属性值为区间数的决策对象相对可能度关系模型及其应用

黄智力†, 陈青兰
(厦门理工学院 经济与管理学院，福建 厦门 361024)

摘　要: 对于属性权重未知的区间数型不确定多属性决策问题, 首先在界定区间数相对可能度的基础上给出区间数比较相对可能度关系理论, 并得到一些相关性质; 其次借鉴离差最大化模型算法建立基于比较相对可能度关系确定属性权重的区间数型决策对象相对可能度关系模型 (IN-DMORPRM); 然后通过集结与融合供选决策对象间两两优势比较测定出的相对可能度关系矩阵信息, 得到各决策对象比较的总体相对可能度值并对供选对象集实施优劣选择和判定, 以此给出一种新的区间数多属性决策对象的相对可能度关系模型算法; 最后利用算例验证所给模型算法的有效性和实用性.

关键词: 不确定多属性决策；区间数；相对可能度关系模型；属性权重
中图分类号: TP182；O159　　**文献标志码:** A
DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1075　　**开放科学 (资源服务) 标识码 (OSID):**
引用格式: 黄智力, 陈青兰. 属性值为区间数的决策对象相对可能度关系模型及其应用 [J]. 控制与决策，2022, 37(4): 1025-1034.

Relative possibility relation model for decision making objects with multiple attribute values as interval number and its application

HUANG Zhi-li†，*CHEN Qing-lan*
(School of Economics and Management，Xiamen University of Technology，Xiamen 361024，China)

Abstract: For the interval number-based uncertain multiple attribute decision making problem with unknown attribute weights, firstly, based on the definition of relative possibility degree of interval number, the comparative relative possibility relation theory of interval number is proposed, and some related properties are obtained. Secondly, the interval number-based decision making object relative possibility relation model (IN-DMORPRM) to determine the attribute weight based on comparative relative possibility relation is established by drawing lessons from the idea of the algorithm of maximizing deviation models. Then, by aggregating and fusing the information of the relative possibility degree relation matrix measured by the superiority comparison in pairs between the decision making objects, the value of overall relative possibility degree of each decision making object is obtained, and the selection and judgment of the advantages and disadvantages of the objects set for selecting are carried out, so as to propose a new model algorithm for the relative possibility degree relation of interval number-based multi-attribute decision making objects. Finally, an numerical example is used to verify the effectiveness and practicability of the model algorithm.

Keywords: uncertain multiple attribute decision making；interval number；relative possibility relation model；attribute weight

0 引　言

不确定多属性决策 (uncertain multiple attribute decision making, UMADM), 也称为有限方案不确定多目标决策, 是现代决策科学理论与方法研究的重要组成部分, 其理论与方法广泛应用在诸多领域的实际评估与优化中, 例如能源技术评价[1]、燃煤电厂生态效率分析[2]、钢铁企业清洁生产绩效评价[3]、中性 DEA(data envelopment analysis, DEA) 交叉效率评价[4]、土地利用与交通优化[5]、医疗服务水平评价[6]、自然灾害系统风险评估[7]、员工激励机制评价[8]、突发事件应急管理优化[9]、武器系统择优判断[10] 等. 一般情况下, 解决 UMADM 问题的主要方法是根据已

收稿日期: 2020-08-03；**录用日期:** 2021-02-10.
基金项目: 国家自然科学基金项目 (60975052)；福建省社会科学规划项目 (FJ2018B031, FJ2019B101)；福建省软科学项目 (2019R0094)；福建省中青年教师教育科研项目 (JAS180383)；厦门理工学院高层次人才引进项目 (YKJ17004R).
责任编委: 王光臣.
†通讯作者. E-mail: zhili_huang@hotmail.com.

知的不确定决策信息应用适当的信息集结与融合方法对供选决策对象集实施优劣筛选和判定,其步骤流程可概括为:决策信息的获取、量化与规范化、确定属性权重的决策模型构建、决策信息集结与融合、优劣筛选与次序排定[11-12]. 目前针对属性权重未知且对决策对象无偏好的UMADM问题常见排序方法包括:最小偏差法[13]、特征向量法[14]、VIKOR扩展法[15]、概率统计法[16]、近似集动态更新法[17]、预期理论模型法[18]、相对相似关系法[19]、相对优势矩阵法[20]、区间信度结构法[21]、灰靶决策法[22]、基尼系数-交叉效率法[23]、犹豫模糊TOPSIS法[24]、犹豫模糊符号距离法[25]、概率犹豫模糊熵法[26]等. 关于属性权重的确定更是UMADM中一个重要的研究内容,如文献[27-28]分别在研究求解区间数型UMADM问题中给出了确定属性权重的离差最大化法、改进的离差最大化法;文献[29]提出了属性权重未知且属性值为区间数的UMADM的可能度规划模型算法;文献[30]针对属性权重未知且属性值为区间数的UMADM问题,提出了二次规划相对优势法;文献[31]构建了一种确定属性权重向量的区间数型决策对象相对相似规划模型,以此得到一种新的区间数多属性决策对象的相对相似规划模型算法. 不可否认这些传统模型方法对决策对象间优劣选择和次序排定都取得了不错的效果,特别是在遇到指标属性直观测量值相近时(所测数据相似性大差异小),可以有效地放大各个供选决策对象间的属性测定值间的差异,但是它们只是简单考虑蕴含初始属性测定值数据间的差异信息对决策结果的影响,而未能顾及属性测定值间相对可能度测定信息在处理诸如UMADM的不完备信息系统评价过程中对指标属性本身的影响作用,易造成对决策对象的评价结果整体区分度不高等问题.

结合上述问题的分析,针对属性权重未知且对决策对象无偏好的区间数型不确定多属性决策(IN-UMADM)问题,本文在界定区间数相对可能度的基础上给出区间数比较相对可能度关系理论及一些相关性质(即各供选决策对象和理想决策对象的相离度大小、比较相对可能度大小与各供选决策对象的直接比较相对可能度大小存在等价);其次在考虑指标属性测定值数据间相对可能度大小的作用下,借鉴离差最大化模型的相关理论,设计构造一种新的更优化的属性赋权公式的决策对象相对可能度关系模型,使得在属性比较相对可能度特征信息集结融合后,全体决策对象间的综合属性值差异最大化;最后依据供选决策对象间两两优势比较测定出的相对可能度关系矩阵信息,通过计算集结得到各决策对象比较的总体相对可能度值对供选对象集实施优劣尺度测定和次序排定,以此给出一种新的区间数型不确定多属性决策对象的相对可能度关系模型算法.

1 区间数比较相对可能度关系理论

1.1 区间数相对可能度

定义1 若$\tilde{x}=[x^L,x^U]=\{x|x^L\leqslant x\leqslant x^U\}$, $x^L,x^U\in R$,则称$\tilde{x}$为一个区间数[12,29-31](interval number,简记IN). 其中:x^U为上极限,称为区间数$\tilde{x}$的大元;x^L为下极限,称为区间数$\tilde{x}$的小元. 特别地,若区间数$\tilde{x}=[x^L,x^U]$还满足$0<x^L\leqslant x^U<1$,则称$\tilde{x}$为一个规范区间数;若$x^L=x^U$,则$\tilde{x}$退化为一个实数. $l_{\tilde{x}}=x^U-x^L$表示区间数$\tilde{x}$的取值长度,当$l_{\tilde{x}}=0$时,$\tilde{x}$是一个实数.

为方便起见,先给出下列有关区间数的运算法则及序关系如下:设$\tilde{x}=[x^L,x^U],\tilde{y}=[y^L,y^U]$,则有:

法则1 $\tilde{x}+\tilde{y}=[x^L+y^L,x^U+y^U]$.

法则2 $\tilde{x}-\tilde{y}=[x^L-y^U,x^U-y^L]$.

法则3 $1/\tilde{x}=[1/x^U,1/x^L]$. 其中:$x^L,x^U>0$或$x^L,x^U<0$.

法则4 $k\tilde{x}=[kx^L,kx^U]$,其中$k\geqslant 0$;特别地,若$k=0$,则$k\tilde{x}=0$; $k\tilde{x}=[kx^U,kx^L]$,其中$k<0$.

法则5 当且仅当$x^L\leqslant y^L$且$x^U\leqslant y^U$时,$\tilde{x}\leqslant\tilde{y}$.

定义2 设$\tilde{x}=[x^L,x^U],\tilde{y}=[y^L,y^U]$同时为任意两个区间数或其中有一个为区间数,且$l_{\tilde{x}}$和$l_{\tilde{y}}$分别表示区间数$\tilde{x}$和$\tilde{y}$的取值长度,记为$l_{\tilde{x}}=x^U-x^L,l_{\tilde{y}}=y^U-y^L$,则称

$$rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2\rho^{\frac{x^U-y^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}-0.5}}, & \dfrac{x^U-y^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}\geqslant 0.5;\\ \dfrac{1}{2\rho^{0.5-\frac{x^U-y^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}}}, & \dfrac{x^U-y^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}<0.5\end{cases}\tag{1}$$

为区间数$\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$的相对可能度(relative possibility degree)[30],记$\tilde{x}$与$\tilde{y}$的次序关系为$\tilde{x}\underset{rp}{\geqslant}\tilde{y}$. 此处需说明,式(1)中参数$\rho$为大于1的常数,通常取$\rho=e$.

根据上述区间数比较相对可能度的定义,可知下列结论均成立.

定理1 设区间数$\tilde{x}=[x^L,x^U],\tilde{y}=[y^L,y^U]$,则:

1) $0<rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})<1, 0<rp(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})<1$.

2) 互补性. $rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})+rp(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})=1$,特别地,$rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{x})=0.5$.

3) $rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})\geqslant 0.5$当且仅当$x^L+x^U\geqslant y^L+y^U$;特别地,$rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})=0.5$当且仅当$x^L+x^U=y^L+y^U$.

4) 传递性. 对于3个区间数$\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$,若$rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})\geqslant 0.5$且$rp(\tilde{y}\geqslant\tilde{z})\geqslant 0.5$,则$rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{z})\geqslant 0.5$.

根据区间数比较相对可能度定义的界定易知定理1的结论成立,证明过程略.

定理2　设$\tilde{x}=[x^L,x^U],\tilde{y}=[y^L,y^U]$同时为任意两个区间数或其中有一个为区间数,且$l_{\tilde{x}}$和$l_{\tilde{y}}$分别表示$\tilde{x}$和$\tilde{y}$的取值长度,记为$l_{\tilde{x}}=x^U-x^L,l_{\tilde{y}}=y^U-y^L$,若区间数$\tilde{y}$保持固定不变,则:

1) 当$\tilde{x}$满足$\dfrac{x^U-y^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}\geqslant 0.5$时,$rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})$是区间数$\tilde{x}$的单调非递减函数;

2) 当$\tilde{x}$满足$\dfrac{x^U-y^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}<0.5$时,$rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})$亦是区间数$\tilde{x}$的单调非递减函数.

证明　任取两个非退化的区间数$\tilde{x}_1=[x_1^L,x_1^U]$,$\tilde{x}_2=[x_2^L,x_2^U]$,且$\tilde{x}_1\leqslant\tilde{x}_2$,则根据区间数的运算法则5可得$x_1^L\leqslant x_2^L,x_1^U\leqslant x_2^U$且$l_{\tilde{x}_2}\leqslant l_{\tilde{x}_1}+x_2^U-x_1^U$.

1) 当$\dfrac{x^U-y^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}\geqslant 0.5$时,即$\dfrac{x_1^U-y^L}{l_{\tilde{x}_1}+l_{\tilde{y}}}\geqslant 0.5\wedge\dfrac{x_2^U-y^L}{l_{\tilde{x}_2}+l_{\tilde{y}}}\geqslant 0.5$,由式(1)显然可得

$$rp(\tilde{x}_2\geqslant\tilde{y})=1-\frac{1}{2\rho^{\frac{x_2^U-y^L}{l_{\tilde{x}_2}+l_{\tilde{y}}}-0.5}}\geqslant$$

$$1-\frac{1}{2\rho^{\frac{x_2^U-y^L}{l_{\tilde{x}_1}+l_{\tilde{y}}+x_2^U-x_1^U}-0.5}}=1-\frac{1}{2\rho^{\frac{x_1^U-y^L+x_2^U-x_1^U}{l_{\tilde{x}_1}+l_{\tilde{y}}+x_2^U-x_1^U}-0.5}}\geqslant$$

$$1-\frac{1}{2\rho^{\frac{x_1^U-y^L}{l_{\tilde{x}_1}+l_{\tilde{y}}}-0.5}}=rp(\tilde{x}_1\geqslant\tilde{y}),$$

即$rp(\tilde{x}_2\geqslant\tilde{y})\geqslant rp(\tilde{x}_1\geqslant\tilde{y})$. 所以$rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})$是区间数$\tilde{x}$当$\dfrac{x^U-y^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}\geqslant 0.5$时的单调非递减函数.

2) 当$\dfrac{x^U-y^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}<0.5$时,即$\dfrac{x_1^U-y^L}{l_{\tilde{x}_1}+l_{\tilde{y}}}<0.5\wedge\dfrac{x_2^U-y^L}{l_{\tilde{x}_2}+l_{\tilde{y}}}<0.5$,同理,显然有

$$rp(\tilde{x}_2\geqslant\tilde{y})=\frac{1}{2\rho^{0.5-\frac{x_2^U-y^L}{l_{\tilde{x}_2}+l_{\tilde{y}}}}}\geqslant\frac{1}{2\rho^{0.5-\frac{x_2^U-y^L}{l_{\tilde{x}_1}+l_{\tilde{y}}+x_2^U-x_1^U}}}=$$

$$\frac{1}{2\rho^{0.5-\frac{x_1^U-y^L+x_2^U-x_1^U}{l_{\tilde{x}_1}+l_{\tilde{y}}+x_2^U-x_1^U}}}\geqslant\frac{1}{2\rho^{0.5-\frac{x_1^U-y^L}{l_{\tilde{x}_1}+l_{\tilde{y}}}}}=rp(\tilde{x}_1\geqslant\tilde{y}),$$

即$rp(\tilde{x}_2\geqslant\tilde{y})\geqslant rp(\tilde{x}_1\geqslant\tilde{y})$. 所以$rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})$是区间数$\tilde{x}$当$\dfrac{x^U-y^L}{l_{\tilde{x}}+l_{\tilde{y}}}<0.5$时的单调非递减函数. □

1.2　区间数比较相对可能度关系

定义3　设任意两个规范区间数$\tilde{x}=[x^L,x^U]$,$\tilde{y}=[y^L,y^U]$,若范数

$$\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\mathrm{IN}}=|x^L-y^L|+|x^U-y^U|,\tag{2}$$

则称$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{y})=\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\mathrm{IN}}$为规范区间数$\tilde{x}$和$\tilde{y}$的相离度(deviation degree)[12,18,29]. 显然$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{y})$值越大,则$\tilde{x}$与$\tilde{y}$相离的程度越大. 特别地,当$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{y})=0$时,有$\tilde{x}=\tilde{y}$,即$\tilde{x}$与$\tilde{y}$相等.

假设加权规范化区间数型决策矩阵为$\tilde{Z}=(\tilde{z}_{ij})_{n\times m}$,其中$\tilde{z}_{ij}=[z_{ij}^L,z_{ij}^U],i\in N,j\in M$,则有如下定义.

定义4　称$Z^{+*}=\{\tilde{z}_1^{+*},\tilde{z}_2^{+*},\dots,\tilde{z}_m^{+*}\}$为正理想点序列构成的区间数型正理想决策对象,其中

$$\tilde{z}_j^{+*}=[z_j^{+*L},z_j^{+*U}]=[\max_i(z_{ij}^L),\max_i(z_{ij}^U)],$$
$$j=1,2,\dots,m,\tag{3}$$

$\tilde{z}_j^{+*}$为正理想点[12,18,29](越大越优). 称$Z^{-*}=\{\tilde{z}_1^{-*},\tilde{z}_2^{-*},\dots,\tilde{z}_m^{-*}\}$为负理想点序列构成的区间数型负理想决策对象,其中

$$\tilde{z}_j^{-*}=[z_j^{-*L},z_j^{-*U}]=[\min_i(z_{ij}^L),\min_i(z_{ij}^U)],$$
$$j=1,2,\dots,m,\tag{4}$$

$\tilde{z}_j^{-*}$为负理想点[12,18,29](越小越劣).

根据区间数相离度的概念,给出区间数比较相对可能度关系的相关定义和主要结果如下.

定义5　设任意两个规范区间数为$\tilde{x}=[x^L,x^U]$,$\tilde{y}=[y^L,y^U]$,正负理想点区间数为$\tilde{z}^{+*}=[z^{+*L},z^{+*U}]$,$\tilde{z}^{-*}=[z^{-*L},z^{-*U}]$,若

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*})\ \text{or}$$
$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{-*})>d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{-*}),\tag{5}$$

则称规范区间数$\tilde{x}$与$\tilde{y}$相比$\tilde{x}$占优势[29],记为$\tilde{x}\succ\tilde{y}$. 显然,与正理想点区间数的相离度越小,或者与负理想点区间数的相离度越大,对应区间数优势度越大.

定理3　1) 当且仅当正理想点为最优决策点进行决策时,有

$$\tilde{x}\succ\tilde{y}\Leftrightarrow d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{+*})<d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{+*})\Leftrightarrow$$
$$x^L+x^U>y^L+y^U\Leftrightarrow\begin{cases}rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})>0.5,\\rp(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})<0.5\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{z}^{+*})>rp(\tilde{y}\geqslant\tilde{z}^{+*}),\\rp(\tilde{z}^{+*}\geqslant\tilde{x})<rp(\tilde{z}^{+*}\geqslant\tilde{y});\end{cases}\tag{6}$$

2) 当且仅当负理想点为最优决策点进行决策时,有

$$\tilde{x}\succ\tilde{y}\Leftrightarrow d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x},\tilde{z}^{-*})>d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y},\tilde{z}^{-*})\Leftrightarrow$$
$$x^L+x^U>y^L+y^U\Leftrightarrow\begin{cases}rp(\tilde{x}\geqslant\tilde{y})>0.5,\\rp(\tilde{y}\geqslant\tilde{x})<0.5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} rp(\tilde{x} \geqslant \tilde{z}^{-*}) > rp(\tilde{y} \geqslant \tilde{z}^{-*}), \\ rp(\tilde{z}^{-*} \geqslant \tilde{x}) < rp(\tilde{z}^{-*} \geqslant \tilde{y}). \end{cases} \tag{7}$$

证明 1) 显然

$$\tilde{x} \succ \tilde{y} \Leftrightarrow d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}, \tilde{z}^{+*}) < d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}, \tilde{z}^{+*}).$$

根据式(2)可得

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}, \tilde{z}^{+*}) = |x^L - z^{+*L}| + |x^U - z^{+*U}|,$$

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}, \tilde{z}^{+*}) = |y^L - z^{+*L}| + |y^U - z^{+*U}|.$$

当正理想点为最优决策点时, $\tilde{z}^{+*} = [z^{+*L}, z^{+*U}]$ 为理想点区间数, 有

$$z^{+*L} \geqslant \max\{x^L, y^L\},\ z^{+*U} \geqslant \max\{x^U, y^U\}.$$

于是可以得到

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}, \tilde{z}^{+*}) = (z^{+*L} + z^{+*U}) - (x^L + x^U),$$

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}, \tilde{z}^{+*}) = (z^{+*L} + z^{+*U}) - (y^L + y^U).$$

由 $d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}, \tilde{z}^{+*}) < d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}, \tilde{z}^{+*})$ 得到 $x^L + x^U > y^L + y^U$, 因此

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}, \tilde{z}^{+*}) < d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}, \tilde{z}^{+*}) \Leftrightarrow x^L + x^U > y^L + y^U,$$

从而 $\tilde{x} \succ \tilde{y}$ 成立.

当 $\begin{cases} rp(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) > 0.5, \\ rp(\tilde{y} \geqslant \tilde{x}) < 0.5 \end{cases}$ 时, 有:

情形1 满足 $\dfrac{x^U - y^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} \geqslant 0.5$ 时, 有

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2\rho^{\frac{x^U - y^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} - 0.5}} > 0.5, \\ 1 - \dfrac{1}{2\rho^{\frac{y^U - x^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} - 0.5}} < 0.5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \rho^{\frac{x^U - y^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} - 0.5} > 1, \\ \rho^{\frac{y^U - x^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} - 0.5} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^U - y^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} - 0.5 > 0, \\ \dfrac{y^U - x^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} - 0.5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^L + x^U > y^L + y^U, \\ y^L + y^U < x^L + x^U \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}, \tilde{z}^{+*}) < d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}, \tilde{z}^{+*}).$$

从而 $\tilde{x} \succ \tilde{y}$ 成立.

情形2 满足 $\dfrac{x^U - y^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} < 0.5$ 时, 有

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\rho^{0.5 - \frac{x^U - y^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}}}} > 0.5, \\ \dfrac{1}{2\rho^{0.5 - \frac{y^U - x^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}}}} < 0.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^{0.5 - \frac{x^U - y^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}}} < 1, \\ \rho^{0.5 - \frac{y^U - x^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}}} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0.5 - \dfrac{x^U - y^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} < 0, \\ 0.5 - \dfrac{y^U - x^L}{l_{\tilde{x}} + l_{\tilde{y}}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^L + x^U > y^L + y^U, \\ y^L + y^U < x^L + x^U \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}, \tilde{z}^{+*}) < d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}, \tilde{z}^{+*}).$$

从而 $\tilde{x} \succ \tilde{y}$ 成立. 又因为

$$\begin{cases} z^{+*L} \geqslant \max\{x^L, y^L\}, \\ z^{+*U} \geqslant \max\{x^U, y^U\}, \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} z^{+*L} + z^{+*U} \geqslant x^L + x^U, \\ z^{+*L} + z^{+*U} \geqslant y^L + y^U. \end{cases}$$

根据区间数比较相对可能度定理1的结论可得

$$\begin{cases} rp(\tilde{z}^{+*} \geqslant \tilde{x}) \geqslant 0.5, \\ rp(\tilde{z}^{+*} \geqslant \tilde{y}) \geqslant 0.5. \end{cases}$$

因此, 若有

$$\begin{cases} rp(\tilde{x} \geqslant \tilde{z}^{+*}) > rp(\tilde{y} \geqslant \tilde{z}^{+*}), \\ rp(\tilde{z}^{+*} \geqslant \tilde{x}) < rp(\tilde{z}^{+*} \geqslant \tilde{y}). \end{cases}$$

依定理2的结论, 有

$$\begin{cases} rp(\tilde{x} \geqslant \tilde{y}) > 0.5, \\ rp(\tilde{y} \geqslant \tilde{x}) < 0.5 \end{cases} \Leftrightarrow d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}, \tilde{z}^{+*}) < d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}, \tilde{z}^{+*}).$$

从而 $\tilde{x} \succ \tilde{y}$ 成立. 故当正理想点为最优决策点进行决策时, 式(6)成立.

同理可证式(7)成立. □

定理3说明区间数间相对可能度关系的确定可以通过计算区间数同理想点的相离度值大小、区间数比较相对可能度值大小或者比较区间数小元和大元的属性值和大小直接判别.

定义6 设 $X = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m\}, Y = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_m\}$ 为由规范区间数序列构成的供选决策对象, $Z^{+*} = \{\tilde{z}_1^{+*}, \tilde{z}_2^{+*}, \ldots, \tilde{z}_m^{+*}\}, Z^{-*} = \{\tilde{z}_1^{-*}, \tilde{z}_2^{-*}, \ldots, \tilde{z}_m^{-*}\}$ 为由正、负理想点序列构成的区间数型正、负理想决策对象. 其中: $\tilde{x}_j = [x_j^L, x_j^U], \tilde{y}_j = [y_j^L, y_j^U], \tilde{z}_j^{+*} = [z_j^{+*L}, z_j^{+*U}], \tilde{z}_j^{-*} = [z_j^{-*L}, z_j^{-*U}], j = 1, 2, \ldots, m$. 若

$$\sum_{j=1}^{m} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_j, \tilde{z}_j^{+*}) < \sum_{j=1}^{m} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}_j, \tilde{z}_j^{+*}) \text{ or}$$

$$\sum_{j=1}^{m} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_j, \tilde{z}_j^{-*}) > \sum_{j=1}^{m} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}_j, \tilde{z}_j^{-*}), \tag{8}$$

则称区间数型供选决策对象 X 与 Y 相比 X 占优[29], 记为 $X \succ Y$. 显然, 与区间数型正理想决策对象、正

理想点序列的相离度和越小,或者与区间数型负理想决策对象、负理想点序列的相离度和越大,对应供选决策对象的优势度越大.

定理4 1) 当且仅当区间数型正理想决策对象为最优对象进行决策时,有

$$X \succ Y \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_j, \tilde{z}_j^{+*}) < \sum\limits_{j=1}^{m} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}_j, \tilde{z}_j^{+*}), \\ d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{x}_j, \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{+*}\Big) < d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{y}_j, \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{+*}\Big) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{m} (x_j^L + x_j^U) > \sum_{j=1}^{m} (y_j^L + y_j^U) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{x}_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{y}_j\Big) > 0.5, \\ rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{y}_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{x}_j\Big) < 0.5 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{x}_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{+*}\Big) > rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{y}_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{+*}\Big), \\ rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{+*} \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{x}_j\Big) < rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{+*} \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{y}_j\Big); \end{cases} \tag{9}$$

2) 当且仅当区间数型负理想决策对象为最优对象进行决策时,有

$$X \succ Y \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_j, \tilde{z}_j^{-*}) > \sum\limits_{j=1}^{m} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{y}_j, \tilde{z}_j^{-*}), \\ d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{x}_j, \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{-*}\Big) > d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{y}_j, \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{-*}\Big) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{m} (x_j^L + x_j^U) > \sum_{j=1}^{m} (y_j^L + y_j^U) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{x}_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{y}_j\Big) > 0.5, \\ rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{y}_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{x}_j\Big) < 0.5 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{x}_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{-*}\Big) > rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{y}_j \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{-*}\Big), \\ rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{-*} \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{x}_j\Big) < rp\Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{z}_j^{-*} \geqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \tilde{y}_j\Big). \end{cases} \tag{10}$$

定理4的实质是将属性值为区间数系列的UMADM方案排序问题转化为对方案综合属性值区间数的相对可能度比较排序问题,其证明与定理3类似,证明过程略.

定理4说明,供选决策对象间优势关系的判定可以通过计算供选决策对象属性值同理想决策对象理想点的相离度值的系列和大小,或者计算供选决策对象属性值系列和同理想决策对象理想点系列和的相离度值大小、比较相对可能度值大小,或者比较供选决策对象属性值系列和的相对可能度值大小,或者比较供选决策对象的区间数小元和大元的属性值系列和大小直接进行判定.

2 区间数型决策对象相对可能度关系模型

在求解属性值为区间数的UMADM问题过程中,为让每个供选决策对象的综合属性值在基于相对可能度关系的属性赋权下,完成集结所有供选决策对象的属性值信息后实现数据值差异最优化,更便于对供选决策对象集实施优劣筛选和排序,最终决策者不但要考虑到供选对象属性值偏差大小本身的重要性程度,而且还要考虑到属性值间比较相对可能度大小信息. 所以,对于属性权重未知且对方案无偏好的IN-UMADM问题,借鉴离差最大化模型[11-12]相关理论,提出一种新的利于测定供选决策对象间优劣的基于相对可能度关系模型的属性赋权规则: 在统一属性值数据间物理量纲的不可公度性及矛盾性后,若决策属性在全体供选决策对象下合成的属性比较相对可能度总和增大,说明该属性对供选决策对象间优劣判定所起影响作用的程度增大,则应考虑增大属性权重度量值;反之,应考虑减小属性权重度量值;特别地,若决策属性在全体供选决策对象下合成的属性比较相对可能度总和达到最小值零,说明该属性对供选决策对象间优劣判定不起影响作用,则应考虑赋予属性权重度量值为零. 因为决策对象属性值间合成的比较相对可能度值数据大的属性是导致供选决策对象优劣筛选差异的来源,也是对最优决策对象的最终确定起主要作用的决定因素,所以本文利用上述赋权规则扩大决策对象属性值通过集结融合而成的反映供选决策对象间比较相对可能度信息特征的综合属性值差异,最后采用区间数比较相对可能度关系理论对供选决策对象集$\{X_i\}(i \in N)$实施优劣判定和次序排定.

假定全体供选决策对象X_i关于各属性u_j的初始测定值$\tilde{x}_{ij}$(这里$\tilde{x}_{ij} = [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$)构成的矩阵$\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij})_{n\times m}$称为初始区间数型决策矩阵. 设$I_j(j = 1,2)$分别表示最常见的效益型、成本型属性的下标集,且令$M = \{1,2,\cdots,m\}, N = \{1,2,\cdots,n\}$. 为统一不同属性值数据间的不可公度性及矛盾性,可将$\tilde{X}$按下式转换为规范区间数型决策矩阵$\tilde{R} =$

$(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$[12, 19, 31]:

$$\tilde{r}_{ij}=\tilde{x}_{ij}/\|\tilde{x}_j\|,\ i\in N,\ j\in I_1;\tag{11}$$

$$\tilde{r}_{ij}=(1/\tilde{x}_{ij})/\|(1/\tilde{x}_j)\|,\ i\in N,\ j\in I_2.\tag{12}$$

其中: $\tilde{r}_{ij}=[r_{ij}^L,r_{ij}^U]$ 为规范区间数, $\|\cdot\|$ 为向量的范数, $\|\tilde{x}_j\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{x}_{ij}^2}$, $\|(1/\tilde{x}_j)\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(1/\tilde{x}_{ij})^2}$. 根据区间数的运算法则,式(11)和(12)可改写为

$$\begin{cases}r_{ij}^L=x_{ij}^L\Big/\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{ij}^U)^2},\\ r_{ij}^U=x_{ij}^U\Big/\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{ij}^L)^2},\end{cases}\ i\in N,\ j\in I_1;\tag{13}$$

$$\begin{cases}r_{ij}^L=(1/x_{ij}^U)\Big/\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(1/x_{ij}^L)^2},\\ r_{ij}^U=(1/x_{ij}^L)\Big/\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(1/x_{ij}^U)^2},\end{cases}\ i\in N,\ j\in I_2.\tag{14}$$

根据区间数比较相对可能度关系理论,在规范区间数型决策矩阵 $\tilde{R}$ 中,只考虑对于第 j 个属性 u_j 情形下,属性 u_j 与 u_k 在全体供选决策对象下的比较相对可能度和为

$$rp_k(u_j\succ u_k)=\sum_{i=1}^{n}rp(u_j^{X_i}\succ u_k^{X_i})=\sum_{i=1}^{n}rp(\tilde{r}_{ij}\geqslant\tilde{r}_{ik}),\ k,j\in M,\ i\in N.\tag{15}$$

于是对于第 j 个属性 u_j,属性 u_j 与其他决策属性的比较相对可能度总和为

$$rp(u_j)=\sum_{k=1,k\neq j}^{m}rp_k(u_j\succ u_k)=\sum_{k=1,k\neq j}^{m}\sum_{i=1}^{n}rp(\tilde{r}_{ij}\geqslant\tilde{r}_{ik}),\ k,j\in M,\ i\in N.\tag{16}$$

针对属性权重信息完全未知的IN-UMADM问题,不妨假设其属性权重向量为 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\dots,w_m)$, $0\leqslant w_j\leqslant 1$, $j\in M$,并满足单位化约束条件 $\sum\limits_{j=1}^{m}w_j^2=1$.

根据本文提出的基于相对可能度关系模型的属性赋权规则,且考虑到决策者对供选对象无偏好的情况下,最优权重向量 $\boldsymbol{W}$ 的确定应使得在全体供选决策对象下所有决策属性的比较相对可能度总和在加权向量 $\boldsymbol{W}$ 作用下加权和最大. 为此构造下列UMADM的区间数型决策对象相对可能度关系模型(interval number-based decision making object relative possibility relation model,简记为IN-DMORPRM):

$$\max\ \phi(\boldsymbol{W})=\sum_{j=1}^{m}rp(u_j)\cdot w_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1,k\neq j}^{m}\sum_{i=1}^{n}rp(\tilde{r}_{ij}\geqslant\tilde{r}_{ik})\cdot w_j;$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{m}w_j^2=1,\ w_j\geqslant 0,\ k,j\in M,\ i\in N.\tag{17}$$

解此最优化模型,得到最优解为

$$w_j^*=\frac{\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}rp(\tilde{r}_{ij}\geqslant\tilde{r}_{ik})}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m}\Big[\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}rp(\tilde{r}_{ij}\geqslant\tilde{r}_{ik})\Big]^2}},\ k,j\in M,\ i\in N.\tag{18}$$

为保持与传统归一化用法一致,对单位化权重向量 w_j^* 做归一化处理,即令 $w_j=w_j^*\Big/\sum\limits_{j=1}^{m}w_j^*$, $j\in M$,可得属性最优权重值为

$$w_j=\frac{\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}rp(\tilde{r}_{ij}\geqslant\tilde{r}_{ik})}{\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}rp(\tilde{r}_{ij}\geqslant\tilde{r}_{ik})},\ k,j\in M,\ i\in N.\tag{19}$$

由式(19)易知,在全体供选决策对象下决策属性间的比较相对可能度值总和与该属性权重值成正比关系.

3 IN-DMORPRM实施步骤及算例

本文给出的UMADM的区间数型决策对象相对可能度关系模型(IN-DMORPRM)实施步骤如下.

step 1: 为消除不同物理量纲影响统一属性测度值数据间的不可公度性和矛盾性,将 $\tilde{X}$ 按式(13)和(14)转化为 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$,其中 $\tilde{r}_{ij}=[r_{ij}^L,r_{ij}^U]$ 为规范区间数.

step 2: 先利用式(1)分析测定出蕴涵在 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$ 中不同属性值数据间的比较相对可能度值,再依据IN-DMORPRM按式(19)进行信息融合集结,求出属性权重向量 $\boldsymbol{W}$.

step 3: 将step 2中求得的属性权重向量 $\boldsymbol{W}$ 作用于 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$,将由此构造出的矩阵

$$\tilde{R}(\boldsymbol{W})=(\tilde{r}_{ij}\cdot w_j)_{n\times m}\tag{20}$$

称为加权规范区间数型决策矩阵[12, 29, 31].

由式(20)集结计算各供选决策对象 $X_i(i\in N)$ 的加权综合属性值

$$\tilde{z}_i(\boldsymbol{W}) = \sum_{j=1}^{m} w_j \tilde{r}_{ij}. \quad (21)$$

为考察各供选决策对象间的比较相对可能度关系,将式(21)求得的各供选决策对象$X_i(i \in N)$的加权综合属性值$\tilde{z}_i(\boldsymbol{W})$按式(1)进行两两比较,称

$$rp(X_i \succ X_k) = rp(\tilde{z}_i(\boldsymbol{W}) \geqslant \tilde{z}_k(\boldsymbol{W})) \quad (22)$$

为供选决策对象X_i优于X_k的比较相对可能度. 称由式(22)构造出的矩阵

$$R_{n\times n} = rp(X_i \succ X_k)_{n\times n} \quad (23)$$

为供选决策对象间两两比较测定出的相对可能度关系矩阵. 显然,由定理1的结论易知,所构造的相对可能度关系矩阵是一个模糊互补判断矩阵,利用文献[14]中给出的互反判断矩阵一致性检验方法可以得到检验模糊互补判断矩阵$R_{n\times n}$一致性的通用公式[12]为

$$\begin{cases} \mathrm{CI} = \dfrac{1}{n(n-1)} \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \Big(\frac{r_{ij}}{r_{ji}}\frac{\omega_j}{\omega_i} + \frac{r_{ji}}{r_{ij}}\frac{\omega_i}{\omega_j} - 2\Big), \\ \mathrm{CR} = \mathrm{CI}/\mathrm{RI}. \end{cases} \quad (24)$$

其中:$\omega_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} r_{ij} + \dfrac{n}{2} - 1}{n(n-1)}$,RI为平均随机一致性指标(如表1所示).

表1 平均随机一致性指标RI[12]

矩阵阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59

若CR $<$ 0.1,则称相应的模糊互补判断矩阵$R_{n\times n}$是一致性可接受的; 否则,是一致性不可接受的. 称

$$\sigma(X_i^{\succ}) = \frac{1}{n-1}\sum_{k\neq i}^{n} rp(X_i \succ X_k),\ i,k \in N \quad (25)$$

为供选决策对象X_i在供选对象集$\{X_i\}(i = 1, 2, \ldots, n)$两两比较测定出的相对可能度关系矩阵信息集结融合下的总体比较相对可能度.

step 4: 利用式(20)～(25)求出供选决策对象X_i在全体供选对象间两两比较测定出的相对可能度关系矩阵信息集结融合下的总体比较相对可能度值$\sigma(X_i^{\succ})(i = 1, 2, \ldots, n)$.

step 5: 根据step 4求得的总体比较相对可能度值$\sigma(X_i^{\succ})$按大到小的顺序对供选决策对象集$\{X_i\}(i = 1, 2, \cdots, n)$进行优劣筛选和排序.

例1 这里采用文献[18-19]中的投资案例进行分析. 假定某风险投资基金在做最终决策时确定了3个主要指标属性参考要素: 风险u_1、企业成长u_2、环境u_3,即用$U = \{u_1, u_2, u_3\}$表示,并拟对已入围的4家候选企业$\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$的投资回报潜力价值进行优劣筛选和排序. 已知由100位专家对上述4家候选企业在这3个指标属性参考要素下的可行性方案分别进行无记名投票,经过统计处理后确定的赞成票的可能结果如表2所示[18-19],试确定最适合投资的企业单位.

step 1: 由于表2中反映赞成票可能结果的数据均为效益型属性值,可直接将表2中的初始直观量化属性值数据构成的$\tilde{X}$按式(13)和(14)转换为$\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$,得到规范决策信息如表3所示.

表2 赞成票可能结果量化信息表[18-19]

X	u_1	u_2	u_3
X_1	[45, 65]	[50, 70]	[20, 45]
X_2	[65, 75]	[65, 75]	[55, 85]
X_3	[45, 65]	[55, 65]	[55, 80]
X_4	[75, 85]	[65, 80]	[45, 85]

表3 规范决策信息表

X	u_1	u_2	u_3
X_1	[0.308, 0.551]	[0.344, 0.592]	[0.132, 0.489]
X_2	[0.445, 0.636]	[0.447, 0.634]	[0.364, 0.923]
X_3	[0.308, 0.551]	[0.378, 0.550]	[0.364, 0.869]
X_4	[0.514, 0.721]	[0.447, 0.677]	[0.298, 0.923]

step 2: 先利用式(1)分析测定出蕴涵在$\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times m}$中不同属性值数据间的比较相对可能度值(由于参数$\rho$为大于1的常数,这里不妨取$\rho = e$),再依据IN-DMORPRM按式(19)进行相对可能度信息融合集结,求出属性权重向量$\boldsymbol{W}$如下:

$$\boldsymbol{W} = (0.325, 0.328, 0.347)^{\mathrm{T}}.$$

step 3: 利用式(20)构造出加权规范区间数型决策矩阵$\tilde{R}(\boldsymbol{W})$,得到加权规范决策信息如表4所示.

表4 加权规范决策信息表

X	u_1	u_2	u_3
X_1	[0.100, 0.179]	[0.113, 0.194]	[0.046, 0.169]
X_2	[0.145, 0.207]	[0.147, 0.208]	[0.126, 0.320]
X_3	[0.100, 0.179]	[0.124, 0.180]	[0.126, 0.301]
X_4	[0.167, 0.234]	[0.147, 0.222]	[0.103, 0.320]

接着按式(21)计算出各供选决策对象$X_i(i = 1, 2, 3, 4)$的加权综合属性值为

$$\tilde{z}_1(\boldsymbol{W}) = [0.259, 0.543],\ \tilde{z}_2(\boldsymbol{W}) = [0.418, 0.735],$$

$$\tilde{z}_3(\boldsymbol{W}) = [0.350, 0.661],\ \tilde{z}_4(\boldsymbol{W}) = [0.417, 0.777].$$

再利用式(22)、(23)求解出供选决策对象$X_i(i = 1,2,3,4)$间两两比较测定出的相对可能度关系矩阵

$$R_{4\times4} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.374 & 0.419 & 0.369 \\ 0.626 & 0.5 & 0.553 & 0.485 \\ 0.581 & 0.447 & 0.5 & 0.436 \\ 0.631 & 0.515 & 0.564 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

依据式(24)易计算得出

$$\mathrm{CR} = 0.032\,3 < 0.1,$$

故此相对可能度关系矩阵$R_{4\times4}$是一致性可接受的.

step 4: 根据step 3求得供选决策对象间两两比较测定出的相对可能度关系矩阵,运用式(25)计算供选决策对象X_i在全体供选对象间两两比较测定出的相对可能度关系矩阵信息集结融合下的总体比较相对可能度值$\sigma(X_i^{\succ})(i = 1,2,3,4)$如下:

$$\sigma(X_1^{\succ}) = 0.387,\ \sigma(X_2^{\succ}) = 0.555,$$

$$\sigma(X_3^{\succ}) = 0.488,\ \sigma(X_4^{\succ}) = 0.570.$$

step 5: 根据step 4求得的总体比较相对可能度值$\sigma(X_i^{\succ})$按大到小的顺序对供选决策对象集$\{X_i\}(i = 1,2,3,4)$进行优劣筛选和排序,即$X_4 \underset{0.515}{\succ} X_2 \underset{0.553}{\succ} X_3 \underset{0.581}{\succ} X_1$,故$X_4$为最优供选对象.

上述算例除了利用各供选决策对象间的比较相对可能度关系法对供选对象集实施优劣筛选和排序外,亦可采用本文定理4的其他结论,如通过比较供选决策对象加权属性值系列和同正理想决策对象理想点系列和的相离度值大小、供选决策对象同正理想决策对象的比较相对可能度值大小或者比较供选决策对象的区间数小元和大元的属性值系列和大小实施优劣筛选.若用定理4的相关结论求解得出的排序结果与用比较相对可能度关系法所得的结果出现两者不一致情形,则应该采纳通过一致性检验判断标准的排序方法求得的结果.

首先根据表4中的属性值数据$\tilde{R}(\boldsymbol{W})$,按照式(3)、(4)给出由正、负理想点序列分别构成的区间数型正、负理想决策对象Z^{+*}和Z^{-*},即

$$Z^{+*} = \{[0.167, 0.234], [0.147, 0.222], [0.126, 0.320]\};$$

$$Z^{-*} = \{[0.100, 0.179], [0.113, 0.180], [0.046, 0.169]\}.$$

再利用式(21)计算出正、负理想决策对象Z^{+*}和Z^{-*}的加权综合理想属性值

$$\tilde{z}^{+*}(\boldsymbol{W}) = [0.440, 0.777],\ \tilde{z}^{-*}(\boldsymbol{W}) = [0.259, 0.529].$$

最后根据step 3求得的各供选决策对象$X_i(i = 1,2,3,4)$的加权综合属性值,易得出如下结果:

$$\sum_{j=1}^{3} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_{1u_j}^{w}, \tilde{z}_{u_j}^{+*}) = d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{1u_j}^{w}, \sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big) = 0.414,$$

$$\sum_{j=1}^{3} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_{2u_j}^{w}, \tilde{z}_{u_j}^{+*}) = d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{2u_j}^{w}, \sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big) = 0.064,$$

$$\sum_{j=1}^{3} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_{3u_j}^{w}, \tilde{z}_{u_j}^{+*}) = d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{3u_j}^{w}, \sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big) = 0.205,$$

$$\sum_{j=1}^{3} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{x}_{4u_j}^{w}, \tilde{z}_{u_j}^{+*}) = d_{\mathrm{IN}}\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{4u_j}^{w}, \sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big) = 0.023,$$

或者

$$rp(X_1 \succ Z^{+*}) = rp\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{1u_j}^{w} \geqslant \sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big) = 0.358,$$

$$rp(X_2 \succ Z^{+*}) = rp\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{2u_j}^{w} \geqslant \sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big) = 0.476,$$

$$rp(X_3 \succ Z^{+*}) = rp\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{3u_j}^{w} \geqslant \sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big) = 0.427,$$

$$rp(X_4 \succ Z^{+*}) = rp\Big(\sum_{j=1}^{3}\tilde{x}_{4u_j}^{w} \geqslant \sum_{j=1}^{3}\tilde{z}_{u_j}^{+*}\Big) = 0.492,$$

或者

$$\sum_{j=1}^{3}(x_{1u_j}^{wL} + x_{1u_j}^{wU}) = 0.802,$$

$$\sum_{j=1}^{3}(x_{2u_j}^{wL} + x_{2u_j}^{wU}) = 1.153,$$

$$\sum_{j=1}^{3}(x_{3u_j}^{wL} + x_{3u_j}^{wU}) = 1.011,$$

$$\sum_{j=1}^{3}(x_{4u_j}^{wL} + x_{4u_j}^{wU}) = 1.194.$$

因此,对供选决策对象集$\{X_i\}(i = 1,2,3,4)$的优劣判定和排序仍为$X_4 \succ X_2 \succ X_3 \succ X_1$,即$X_4$是最优供选方案.

显然,在对供选方案进行优劣决策过程中,采用本文给出的IN-DMORPRM算法(即各供选决策对象X_i在全体供选对象间两两比较测定出的相对可能度关系矩阵信息集结融合下的总体比较相对可能度值$\sigma(X_i^{\succ})$ $(i = 1,2,\cdots,n)$大小或者定理4的有关结论)即可做最优决策,此模型算法计算过程简洁,而且能够利用相对可能度值度量任意两个供选决策对象间的比较占优势.

为分析比较,这里采用文献[27-28]的离差最大化赋权算法验算上述案例,其属性赋权公式为

$$w_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{kj})}{\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} d_{\mathrm{IN}}(\tilde{r}_{ij}, \tilde{r}_{kj})},\ i \in N,\ j \in M.$$

假定已统一了决策对象属性值数据间的不同物理量纲信息,按照文献[27-28]提供的离差最大化的多属性决策算法对上述算例的各个候选企业单位实施求解并排序可得 $X_4 \underset{0.562}{\succ} X_2 \underset{0.809}{\succ} X_3 \underset{0.723}{\succ} X_1$,故 X_4 是最适合投资的企业单位.

通过对上述风险投资问题案例的对比分析说明,采用本文给出的基于 IN-DMORPRM 的属性赋权算法与文献[27-28]给出的基于离差最大化赋权算法对属性权重的度量虽不同,但是两种模型算法不但获得了相同优劣次序排定和最优解结果,而且分别利用相对可能度和可能度对任意两供选决策对象间比较占优势进行了度量. 此外,本文通过引入检验相对可能度关系矩阵 $R_{n\times n}$ 一致性的通用公式,给出了一致性检验判断标准,相较以往传统算法更进一步说明了本文所提模型算法的合理性、有效性、实用性和普适性.

4 结　论

本文针对属性权重未知且对方案无偏好的 IN-UMADM 问题,提出了基于区间数型决策对象相对可能度关系模型 (IN-DMORPRM) 的决策方法. 该方法主要包含两方面工作: 一方面,在界定区间数相对可能度关系的基础上,充分研究了其相关性质及理论证明,以此提出了区间数比较相对可能度关系理论; 另一方面,在基于新构造的 IN-DMORPRM 的属性赋权规则下,通过集结与融合计算得到供选决策对象间两两优势比较测定出的相对可能度关系矩阵 $R_{n\times n}$ 信息,以此给出了一种新的区间数型不确定多属性决策对象的相对可能度关系模型算法. 此外,由定理 1 的结论易知所构造的 $R_{n\times n}$ 是一个模糊互补判断矩阵,本文依据文献[14]中给出的互反判断矩阵一致性检验方法,给出了 $R_{n\times n}$ 一致性检验的通用公式,通过这样一致性检验判断不仅说明本文提出的模型试用于特殊案例,也说明了该模型的普适性. 论文整体思路逻辑清晰,模型运算简便,具有较好的操作性和实用性,后续工作将继续围绕相对可能度关系矩阵 $R_{n\times n}$ 开展一致性修正算法的研究,进一步填补和完善解决不确定多属性决策问题的新方法和新途径.

参考文献 (References)

[1] Wu L F, Liu S F, Yang Y J. A model to determine OWA weights and its application in energy technology evaluation[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2015, 30(7): 798-806.

[2] Liu X H, Chu J F, Yin P Z, et al. DEA cross-efficiency evaluation considering undesirable output and ranking priority: A case study of eco-efficiency analysis of coal-fired power plants[J]. Journal of Cleaner Production, 2017, 142: 877-885.

[3] Gong B G, Guo D D, Zhang X Q, et al. An approach for evaluating cleaner production performance in iron and steel enterprises involving competitive relationships[J]. Journal of Cleaner Production, 2017, 142: 739-748.

[4] Wang Y M, Chin K S. A neutral DEA model for cross-efficiency evaluation and its extension[J]. Expert Systems With Applications, 2010, 37(5): 3666-3675.

[5] Yim K K W, Wong S C, Chen A, et al. A reliability-based land use and transportation optimization model[J]. Transportation Research — Part C: Emerging Technologies, 2011, 19(2): 351-362.

[6] Chang T H. Fuzzy VIKOR method: A case study of the hospital service evaluation in Taiwan[J]. Information Sciences, 2014, 271(1): 196-212.

[7] Jin J L, Wei Y M, Zou L L, et al. Risk evaluation of China's natural disaster systems: An approach based on triangular fuzzy numbers and stochastic simulation[J]. Natural Hazards, 2012, 62(1): 129-139.

[8] 马洪坤, 李仲飞. 基于不完全信息竞赛理论的员工激励机制研究[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(10): 2535-2548.
(Ma H K, Li Z F. Staff incentive mechanism based on the contest theory with asymmetric information[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(10): 2535-2548.)

[9] 陈雪龙, 王亚丽. 考虑信息源相关性的多属性应急决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2018, 38(8): 2045-2056.
(Chen X L, Wang Y L. The method for multi-attribute emergency decision-making considering the interdependence between information sources[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2018, 38(8): 2045-2056.)

[10] Wang P, Meng P, Song B W. Response surface method using grey relational analysis for decision making in weapon system selection[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2014, 25(2): 265-272.

[11] 李登峰. 模糊多目标多人决策与对策[M]. 北京：国防工业出版社, 2003: 45-97.
(Li D F. Fuzzy multi-object multi-person decision making and countermeasure[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003: 45-97.)

[12] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京：清华大学出版社, 2004: 38-73.
(Xu Z S. Uncertain multiple attribute decision making methods and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 38-73.)

[13] Xu Z S, Da Q L. A least deviation method toobtain a priority vector of a fuzzy preference relation[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 164(1): 206-216.

[14] Saaty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980: 1-17.

[15] Ju Y B, Wang A H. Extension of VIKOR method for multi-criteria group decision making problem with linguistic information[J]. Applied Mathematical Modeling, 2013, 37(5): 3112-3125.
[16] Sevastianov P. Numerical methods for interval and fuzzy number comparison based on the probabilistic approach and dempster-shafer theory[J]. Information Sciences, 2007, 177(21): 4645-4661.
[17] 苟光磊, 王国胤. 基于置信优势关系粗糙集的近似集动态更新方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(6): 1027-1031.
(Gou G L, Wang G Y. Incremental updating approximations in confidential dominance relation based rough set[J]. Control and Decision, 2016, 31(6): 1027-1031.)
[18] 黄智力, 刘健, 刘思峰, 等. 属性值为区间数的决策对象预期理论模型研究[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(5): 977-981.
(Huang Z L, Liu J, Liu S F, et al. Prospect theory model for multiple criteria decision making alternative with interval number[J]. Systems Engineering and Electronics, 2012, 34(5): 977-981.)
[19] 黄智力, 罗键. 不确定多指标决策问题的相对相似关系法研究[J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(11): 2917-2924.
(Huang Z L, Luo J. Study on relative similarity relation method for uncertain multi-attribute decision making problem[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2015, 35(11): 2917-2924.)
[20] 孙昱, 姚佩阳, 万路军, 等. 基于权重集结和相对优势关系的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(2): 317-322.
(Sun Y, Yao P Y, Wan L J, et al. Multiple attribute decision making method based on weights aggregation and relative dominance relation[J]. Control and Decision, 2017, 32(2): 317-322.)
[21] 张兴贤, 王应明. 一种基于区间信度结构的混合型多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(1): 180-188.
(Zhang X X, Wang Y M. A hybrid multi-attribute decision-making method based on interval belief structure[J]. Control and Decision, 2019, 34(1): 180-188.)
[22] 刘勇, Forrest Jeffrey, 刘思峰, 等. 基于前景理论的多目标灰靶决策方法[J]. 控制与决策, 2013, 28(3): 345-350.
(Liu Y, Jeffrey F, Liu S F, et al. Multi-objective grey target decision-making based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2013, 28(3): 345-350.)
[23] 段金利, 张岐山. 基于基尼系数-交叉效率的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2018, 33(6): 1123-1128.
(Duan J L, Zhang Q S. Multi-attribute decision-making method based on Gini coefficient and cross efficiency[J]. Control and Decision, 2018, 33(6): 1123-1128.)
[24] 王应明, 阙翠平, 蓝以信. 基于前景理论的犹豫模糊TOPSIS多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2017, 32(5): 864-870.
(Wang Y M, Que C P, Lan Y X. Hesitant fuzzy TOPSIS multi-attribute decision method based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2017, 32(5): 864-870.)
[25] 刘小弟, 朱建军, 张世涛, 等. 一种新犹豫模糊符号距离及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(2): 442-450.
(Liu X D, Zhu J J, Zhang S T, et al. A novel hesitant fuzzy signed distance and its application[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(2): 442-450.)
[26] 刘玉敏, 朱峰, 靳琳琳. 基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(4): 861-870.
(Liu Y M, Zhu F, Jin L L. Multi-attribute decision method based on probabilistic hesitant fuzzy entropy[J]. Control and Decision, 2019, 34(4): 861-870.)
[27] 李俊生, 梁伟, 刘雪梅, 等. 基于离差最大化的导弹中段目标威胁度评估[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(5): 164-167.
(Li J S, Liang W, Liu X M, et al. The multi-attribute evaluation of menace of targets in midcourse of ballistic missile based on maximal windage method[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2007, 27(5): 164-167.)
[28] 彭张林, 张强, 李珠瑞, 等. 改进的离差最大化决策模型及其在临近空间多任务规划中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(2): 421-427.
(Peng Z L, Zhang Q, Li Z R, et al. Improved maximizing deviation decision-making model and its application in multi-mission planning of near space system[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2014, 34(2): 421-427.)
[29] 黄智力, 罗键. 不确定多指标决策的可能度规划模型及其应用[J]. 控制与决策, 2017, 32(1): 131-140.
(Huang Z L, Luo J. Possibility degree programming model for uncertain multi-attribute decision making and its application[J]. Control and Decision, 2017, 32(1): 131-140.)
[30] 周宏安, 刘三阳. 基于二次规划与相对优势度的不确定多属性决策法[J]. 系统工程与电子技术，2007, 29(4): 555-562.
(Zhou H A, Liu S Y. Method of uncertain multi-attribute decision-making based on quadratic programming and relative superiority degree[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(4): 555-562.)
[31] 黄智力, 罗键. 属性值为区间数的决策对象相对相似规划模型[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(3): 766-775.
(Huang Z L, Luo J. Relative similarity programming model for decision making objects with multiple criteria values as interval number[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(3): 766-775.)

作者简介

黄智力 (1983−), 男, 讲师, 博士, 从事管理与决策支持系统的理论与技术等研究, E-mail: zhili_huang@hotmail.com;

陈青兰 (1971−), 女, 教授, 博士, 从事战略管理、行为决策等研究, E-mail: blue777@163.com.

(责任编辑：闫 妍)