(t)\|^2 + 1},$$

$k_i$  是正的设计参数.

将式(34)~(36)代入(33), 得到以下不等式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{V}_{i-1} + z_i \left( -\left(k_i + \frac{1}{2}\right) z_i + \varepsilon_i z_i - \hat{\theta}_i \frac{z_i^3 \vartheta_i^2}{\sqrt{z_i^4 \vartheta_i^2 + \varrho^2}} + W_i^T S_i(E_i, \Upsilon_i^T \varphi_i(t)) z_i - \hat{W}_i^T S_i(E_i, \hat{\Upsilon}_i^T \varphi_i(t)) z_i \right) - \frac{1}{\eta_i} \tilde{\theta}_i \dot{\hat{\theta}}_i - \tilde{W}_i^T \Gamma_{W_i}^{-1} \dot{\tilde{W}}_i - \text{tr}\{\tilde{\Upsilon}_i^T \Gamma_{\Upsilon_i}^{-1} \dot{\tilde{\Upsilon}}_i\} + \varrho \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}e_i^2 + \frac{1}{2}z_{i+1}^2 + z_i\mathcal{N}(\varpi_i)\bar{\alpha}_i - z_i\bar{\alpha}_i. \quad (37)$$

根据引理2, 下面的等式成立:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & \dot{V}_{i-1} + z_i \left( - \left( k_i + \frac{1}{2} \right) z_i - \hat{\theta}_i \frac{z_i^3 \vartheta_i^2}{\sqrt{z_i^4 \vartheta_i^2 + \varrho^2}} + b_i z_i + \right. \\ & \tilde{W}_i^T (\hat{S}_i - \hat{S}'_i \hat{Y}_i^T \varphi_i(t)) z_i + \hat{W}_i^T \hat{S}'_i \tilde{Y}_i^T \varphi_i(t) z_i + \\ & \left. \varepsilon_i z_i \right) - \frac{1}{\eta_i} \tilde{\theta}_i \dot{\theta}_i - \tilde{W}_i^T \Gamma_{W_i}^{-1} \dot{W}_i - \text{tr} \{ \tilde{Y}_i^T \Gamma_{Y_i}^{-1} \dot{Y}_i \} + \\ & \varrho + \frac{1}{2} e_i^2 + \frac{1}{2} z_{i+1}^2 + z_i \mathcal{N}(\varpi_i) \bar{\alpha}_i - z_i \bar{\alpha}_i. \end{aligned} \quad (38)$$

再利用引理2和引理3可知

$$\begin{aligned} (b_i + \varepsilon_i) z_i^2 \leq & [ \| \mathcal{Y}_i \|_F \| \varphi_i(t) \hat{W}_i^T \hat{S}'_i \|_F + |W_i|_1 + \\ & \| W_i \| \| \hat{S}'_i \hat{Y}_i^T \varphi_i(t) \| + | \varepsilon_i | ] z_i^2 \leq \theta_i | z_i^2 \vartheta_i | \leq \\ & \theta_i \frac{z_i^4 \vartheta_i^2}{\sqrt{z_i^4 \vartheta_i^2 + \varrho^2}} + \theta_i \varrho. \end{aligned} \quad (39)$$

将式(39)代入(38), 以下不等式成立:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & \dot{V}_{i-1} + z_i \left( - \left( k_i + \frac{1}{2} \right) z_i - \tilde{\theta}_i \frac{z_i^3 \vartheta_i^2}{\sqrt{z_i^4 \vartheta_i^2 + \varrho^2}} + \right. \\ & \tilde{W}_i^T (\hat{S}_i - \hat{S}'_i \hat{Y}_i^T \varphi_i(t)) z_i + \hat{W}_i^T \hat{S}'_i \tilde{Y}_i^T \varphi_i(t) z_i + \\ & \left. (\theta_i + 1) \varrho - \frac{1}{\eta_i} \tilde{\theta}_i \dot{\theta}_i - \tilde{W}_i^T \Gamma_{W_i}^{-1} \dot{W}_i + \frac{1}{2} e_i^2 + \frac{1}{2} z_{i+1}^2 - \right. \\ & \left. \text{tr} \{ \tilde{Y}_i^T \Gamma_{Y_i}^{-1} \dot{Y}_i \} + z_i \mathcal{N}(\varpi_i) \bar{\alpha}_i - z_i \bar{\alpha}_i. \right. \end{aligned} \quad (40)$$

其中

$$\hat{W}_i^T \hat{S}'_i \tilde{Y}_i^T \varphi_i(t) = \text{tr} \{ \tilde{Y}_i^T \varphi_i(t) \hat{W}_i^T \hat{S}'_i \}.$$

构造自适应律如下:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \eta_i \frac{z_i^4 \vartheta_i^2}{\sqrt{z_i^4 \vartheta_i^2 + \varrho^2}} - \bar{\eta}_i \hat{\theta}_i, \\ \dot{W}_i = \Gamma_{W_i} [ (\hat{S}_i - \hat{S}'_i \hat{Y}_i^T \varphi_i(t)) z_i^2 - \bar{\sigma}_i \hat{W}_i ], \\ \dot{Y}_i = \Gamma_{Y_i} [ \varphi_i(t) \hat{W}_i^T \hat{S}'_i z_i^2 - \bar{\mu}_i \hat{Y}_i ], \\ \dot{\varpi}_i = -C_i z_i \bar{\alpha}_i. \end{cases} \quad (41)$$

其中  $\bar{\eta}_i, \bar{\sigma}_i, \bar{\mu}_i, C_i$  是正的设计参数.

应用Young不等式, 下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i & \leq -\frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} \theta_i^2, \\ \tilde{W}_i \hat{W}_i & \leq -\frac{1}{2} \| \tilde{W}_i \|^2 + \frac{1}{2} \| W_i \|^2, \\ \text{tr} \{ \tilde{Y}_i \hat{Y}_i \} & \leq -\frac{1}{2} \| \tilde{Y}_i \|_F^2 + \frac{1}{2} \| Y_i \|_F^2. \end{aligned} \quad (42)$$

根据式(40)~(42)可得

$$\dot{V}_i \leq - \sum_{j=1}^i k_j z_j^2 - \sum_{j=1}^i \frac{\bar{\eta}_j}{2\eta_j} \tilde{\theta}_j^2 - \sum_{j=1}^i \frac{\bar{\sigma}_j}{2} \| \tilde{W}_j \|^2 -$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^i \frac{\bar{\mu}_j}{2} \| \tilde{Y}_j \|_F^2 + \frac{1}{2} z_{i+1}^2 + \sum_{j=1}^i \frac{1}{2} e_j^2 + \\ & \mathcal{X}_i - \sum_{j=1}^i \frac{1}{C_j} \mathcal{N}(\varpi_j) \dot{\varpi}_j + \sum_{j=1}^i \frac{1}{C_j} \dot{\varpi}_j. \end{aligned} \quad (43)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i = & \sum_{j=1}^i \frac{\bar{\eta}_j}{2\eta_j} \theta_j^2 + \sum_{j=1}^i \frac{\bar{\sigma}_j}{2} \| W_j \|^2 + \\ & \sum_{j=1}^i (\theta_j + 1) \varrho + \sum_{j=1}^i \frac{\bar{\mu}_j}{2} \| Y_j \|_F^2. \end{aligned}$$

step n: 相似于step i的推导过程, 当  $i = n$  时, 设计实际控制器  $u$  为

$$u = \mathcal{N}(\varpi_n) \bar{u}. \quad (44)$$

其中:  $\mathcal{N}(\varpi_n)$  是定义在引理4中的动态增益函数;  $\varpi_n$  的自适应律设计为  $\dot{\varpi}_n = -C_n z_n \bar{u}$ ;  $\bar{u}$  是控制器  $u$  的等效单元, 有

$$\begin{aligned} \bar{u} = & - \left( k_n + \frac{1}{2} \right) z_n - \hat{\theta}_n \frac{z_n^3 \vartheta_n^2}{\sqrt{z_n^4 \vartheta_n^2 + \varrho^2}} - \\ & \hat{W}_n^T S_n(E_n, \hat{Y}_n^T \varphi_n(t)) z_n. \end{aligned} \quad (45)$$

这里  $\vartheta_n = \sqrt{\| \varphi_n(t) \hat{W}_n^T \hat{S}'_n \|_F^2 + \| \hat{S}'_n \hat{Y}_n^T \varphi_n(t) \|^2 + 1}$ ,  $k_n > 0$  是设计参数.

构造自适应律如下:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_n = \eta_n \frac{z_n^4 \vartheta_n^2}{\sqrt{z_n^4 \vartheta_n^2 + \varrho^2}} - \bar{\eta}_n \hat{\theta}_n, \\ \dot{W}_n = \Gamma_{W_n} [ (\hat{S}_n - \hat{S}'_n \hat{Y}_n^T \varphi_n(t)) z_n^2 - \bar{\sigma}_n \hat{W}_n ], \\ \dot{Y}_n = \Gamma_{Y_n} [ \varphi_n(t) \hat{W}_n^T \hat{S}'_n z_n^2 - \bar{\mu}_n \hat{Y}_n ], \\ \dot{\varpi}_n = -C_n z_n \bar{u}. \end{cases} \quad (46)$$

其中  $\bar{\eta}_n, \bar{\sigma}_n, \bar{\mu}_n, C_n$  是正的设计参数. 可以得出

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & - \sum_{j=1}^n k_j z_j^2 - \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\eta}_j}{2\eta_j} \tilde{\theta}_j^2 - \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\sigma}_j}{2} \| \tilde{W}_j \|^2 - \\ & \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\mu}_j}{2} \| \tilde{Y}_j \|_F^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} e_j^2 + \mathcal{X}_n - \\ & \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \mathcal{N}(\varpi_j) \dot{\varpi}_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \dot{\varpi}_j. \end{aligned} \quad (47)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_n = & \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\eta}_j}{2\eta_j} \theta_j^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\sigma}_j}{2} \| W_j \|^2 + \\ & \sum_{j=1}^n (\theta_j + 1) \varrho + \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\mu}_j}{2} \| Y_j \|_F^2. \end{aligned}$$

## 2.2 稳定性分析

本节给出闭环系统的渐近稳定性分析.

对于边界层误差  $e_i = s_i - \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ , 进行微分得到

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= -e_i - \frac{\hat{M}_i^2 e_i}{\sqrt{\hat{M}_i^2 e_i^2 + \rho^2}} + G_i(z_1, \dots, z_{i+1}), \\ e_1, \dots, e_i, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{i+1}, \hat{W}_1, \dots, \hat{W}_{i+1}, \\ \hat{Y}_1, \dots, \hat{Y}_{i+1}, \hat{M}_1, \dots, \hat{M}_i, y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r. \end{aligned} \quad (48)$$

其中:  $G_1(\cdot)$  和  $G_i(\cdot)$  是连续函数, 定义为

$$\begin{aligned} G_1(\cdot) &= -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{W}_1} \dot{\hat{W}}_1 - \\ &\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{Y}_1} \dot{\hat{Y}}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_d} \dot{y}_d - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_d} \dot{\dot{y}}_d, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} G_i(\cdot) &= -\sum_{j=1}^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \dot{x}_j - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \hat{\theta}_i} \dot{\hat{\theta}}_i - \frac{\partial \alpha_i}{\partial e_{i-1}} \dot{e}_{i-1} - \\ &\frac{\partial \alpha_i}{\partial \hat{M}_{i-1}} \dot{\hat{M}}_{i-1} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \hat{W}_i} \dot{\hat{W}}_i - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \hat{Y}_i} \dot{\hat{Y}}_i - \\ &\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_r} \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \dot{y}_r} \dot{\dot{y}}_r, \quad i = 2, \dots, n - 1. \end{aligned} \quad (50)$$

紧集  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  定义为

$$\Omega_1 = \{[y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d]^T : y_d^2 + \dot{y}_d^2 + \ddot{y}_d^2 \leq G_0\}, \quad (51)$$

$$\Omega_2 = \{V(t) \leq c\}, \quad (52)$$

其中  $G_0$  表示给定的正常数. 值得注意的是, 集合  $\Omega_1 \times \Omega_2$  在  $R^{4n+1}$  中也是紧集. 因此, 在紧集  $\Omega_1 \times \Omega_2$  上, 存在正常量  $M_i$ , 使得  $|G_i(\cdot)| \leq M_i$ . 因为在本文中  $M_i$  是未知的, 所以根据式 (49) 和 (50) 可知使用它的估计值  $\hat{M}_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

构造 Lyapunov 函数  $V$  如下:

$$V = V_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} e_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2\xi_i} \tilde{M}_i^2, \quad (53)$$

其中  $\xi_i$  是设计的参数. 因此, 有  $V$  导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \dot{V}_n - \sum_{i=1}^{n-1} e_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\hat{M}_i^2 e_i^2}{\sqrt{\hat{M}_i^2 e_i^2 + \rho^2}} + \\ &\sum_{i=1}^{n-1} M_i |e_i| - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_i} \tilde{M}_i \dot{\tilde{M}}_i. \end{aligned} \quad (54)$$

根据引理 3, 有

$$M_i |e_i| \leq \frac{\hat{M}_i^2 e_i^2}{\sqrt{\hat{M}_i^2 e_i^2 + \rho^2}} + \rho + \tilde{M}_i |e_i|, \quad (55)$$

将式 (55) 代入 (54) 整理可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \dot{V}_n - \sum_{i=1}^{n-1} e_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_i} \tilde{M}_i (\dot{\tilde{M}}_i - \\ &\xi_i |e_i|) + (n - 1)\rho. \end{aligned} \quad (56)$$

自适应律构造为

$$\dot{\tilde{M}}_i = \xi_i |e_i| - \bar{\xi}_i \tilde{M}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (57)$$

其中  $\xi_i$  和  $\bar{\xi}_i$  是设计的正参数.

应用 Young 不等式, 下列不等式成立:

$$\tilde{M}_n \hat{M}_n \leq -\frac{1}{2} \tilde{M}_n^2 + \frac{1}{2} \hat{M}_n^2. \quad (58)$$

然后, 根据式 (56) ~ (58) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &- \left( \sum_{j=1}^n k_j z_j^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\eta}_j}{2\eta_j} \tilde{\theta}_j^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\sigma}_j}{2} \|\tilde{W}_j\|^2 + \right. \\ &\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} e_j^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\mu}_j}{2} \|\tilde{Y}_j\|_F^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\bar{\xi}_i}{2\xi_i} \tilde{M}_n^2 \left. \right) + \\ &\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\bar{\xi}_i}{2\xi_i} M_n^2 - \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \mathcal{N}(\varpi_j) \dot{\varpi}_j + \\ &\sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \dot{\varpi}_j + (n - 1)\rho + \mathcal{X} \leq \\ &- aV - \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \mathcal{N}(\varpi_j) \dot{\varpi}_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \dot{\varpi}_j + \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (59)$$

其中

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\bar{\xi}_i}{2\xi_i} M_n^2 + (n - 1)\rho,$$

$$a = \min\{2k_j, \bar{\eta}_j, \bar{\sigma}_j, \bar{\mu}_j, \bar{\xi}_j\}.$$

对式 (59) 进行积分, 经过计算可得

$$\begin{aligned} V(t) &\leq \\ &- e^{-at} \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n C_j \mathcal{N}(\varpi_j(\iota)) \dot{\varpi}_j e^{a\iota} d\iota + \frac{\mathcal{X}}{a} - \\ &e^{at} \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \dot{\varpi}_j(\iota) e^{a\iota} d\iota + V(0) e^{-at}. \end{aligned} \quad (60)$$

因为  $\frac{\mathcal{X}}{a}$  是有界变量,  $V(0)e^{-at}$  是有界的. 对式 (60) 应用引理 4 可知, 闭环系统中的所有信号都是有界的.

根据引理 5, 可以知晓式 (41) 中  $\hat{W}_i^T, \hat{\theta}_i$  都是非负的. 然后, 经过简单的计算可得

$$\dot{\varpi}_i \geq C_i \left( k_i + \frac{3}{2} \right) z_i^2. \quad (61)$$

在区间  $[0, t]$  上, 对式 (61) 进行积分可得

$$\int_0^t C_i \left( k_i + \frac{3}{2} \right) z_i^2(\sigma) d\sigma \leq \varpi_i(t) - \varpi_i(0). \quad (62)$$

由引理 4 可知,  $\varpi_i(t)$  是有界的. 应用 Barbalat 引理可得,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 进一步可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} (z_1 = y - y_r) = 0$ , 从而实现了闭环系统的渐近跟踪.

**注 5** 本文考虑的非线性系统的系统函数是完全未知的, 采用基于神经网络的混合逼近器在线逼近非线性函数, 进而提出可行的自适应动态面控制策略. 值得注意的是, 对于神经网络控制方法而言, 最核心的问题是如何确定神经网络的逼近范围, 正如文献 [35-36] 中指出的, 这是神经网络控制领域一个公开

的难题, 目前尚未找到准确确定神经网络逼近域的理论方法. 现阶段, 只能采用试错的方法, 通过反复的实验, 寻找到合适神经网络的逼近范围, 最终确保神经网络的输入始终保持在神经网络逼近域内, 进而确保神经网络控制方案是有效的.

### 3 仿真结果

本节给出两个仿真例子验证所提出控制方案的有效性.

**仿真1** 考虑下面的二阶系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \frac{x_1^2 x_2^2 \omega_1^2 + x_1 x_2 \omega_1}{x_1^2 x_2^2 \omega_1^2 + 10}, \\ \dot{x}_2 = u(t - \tau) + \sin(x_1 x_2 \omega_2 e^{-x_1^2 x_2^2 \omega_2^2}), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (63)$$

其中:  $\tau = 0.01, \omega_1 = |\sin(0.5t)|$  和  $\omega_2 = |\cos t|$  分别是周期为  $2\pi$  和  $\pi$  的未知时变扰动.

仿真中, 参考信号  $y_d = 0.8 \cos(0.5t)$ , 设计参数  $k_1 = 27, k_2 = 5, \eta_1 = 1, \eta_2 = 1, \bar{\eta}_1 = 1, \bar{\eta}_2 = 1, \Gamma_{W_1} = \Gamma_{W_2} = 10I, \bar{\sigma}_1 = 1, \bar{\sigma}_2 = 1, \Gamma_{\gamma_1} = I, \Gamma_{\gamma_2} = 10I, \bar{\mu}_1 = 1, \bar{\mu}_2 = 0.1, \mathcal{C}_1 = 0.1, \mathcal{C}_2 = 8, \varrho = 5, \xi_1 = 0.1, \bar{\xi}_1 = 1$ . 系统的初始值设置为  $x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0.05, \hat{\theta}_1(0) = 0.51, \hat{\theta}_2(0) = 0.4, M_1(0) = 0.1, \varpi_1(0) = 0.01, \varpi_2(0) = 0.5$ . 选择傅里叶展开的分量  $p_1 = p_2 = 3$ , 并且神经网络的节点数都为 405. 两个径向基函数的中心都均匀地覆盖紧集  $[-4, 4] \times [-4, 4] \times [-2, 2]$  上, 径向基函数的宽度分别为  $\varsigma_1 = \varsigma_2 = 0.9$ . 仿真的结果如图 1~图 7 所示. 图 1 和图 3 表明系统的输出对给定的参考信号可以实现渐近跟踪.

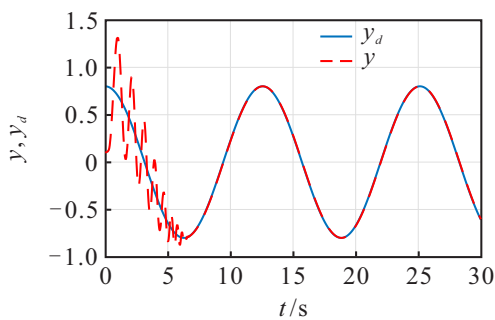


图 1  $y$  和  $y_d$  的轨迹(仿真 1)

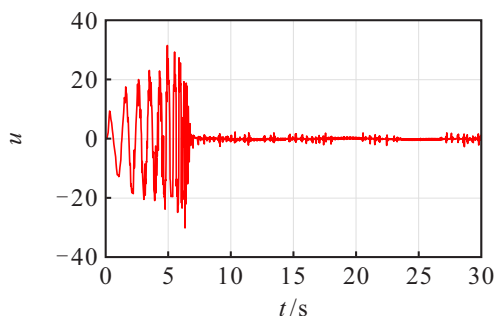


图 2 控制信号  $u$  的轨迹(仿真 1)

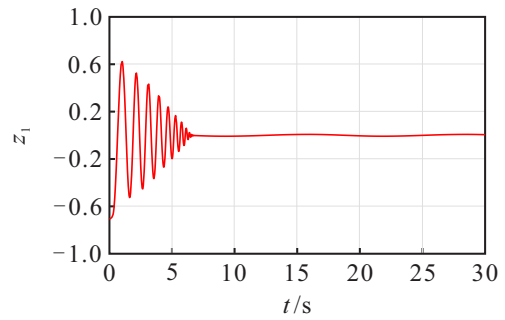


图 3 跟踪误差  $z_1$  的轨迹(仿真 1)

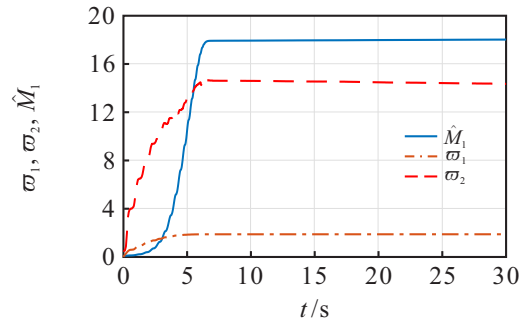


图 4 自适应律  $\hat{\varpi}_1, \hat{\varpi}_2$  和  $\hat{M}_1$  的轨迹(仿真 1)

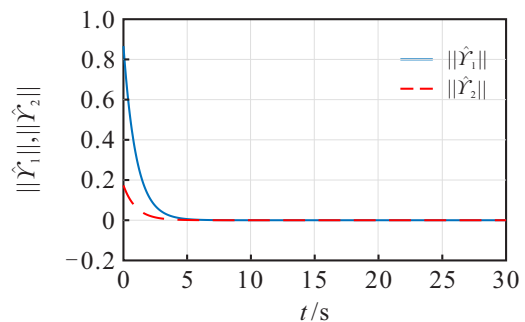


图 5  $\|\hat{\gamma}_1\|$  和  $\|\hat{\gamma}_2\|$  的轨迹(仿真 1)

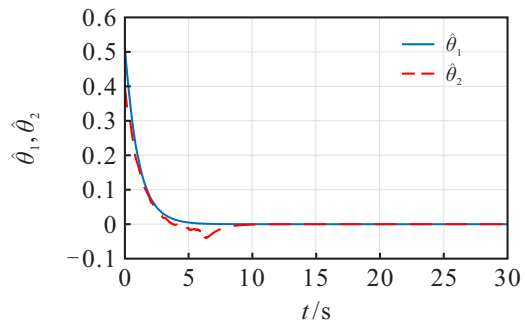


图 6 自适应律  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$  (仿真 1)

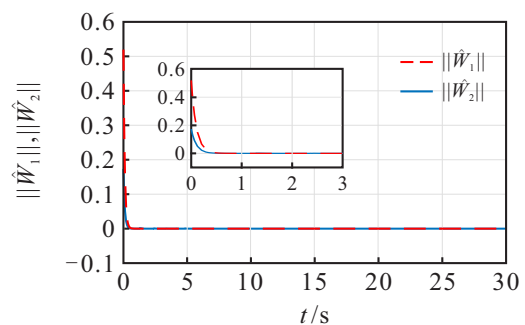


图 7  $\|\hat{W}_1\|$  和  $\|\hat{W}_2\|$  的轨迹(仿真 1)

**仿真2** 考虑文献[32]中的单连杆机器人模型系统

$$N\ddot{\theta} + 0.5n gl \sin \theta = s, \quad y = \theta.$$

其中:  $N$  是转子惯性,  $n$  是连杆的质量,  $g$  是重力加速度,  $l$  是连杆的长度,  $Q$  是角位置,  $\ddot{Q}$  是角加速度,  $s$  是控制力量. 定义  $x_1 = Q, x_2 = \dot{Q}, u(t - \tau) = s$ , 这里  $\dot{Q}$  表示角速度, 则包含周期扰动和输入时滞的单连杆机器人模型系统可以重写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad y = x_1, \\ \dot{x}_2 &= \frac{u(t - \tau)}{N} + f_2(x, \omega_2(t)). \end{aligned}$$

其中

$$f_2(x, \omega_2(t)) = \frac{-0.5n gl \sin x_1}{N} + 0.1x_2\omega_2(t),$$

周期扰动  $\omega_2(t) = |\cos t|$ , 周期为  $2\pi$ ;  $\tau = 0.01$ ; 参考信号  $y_d = 0.01 \sin t + \cos(0.2t)$ .

仿真中, 设置参数  $k_1 = 10, k_2 = 11, \eta_1 = 1, \eta_2 = 10, \bar{\eta}_1 = 1, \bar{\eta}_2 = 1, \Gamma_{W_1} = \Gamma_{W_2} = 10I, \bar{\sigma}_1 = 1, \bar{\sigma}_2 = 0.1, \Gamma_{\gamma_1} = I, \Gamma_{\gamma_2} = 20I, \bar{\mu}_1 = 1, \bar{\mu}_2 = 0.01, C_1 = 0.11, C_2 = 0.1, \rho = 1, \xi_1 = 0.1, \bar{\xi}_1 = 1$ . 初始值设置为  $x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0.2, \hat{\theta}_1(0) = 0.51, \hat{\theta}_2(0) = 0.4, M_1(0) = 0.1, \varpi_1(0) = 0.2, \varpi_2(0) = 0.8$ . 设置傅里叶展开的分量  $p_1 = p_2 = 3$ , 并且神经网络的节点数都为 405. 两个径向基函数的中心都均匀地覆盖密集  $[-4, 4] \times [-4, 4] \times [-2, 2]$  上, 径向基函数的宽度分别为  $\varsigma_1 = \varsigma_2 = 0.9$ . 仿真的结果如图 8~图 14 所示. 图 8 和图 10 表明系统的输出对给定的参考信号可以实现渐近跟踪.

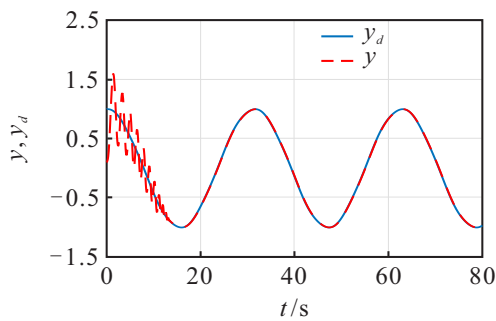


图 8  $y$  和  $y_d$  的轨迹(仿真2)

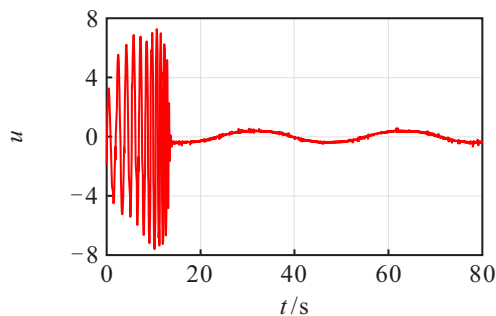


图 9 控制信号  $u$  的轨迹(仿真2)

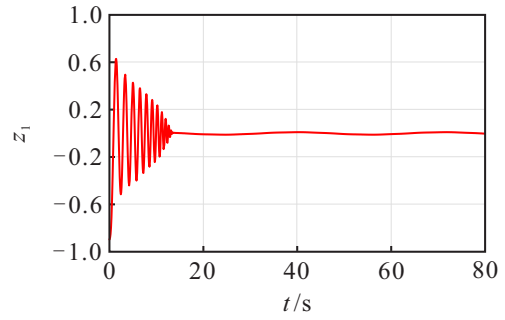


图 10 跟踪误差  $z_1$  的轨迹(仿真2)

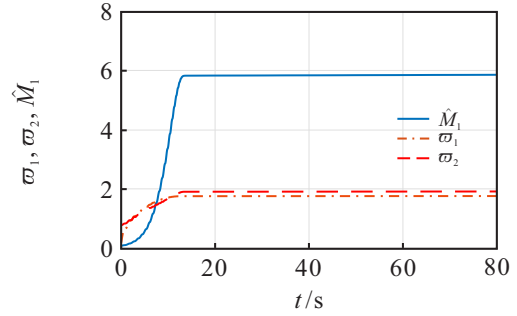


图 11 自适应律  $\varpi_1, \varpi_2$  和  $\hat{M}_1$  的轨迹(仿真2)

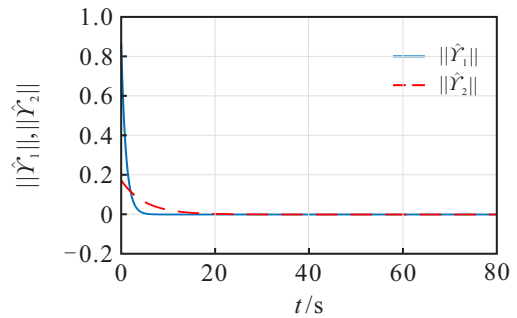


图 12  $\|\hat{\gamma}_1\|$  和  $\|\hat{\gamma}_2\|$  的轨迹(仿真2)

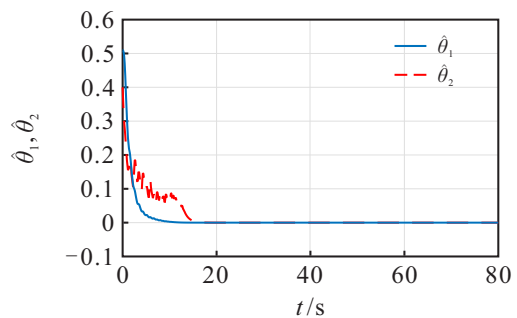


图 13 自适应律  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$  (仿真2)

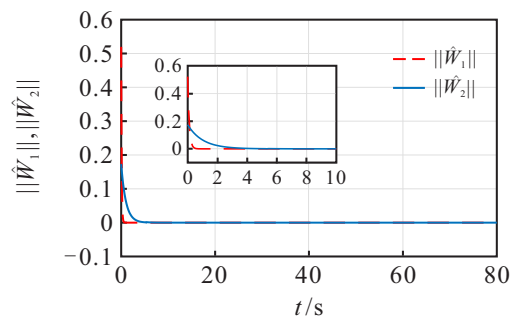


图 14  $\|\hat{W}_1\|$  和  $\|\hat{W}_2\|$  的轨迹(仿真2)

## 4 结论

本文研究了一类具有输入时滞和周期扰动的不确定非线性系统的自适应渐近跟踪问题. 基于傅里叶级数展开和径向基神经网络的混合逼近器, 对系统未知的周期扰动函数进行逼近. 引入积分项, 处理输入时滞问题. 此外, 在非线性滤波器的基础上, 建立了一种动态面控制方案, 避免了“复杂性爆炸”问题. 同时, 证明了所设计控制器能够确保闭环系统中所有的信号都是半全局有界的, 而且跟踪误差渐近收敛到零. 最后, 通过仿真例子验证了所提的控制方案是有效的. 未来的研究工作可以进一步将该控制方案推广到其他更复杂的系统, 如切换非线性系统、随机不确定系统等.

### 参考文献(References)

- [1] Wang D, Huang J. Neural network-based adaptive dynamic surface control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2005, 16(1): 195-202.
- [2] Yang Y N, Yan Y. Backstepping sliding mode control for uncertain strict-feedback nonlinear systems using neural-network-based adaptive gain scheduling[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2018, 29(3): 580-586.
- [3] Chen W S, Ge S S, Wu J, et al. Globally stable adaptive backstepping neural network control for uncertain strict-feedback systems with tracking accuracy known a priori[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 26(9): 1842-1854.
- [4] Esfandiari K, Abdollahi F, Talebi H A. Adaptive control of uncertain nonaffine nonlinear systems with input saturation using neural networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 26(10): 2311-2322.
- [5] Long L J, Zhao J. Adaptive output-feedback neural control of switched uncertain nonlinear systems with average dwell time[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, 26(7): 1350-1362.
- [6] Ren B B, Ge S S, Su C Y, et al. Adaptive neural control for a class of uncertain nonlinear systems in pure-feedback form with hysteresis input[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, 2009, 39(2): 431-443.
- [7] Tong S C, Li Y M, Sui S. Adaptive fuzzy tracking control design for SISO uncertain nonstrict feedback nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2016, 24(6): 1441-1454.
- [8] Tong S C, Zhang L L, Li Y M. Observer-based adaptive fuzzy decentralized tracking control for switched uncertain nonlinear large-scale systems with dead zones[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2016, 46(1): 37-47.
- [9] Li Y M, Tong S C, Li T S. Composite adaptive fuzzy output feedback control design for uncertain nonlinear strict-feedback systems with input saturation[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 45(10): 2299-2308.
- [10] Wang W, Tong S C. Observer-based adaptive fuzzy containment control for multiple uncertain nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, 27(11): 2079-2089.
- [11] Liu Y L, Ma H, Ma H J. Adaptive fuzzy fault-tolerant control for uncertain nonlinear switched stochastic systems with time-varying output constraints[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(5): 2487-2498.
- [12] Ma Z Y, Ma H J. Adaptive fuzzy backstepping dynamic surface control of strict-feedback fractional-order uncertain nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, 28(1): 122-133.
- [13] Chen C L P, Liu Y J, Wen G X. Fuzzy neural network-based adaptive control for a class of uncertain nonlinear stochastic systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2014, 44(5): 583-593.
- [14] Chen B, Liu X P, Tong S C. Adaptive fuzzy output tracking control of MIMO nonlinear uncertain systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007, 15(2): 287-300.
- [15] Chen W S. Adaptive backstepping dynamic surface control for systems with periodic disturbances using neural networks[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2009, 3(10): 1383-1394.
- [16] Chen W S, Tian Y P. Neural network approximation for periodically disturbed functions and applications to control design[J]. *Neurocomputing*, 2009, 72(16/17/18): 3891-3900.
- [17] Chen W S, Li W, Miao Q G. Backstepping control for periodically time-varying systems using high-order neural network and Fourier series expansion[J]. *ISA Transactions*, 2010, 49(3): 283-292.
- [18] Chen W S, Jiao L C. Adaptive tracking for periodically time-varying and nonlinearly parameterized systems using multilayer neural networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2010, 21(2): 345-351.
- [19] Chen W S, Jiao L C, Li R H, et al. Adaptive backstepping fuzzy control for nonlinearly parameterized systems with periodic disturbances[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2010, 18(4): 674-685.
- [20] Zhang G Q, Zhang X K. Concise adaptive neural control of uncertain nonlinear systems with periodically nonlinear time-varying parameterized disturbances[J]. *Journal of Process Control*, 2014, 24(4): 410-423.

- [21] Lv M, Schutter B D, Yu W W, et al. Nonlinear systems with uncertain periodically disturbed control gain functions: Adaptive fuzzy control with invariance properties[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 28(4): 746-757.
- [22] Liuzzo S, Marino R, Tomei P. Adaptive learning control of nonlinear systems by output error feedback[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(7): 1232-1248.
- [23] Ge S S, Hong F, Lee T H. Adaptive neural control of nonlinear time-delay systems with unknown virtual control coefficients[J]. IEEE Transactions on Systems — Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2004, 34(1): 499-516.
- [24] Li D P, Li D J, Liu Y J, et al. Approximation-based adaptive neural tracking control of nonlinear mimo unknown time-varying delay systems with full state constraints[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(10): 3100-3109.
- [25] Zhou Q, Shi P, Xu S Y, et al. Observer-based adaptive neural network control for nonlinear stochastic systems with time delay[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2013, 24(1): 71-80.
- [26] Niu B, Li L. Adaptive neural network tracking control for a class of switched strict-feedback nonlinear systems with input delay[J]. Neurocomputing, 2016, 173: 2121-2128.
- [27] Zhu Y, Krstic M, Su H Y. PDE boundary control of multi-input LTI systems with distinct and uncertain input delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(12): 4270-4277.
- [28] Chen W H, Guan Z H, Lu X M. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with both state and input delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2004, 341(5): 419-430.
- [29] Li H Y, Wang L J, Du H P, et al. Adaptive fuzzy backstepping tracking control for strict-feedback systems with input delay[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 25(3): 642-652.
- [30] Sun W W, Fu B Z. Adaptive control of time-varying uncertain non-linear systems with input delay: A Hamiltonian approach[J]. IET Control Theory & Applications, 2016, 10(15): 1844-1858.
- [31] Li D P, Liu Y J, Tong S C, et al. Neural networks-based adaptive control for nonlinear state constrained systems with input delay[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(4): 1249-1258.
- [32] Zhou Q, Li H Y, Wang L J, et al. Prescribed performance observer-based adaptive fuzzy control for nonstrict-feedback stochastic nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(10): 1747-1758.
- [33] Zuo Z Y, Wang C L. Adaptive trajectory tracking control of output constrained multi-rotors systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2014, 8(13): 1163-1174.
- [34] Xie K, Chen C, Lewis F L, et al. Adaptive asymptotic neural network control of nonlinear systems with unknown actuator quantization[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(12): 6303-6312.
- [35] Zhang T, Ge S S, Hang C C. Adaptive neural network control for strict-feedback nonlinear systems using backstepping design[J]. Automatica, 2000, 36(12): 1835-1846.
- [36] Ge S S, Wang C. Adaptive neural control of uncertain MIMO nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2004, 15(3): 674-692.

### 作者简介

吴健(1985—), 男, 副教授, 博士, 从事智能自适应控制及切换系统控制等研究, E-mail: jwu2011@126.com;

孙永波(1994—), 男, 硕士生, 从事自适应学习控制及应用的研究, E-mail: ybsun2018@163.com;

赵前进(1967—), 男, 教授, 博士, 从事智能计算及细分插值等研究, E-mail: qjzhao@aust.edu.com.

(责任编辑: 齐 霖)