

控制与决策

Control and Decision

约束非线性系统输入到状态稳定经济型模型预测控制

王青松, 何德峰, 韩平

引用本文:

王青松,何德峰,韩平. 约束非线性系统输入到状态稳定经济型模型预测控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(5): 1137–1144.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1330>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于神经动态优化的非线性系统近似最优跟踪控制](#)

Approximate optimal tracking control for nonlinear systems based on neurodynamic optimization

控制与决策. 2021, 36(1): 97–104 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0056>

[基于反馈无源化的切换非线性系统 \$H_\infty\$ 跟踪控制](#)

Passification-based H_∞ tracking control for a class of switched nonlinear systems

控制与决策. 2021, 36(11): 2729–2734 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0798>

[带输入饱和的不确定非线性系统自适应模糊触发式补偿控制](#)

Adaptive fuzzy trigger compensation control for uncertain nonlinear system with input saturation

控制与决策. 2021, 36(12): 3007–3014 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0907>

[基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制](#)

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm

控制与决策. 2021, 36(1): 173–179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

[基于KRLS的非均匀采样非线性系统辨识](#)

Identification of non-uniformly sampled nonlinear systems based on KRLS

控制与决策. 2021, 36(12): 3049–3055 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0962>

约束非线性系统输入到状态稳定经济型模型预测控制

王青松, 何德峰[†], 韩平

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

摘要: 考虑约束非线性系统经济型最优控制问题, 提出一种关于经济性能输入到状态稳定的经济型模型预测控制 (EMPC) 策略. 通过离线计算系统的最优经济稳态点, 构建关于该稳态点跟踪的稳定最优控制问题. 在此基础上, 利用稳定最优控制问题的最优值函数和关于经济性能函数的松弛量构造 EMPC 优化问题的收缩约束, 再结合不变集原理和输入到状态稳定性 (ISS) 定理, 建立 EMPC 的递推可行性和闭环系统关于经济性能函数的 ISS 结果. 最后, 采用非线性连续搅拌釜控制的仿真比较结果验证所提出策略的有效性.

关键词: 模型预测控制; 非线性系统; 经济优化; 约束控制; 输入到状态稳定性

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1330

引用格式: 王青松, 何德峰, 韩平. 约束非线性系统输入到状态稳定经济型模型预测控制 [J]. 控制与决策, 2022, 37(5): 1137-1144.

Input-to-state stabilizing economic model predictive control of constrained nonlinear systems

WANG Qing-song, HE De-feng[†], HAN Ping

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Considering the economically optimal control problem of constrained nonlinear systems, this paper proposes an economic model predictive control (EMPC) scheme with guaranteed input-to-state stability (ISS) on economic performance. An optimally economic steady-state point of the system is computed offline and then a stabilizing optimal control problem is formulated to track the steady-state point. Moreover, the optimal value function of the stabilizing optimal control problem and the relaxed index of the economic performance are used to design the contractive constraint of the EMPC optimization problem. Then the invariant-set principle and the ISS theorem are combined to establish recursive feasibility of the EMPC and ISS of the closed-loop system on economic performance. Finally, the simulation comparison results on the control of a nonlinear continuously stirred tank reactor are used to verify the effectiveness of the proposed scheme.

Keywords: model predictive control; nonlinear systems; economic optimization; constrained control; input-to-state stability

0 引言

近年来, 经济型模型预测控制 (economic model predictive control, EMPC) 在学术界和工业界获得了广泛关注^[1-8], 它不仅继承了模型预测控制 (model predictive control, MPC) 能显式处理系统约束、多变量和非线性等因素的优点, 而且能在同一个最优控制的框架内同步实现过程动态控制和经济稳态优化控制. 在常规 MPC 中, 目标函数是关于设定稳态点跟踪偏差的正定函数, 如 2 范数意义下的偏差距离函数, 故常规 MPC 也称为跟踪型 MPC; 相应的经济型 MPC

目标函数早期用于描述系统运行的经济成本, 目前泛指关于设定稳态点的非凸、非正定或不可达的任意目标函数^[1-2], 并统称“经济”型目标函数. 尽管经济型 MPC 和常规 MPC 运行机理相同, 但现有研究结果表明, 经济型目标与跟踪型目标具有冲突性, 且经济型目标最优即经济最优性通常导致闭环系统的状态发散和稳定性丢失^[9-10].

由于 EMPC 目标函数通常不是设定稳态点跟踪偏差的正定函数, 基于最优值函数为 Lyapunov 函数的常规 MPC 稳定性结果将不再有效. 因此, 一种保

收稿日期: 2020-09-23; 录用日期: 2021-03-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61773345); 浙江省高校基本科研业务费项目 (RF-C2020003).

[†]通讯作者. E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn.

证EMPC闭环系统稳定性的主要策略是引入基于强对偶性假设的转换目标函数,再应用终端状态等式约束,建立基于转换目标函数的闭环系统渐近稳定性^[11].文献[12]将强对偶性假设放宽为严格耗散性条件,但对非线性系统而言,难以找到满足严格耗散性的转换目标函数^[12-13];进一步,文献[13]采用终端不等式约束和终端代价函数代替终端等式约束;文献[10,14]则提出了广义终端等式约束扩大EMPC闭环系统的吸引域;文献[15]基于能控性假设和大道原理(turnpike principle)^[16],提出了无终端约束非线性EMPC策略,在足够长的预测时域下保证闭环轨迹将收敛于最优经济稳态点的任意小邻域;进一步,作者仅使用能控性假设条件证明了EMPC闭环系统的实践渐近稳定性(practical asymptotic stability)结果^[17],但预测时域的增加将会增大非线性EMPC的在线计算量.

由于经济性目标与稳定性目标的冲突,有学者采用多目标思想设计稳定EMPC策略,如文献[18-19]将经济型和跟踪型目标函数动态加权,再结合系统耗散性条件,建立了暂态过程经济最优性和闭环系统关于最优经济稳态点的渐近稳定性;文献[20]考虑一类有界经济型目标函数,通过优化加权经济型和跟踪型目标函数,建立了闭环系统关于经济性能上界的输入到状态稳定性(Input-to-state stability, ISS).但对于复杂非线性系统,很难标定两类目标函数的加权系数,且在约束条件下权重取值难以有效调节经济性和稳定性目标间的冲突性^[21-22].对此,文献[23-25]采用分层多目标优化思想,构造基于跟踪型目标函数的EMPC稳定性收缩约束,应用终端条件建立闭环系统关于经济最优稳态点的渐近稳定性,但严格的收缩约束增加了EMPC在经济性能等方面的保守性.

本文考虑约束非线性系统的一类有界经济目标函数最优控制问题,提出一种保证递推可行性和经济性能输入到状态稳定的EMPC策略.先离线计算系统最优经济操作稳态点,再定义该稳态点的跟踪型目标函数,进而将EMPC问题分解成经济性和稳定性控制分层优化问题.在此基础上,引入关于经济型目标函数的松弛量和关于跟踪型目标函数的最优值函数,显式构造EMPC优化问题的松弛收缩约束.进一步应用终端条件和ISS定理,建立EMPC优化递推可行性和闭环系统关于经济性能绝对值的ISS结果.相比于现有结果,本文策略放宽了稳定性收缩约束条件,而稳定性结果无需强对偶性或严格耗散性假设,增大了EMPC的适用范围,同时没有采用加权系数调节稳

定性和经济性目标的冲突性,简化了EMPC控制器的设计.最后通过一连续搅拌釜反应器的对比仿真实验验证了本文策略的有效性.

符号说明如下: $R_{\geq 0}$ 和 $I_{\geq 0}$ 分别表示非负实数集和非负整数集, $I_{a,b}$ 表示集合 $\{i \in I_{\geq 0} | a \leq i \leq b, a \in I_{\geq 0}, b \in I_{\geq 0}\}$.给定集合 $S_1 \subseteq R^n$ 和 $S_2 \subseteq R^n$,则 $S_1 \setminus S_2$ 表示集合 $\{x \in R^n | x \in S_1, x \notin S_2\}$.令 x^T 表示向量 $x \in R^n$ 的转置, $\|x\|$ 表示 x 的欧几里得范数.连续函数 $h_1: R_{\geq 0} \rightarrow R_{\geq 0}$ 称为 \mathcal{K} 类函数,系指对 $s > 0$,有 $h_1(s) > 0$,且 $h_1(0) = 0$ 及 h_1 满足严格单调递增;连续函数 $h_2: R_{\geq 0} \rightarrow R_{\geq 0}$ 称为 \mathcal{K}_{∞} 类函数,系指如果它是一个 \mathcal{K} 类函数,且当 $s \rightarrow \infty$ 时,有 $h_2(\infty) \rightarrow \infty$;连续函数 $h_3: R_{\geq 0} \times R_{\geq 0} \rightarrow R_{\geq 0}$ 称为 $\mathcal{K}\mathcal{L}$ 类函数,系指如果 $h_3(s, t)$ 对于任意固定 $t \geq 0$ 是一个 \mathcal{K} 类函数,且对于任意固定 $s > 0$,它关于 t 严格单调递减,同时当 $t \rightarrow \infty$ 时,有 $h_3(s, t) \rightarrow 0$.给定函数 g 和 y ,令 $g \circ y(s)$ 表示复合函数 $g(y(s))$,且对于 $k \in I_{\geq 0}$,有 $g^0(s) = s, g^k(s) = g \circ g^{k-1}(s)$.

1 问题描述

考虑离散时间非线性系统

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), k \in I_{\geq 0}. \quad (1)$$

其中: $x_k \in X \subseteq R^n$ 和 $u_k \in U \subseteq R^m$ 分别表示 k 时刻系统状态和控制变量; $f: R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 是关于 (x, u) 的连续函数.假设系统存在平衡点 (x_s, u_s) 满足 $x_s = f(x_s, u_s)$.进一步,假设系统的状态完全可测.对于任意 $k \in I_{\geq 0}$,定义系统状态和控制满足约束 $(x_k, u_k) \in Z$,其中 $Z = X \times U$ 为凸的紧集,且平衡点 (x_s, u_s) 为其内点.

考虑系统(1)的经济目标函数 $L_e: Z \rightarrow R$,其中 L_e 关于 (x, u) 连续且有界.相应的,定义该系统关于 L_e 的最优经济操作稳态点

$$(x_s^*, u_s^*) := \arg \min_{(x, u) \in Z} \{L_e(x, u) | x = f(x, u)\}. \quad (2)$$

为书写方便,令 $(x_s, u_s) = (x_s^*, u_s^*)$.注意,经济目标函数 L_e 可以是非凸的、不满足系统(1)的耗散性条件,或不是关于 (x_s, u_s) 跟踪偏差的正定函数.由文献[9]可知,极小化这类目标函数所得的控制律无法保证闭环系统的渐近稳定性.因此,本文目标是设计一个经济型最优状态反馈控制律 $u(x)$,使闭环系统在满足系统状态与控制约束条件下,其状态轨迹在 (x_s, u_s) 处相对于经济性能是输入到状态稳定的.本文采用MPC设计该经济型最优控制律.

定义1^[26] 对于系统(1),若对于初始状态 $x_0 \in \Omega$,存在反馈控制律 u 使得对于任意 $k \in I_{\geq 0}$,有 $x_k \in$

Ω , 则称 Ω 为该系统的一个控制不变集.

定义 2^[27] 考虑系统 $x_{k+1} = f(x_k, w_k)$ 及包含稳态点 x_s 为内点的控制不变集 Ω 和输入 w 的上确界 $M > 0$, 如果对于任意 $x_0 \in \Omega$, 存在 \mathcal{KL} 类函数 $\beta : R_{\geq 0} \times R_{\geq 0} \rightarrow R_{\geq 0}$ 和 \mathcal{K} 类函数 γ , 使得不等式

$$\|x_k\| \leq \beta(\|x_0 - x_s\|, k) + \gamma(M), \quad \forall k \in I_{\geq 0} \quad (3)$$

成立, 则称该系统在 Ω 内关于输入 w 具有 ISS.

引理 1^[26] 考虑系统 $x_{k+1} = f(x_k, w_k)$ 和正定的连续函数 $V : R^n \rightarrow R_{\geq 0}$, 如果存在一个包含稳态点 x_s 为内点的控制不变集 Ω , 对 $x_0 \in \Omega$ 和有界输入 w , 函数 $V(x)$ 满足不等式组

$$\begin{cases} \xi_1(\|x - x_s\|) \leq V(x) \leq \xi_2(\|x - x_s\|), \\ V(x^+) - V(x) \leq -\xi_3(\|x - x_s\|) + \delta(\|w\|). \end{cases} \quad (4)$$

其中: ξ_1, ξ_2, ξ_3 为 \mathcal{K}_∞ 类函数, δ 为 \mathcal{K} 类函数, $x^+ = f(x, w)$, 该系统在 Ω 内关于输入 w 具有 ISS, 并称 $V(\cdot)$ 为该系统在 Ω 内的 ISS-Lyapunov 函数.

注 1 由定义 2 可知, 对于持续有界输入, 系统在稳态点附近有界稳定; 对于无输入或衰减输入, 系统在稳态点是渐近稳定的.

2 输入到状态稳定经济预测控制

考虑系统 (1), 定义 k 时刻有限预测时域 N 步内的预测控制序列 $\mathbf{u}_k = \{u_{0|k}, u_{1|k}, \dots, u_{N-1|k}\}$ 和与之对应的预测状态序列 $\mathbf{x}_k = \{x_{1|k}, x_{2|k}, \dots, x_{N|k}\}$, 其中 $x_{i|k} = \varphi(i; x_{0|k}, \mathbf{u}_k)$. 进一步, 定义 N 步经济目标函数

$$J(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \sum_{i=0}^{N-1} L_e(x_{i|k}, u_{i|k}), \quad (5)$$

在每个采样时刻 k , 求解如下有限时域经济型最优控制问题:

$$\mathbf{u}_k^* = \arg \min_{\mathbf{u}_k} J(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k). \quad (6a)$$

$$\text{s.t. } x_{i+1|k} = f(x_{i|k}, u_{i|k}), \quad i \in I_{0:N-1}; \quad (6b)$$

$$(x_{i|k}, u_{i|k}) \in Z, \quad i \in I_{0:N-1}; \quad (6c)$$

$$x_0 = x_k, \quad x_{N|k} \in X_T; \quad (6d)$$

$$V_a(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \leq \eta(\mathbf{x}_k, \alpha) + |L_e(x_{0|k-1}^*, u_{0|k-1}^*)|. \quad (6e)$$

其中 $\mathbf{u}_k^* = \{u_{0|k}^*, u_{1|k}^*, \dots, u_{N-1|k}^*\}$ 为最优控制序列解; 约束 (6d) 为初始条件和终端状态约束, 终端约束集 $X_T \subset X$; 约束 (6e) 为稳定性收缩约束, $V_a : Z \rightarrow R_{\geq 0}$ 和 $\eta : X \times R_{\geq 0} \rightarrow R_{\geq 0}$ 分别为稳定性目标函数的值函数和收缩函数; $|L_e(x_{0|k-1}^*, u_{0|k-1}^*)|$ 表示经济性能函数关于 $k-1$ 时刻初始经济最优点的绝对值, 并设定其在初始 $k=0$ 时等于 0. 如果优化问题 (6) 在

k 时刻具有可行解, 则根据 MPC 滚动优化原理, 经济型 MPC 控制律定义 $u^{\text{mpc}}(x_k) = u_{0|k}^*$, 对应闭环系统为

$$x_{k+1} = f(x_k, u^{\text{mpc}}(x_k)), \quad k \in I_{\geq 0}. \quad (7)$$

为构造优化问题 (6) 的稳定性目标函数和收缩函数, 分别定义关于 (x_s, u_s) 和 x_s 的正定函数 $L_a : Z \rightarrow R_{\geq 0}$ 和 $E_a : X \rightarrow R_{\geq 0}$, 定义稳定性目标函数

$$V_a(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = E_a(x_{N|k}) + \sum_{i=0}^{N-1} L_a(x_{i|k}, u_{i|k}), \quad (8)$$

并在每个采样时刻 k , 求解跟踪型 MPC 优化问题

$$\mathbf{u}_k^o = \arg \min_{\mathbf{u}_k} \{V_a(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) | (6b) \sim (6d)\}, \quad (9)$$

其中 \mathbf{u}_k^o 为优化问题 (9) 的最优解. 将 \mathbf{u}_k^* 和 \mathbf{u}_k^o 分别代入函数 (8) 可得 k 时刻的值函数

$$V_a^*(\mathbf{x}_k) := V_a(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^*), \quad (10)$$

$$V_a^o(\mathbf{x}_k) := V_a(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^o), \quad (11)$$

则收缩函数 η 定义为

$$\eta(\mathbf{x}_k, \alpha) := V_a^o(\mathbf{x}_k) + \alpha[V_a^*(\mathbf{x}_{k-1}) - V_a^o(\mathbf{x}_k)], \quad (12)$$

其中收缩因子 $\alpha \in [0, 1)$ 反映闭环系统暂态性能. 可以验证, 对于 $\forall x \in X$, 有 $\eta(\mathbf{x}_k, \alpha) \geq 0$.

注 2 现有 EMPC 收缩约束没有引入经济目标函数相关的松弛项, 而直接以稳定性目标函数构造严格递减的稳定性收缩约束, 增加了 EMPC 策略的保守性. 本文采用经济目标函数松弛稳定性收缩约束 (6e), 使收缩约束项的单调性随经济目标函数的取值而变: 对于衰减经济目标函数, EMPC 闭环系统渐近稳定; 对于有界的非衰减经济目标函数, 闭环系统有界稳定, 从而增加了 EMPC 策略的使用范围和灵活性.

注 3 收缩因子 α 对本文 EMPC 的作用与现有分层收缩 EMPC 相似, 将有效调节闭环系统经济性和稳定性目标间的冲突, 即 α 取值越小, 值函数 V_a^* 递减越快, 系统过渡时间越短, 经济性能越差.

下面, 先给出 EMPC 控制律设计步骤, 再建立对应闭环系统 (7) 的稳定性结果.

算法 1 松弛收缩 EMPC 算法.

step 1: 设置预测时域 $N > 0$, $\alpha \in [0, 1)$ 、经济目标函数 $L_e(x, u)$ 、正定函数 $L_a(x, u)$ 和 $E_a(x)$; 离线计算终端约束集 X_T ; 令 $k=0$, $\eta(\mathbf{x}_k, \alpha)$ 充分大.

step 2: 求解优化问题 (6), 得到最优控制序列 \mathbf{u}_k^* , 将 \mathbf{u}_k^* 的第 1 个分量作用于系统 (1); 令 $k = k + 1$.

step 3: 测量 k 时刻状态 x_k , 求解优化问题 (9), 得到控制序列 \mathbf{u}_k^o .

step 4: 将 \mathbf{u}_k^* 和 \mathbf{u}_k^o 代入式 (12), 更新收缩函数 $\eta(\mathbf{x}_k, \alpha)$ 和收缩约束 (6e); 返回 step 2.

为建立松弛收缩EMPC算法的递推可行性和闭环系统(7)的稳定性结果,引入一些假设条件:

假设1 对于 $\forall x \in X_T$,存在局部控制律 $u = \mu(x)$,满足 $\mu(x) \in U$ 和 $E_a(f(x, \mu(x))) - E_a(x) \leq -L_a(x, \mu(x))$.

假设2 存在 \mathcal{K}_∞ 类函数 χ 和 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 使得对于 $\forall (x, u), (z, v) \in Z$,有 $\|f(x, u) - f(z, v)\| \leq \chi(\|(x, u) - (z, v)\|)$, $L_a(x, u) \leq \lambda_1(\|x - x_s\|) + \lambda_2(\|u - u_s\|)$ 以及 $\lambda_3(\|x - x_s\|) \leq E_a(x) \leq \lambda_4(\|x - x_s\|)$ 成立.

假设3 最优控制序列 \mathbf{u}_k^* 满足 $u_{i|k}^*(x_s) = u_s$,且存在 \mathcal{K}_∞ 类函数 ψ ,使得对 $\forall x \in X_T$,有 $\|u_{i|k}^*(x) - u_{i|k}^*(x_s)\| \leq \psi(\|x - x_s\|)$ 成立, $i \in I_{0:N-1}$.

假设1为常规MPC稳定性综合理论的终端约束条件^[26];只要系统(1)是连续的,则假设2成立^[10];假设3表明系统(1)在终端约束集 X_T 内是局部能控的^[15-17],而局部控制律 $\mu(x)$ 满足假设3成立.

定义3 考虑初始状态 $x_0 = x_{0|k} \in X$,如果系统(1)存在可行控制序列 \mathbf{u}_k 满足约束条件(6b)~(6d),则称 x_0 为可行初始状态.包含全体可行初始状态的集合 X_F 定义为系统(1)的可行初始状态集.

定理1 考虑约束系统(1),如果假设1成立,则对于任意给定收缩因子 $\alpha \in [0, 1)$,优化问题(6)在不变集 X_F 内具有递推可行性.

证明 令优化问题(6)在 $k-1$ 时刻初始状态 $x_{k-1} \in X_F$ 以及对应的最优控制序列 \mathbf{u}_{k-1}^* ,构造 k 时刻的优化问题(9)的一个控制序列

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \{u_{1|k-1}^*, \dots, u_{N-1|k-1}^*, \mu(x_{N|k-1}^*)\}, \quad (13)$$

其中 $x_{N|k-1}^*$ 是对应于 \mathbf{u}_{k-1}^* 的终端预测状态, $x_{N|k-1}^* \in X_T$.由常规MPC稳定性结果^[26]易知,控制序列(13)满足约束(6b)~(6d),从而优化问题(9)在 k 时刻具有可行解.令优化问题(9)在 k 时刻的最优解为 \mathbf{u}_k^o ,则有

$$V_a(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^o) \leq V_a(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{u}}_k). \quad (14)$$

结合 k 时刻的可行解(13)和假设1,有

$$\begin{aligned} V_a^o(\mathbf{x}_k) - V_a^*(\mathbf{x}_{k-1}) &\leq \\ V_a(\mathbf{x}_k, \hat{\mathbf{u}}_k) - V_a^*(\mathbf{x}_{k-1}) &= \\ E_a(x_{N|k}) + L_a(x_{N|k-1}^*, \mu(x_{N|k-1}^*)) - & \\ E_a(x_{N|k-1}^*) - L_a(x_{0|k-1}^*, u_{0|k-1}^*) &\leq \\ -L_a(x_{0|k-1}^*, u_{0|k-1}^*), & \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $x_{N|k} = f(x_{N|k-1}^*, \mu(x_{N|k-1}^*))$.由不等式(15)得

$$V_a^*(\mathbf{x}_{k-1}) - V_a^o(\mathbf{x}_k) \geq 0. \quad (16)$$

将不等式(16)代入收缩函数(12),并考虑正定的

值函数(11),可得 $\eta(\mathbf{x}_k, \alpha) \geq 0$.进一步将 \mathbf{u}_k^o 代入式(6e)左边项,则对于任意 $\alpha \in [0, 1)$,总有 $V_a(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^o) \leq V_a^o(\mathbf{x}_k) + \alpha[V_a^*(\mathbf{x}_{k-1}) - V_a^o(\mathbf{x}_k)] = \eta(\mathbf{x}_k, \alpha)$ 成立.显然,在式(6e)右边加上一个恒为正的松弛项依旧满足,因此 \mathbf{u}_k^o 是优化问题(6)的一个可行控制序列.考虑优化问题(6)初始条件,并结合定义3可知 $x_k \in X_F$,即 X_F 是闭环系统(7)的一个不变集. \square

注4 定理1的证明过程包括 \mathbf{u}_k^* 和 \mathbf{u}_k^o 两个控制序列,分别对应经济性优化问题(6)和稳定性优化问题(9)的最优解.对比两个优化问题可知, \mathbf{u}_k^* 是式(9)的可行解,但通常不是最优解;同理, \mathbf{u}_k^o 是式(6)的可行解,但不是最优解.此外,由式(6)在 $k-1$ 时刻的最优解平移构造的控制序列(13)是式(9)的可行解,但由不等式(14)可知,序列(13)无法保证收缩约束(6e)成立,故序列(13)不一定是式(6)的可行解.

定理2 如果假设1~假设3成立,且优化问题(6)在初始时刻可行,给定收缩因子 $\alpha \in [0, 1)$,则闭环系统(7)在不变集 X_F 内关于经济目标函数是输入到状态稳定的.

证明 考虑由式(10)定义的值函数 $V_a^*(\mathbf{x})$,令其为闭环系统(7)的备选ISS-Lyapunov函数.因为函数 $L_a(x, u)$ 和 $E_a(x)$ 分别关于 (x_s, u_s) 和 x_s 正定,故有

$$V_a^*(\mathbf{x}_k) \geq L_a(x_{0|k}^*, u_{0|k}^*) \geq \rho_1(\|x - x_s\|), \quad (17)$$

其中 ρ_1 为 \mathcal{K}_∞ 类函数.

为寻求 $V_a^*(x_k)$ 的上界,考虑以下两种情况:

1) 当 $x_k \in X_F \setminus X_T$ 时,令 $L_{\max} = \max\{L_a(x, u) | (x, u) \in Z\}$ 以及 $E_{\max} = \max\{E_a(x) | x \in X\}$,则 $V_a^*(\mathbf{x}_k) \leq E_{\max} + NL_{\max}$.为书写方便,令 $E_{\max} + NL_{\max} =: V_{\max}$,即 $V_a^*(\mathbf{x}_k) \leq V_{\max}$.

2) 当 $x_k \in X_T$ 时,由假设2和假设3可知

$$\begin{aligned} V_a^*(\mathbf{x}_k) &\leq \\ \lambda_4(\|x_{N|k}^* - x_s\|) + & \\ \sum_{i=0}^{N-1} [\lambda_1(\|x_{i|k}^* - x_s\|) + \lambda_2(\|u_{i|k}^* - u_s\|)] = & \\ \lambda_4(\|f(x_{N-1|k}^*, u_{N-1|k}^*) - f(x_s, u_s)\|) + & \\ \lambda_1(\|x_{0|k}^* - x_s\|) + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_2(\|u_{i|k}^* - u_s\|) + & \\ \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_1(\|f(x_{i|k}^*, u_{i|k}^*) - f(x_s, u_s)\|) \leq & \\ \lambda_4 \circ \alpha_N(\|x_k - x_s\|) + N\lambda_2 \circ \psi(\|x_k - x_s\|) + & \\ \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_1 \circ \alpha_i(\|x_k - x_s\|) := & \\ \rho_2(\|x_k - x_s\|). & \end{aligned} \quad (18)$$

其中: $\alpha_i (i \in I_{0:N})$ 和 ρ_2 为 \mathcal{K}_∞ 类函数, 且 $\alpha_0(g) = g$ 以及 $\alpha_i(g) = \chi \circ \alpha_{i-1}(g) + \chi \circ \psi, i \in I_{1:N}$.

综合上述两种情况, 当 $x_k \in X_F \setminus X_T$ 时, 若 $\rho_2(\|x_k - x_s\|) \geq V_{\max}$, 则

$$V_a^*(x_k) \leq \rho_2(\|x_k - x_s\|); \quad (19)$$

否则, 选择常数 c 满足 $c\rho_2(\|x_k - x_s\|) \geq V_{\max}$. 令 $\rho_3(g) = \max\{1, c\}\rho_2(g)$, 有

$$V_a^*(x_k) \leq \rho_3(\|x_k - x_s\|). \quad (20)$$

联立式(17)和(20), 整理得

$$\rho_1(\|x_k - x_s\|) \leq V_a^*(x_k) \leq \rho_3(\|x_k - x_s\|). \quad (21)$$

令 u_{k-1}^* 和 u_k^* 分别是优化问题(6)在 $k-1$ 和 k 时刻的最优控制序列, 则沿着闭环系统轨迹对值函数(10)做差分运算, 并结合式(6e)和(15), 整理得

$$\begin{aligned} V_a^*(x_k) - V_a^*(x_{k-1}) &\leq \\ \eta(x_k, \alpha) + |L_e(x_{0|k-1}^*, u_{0|k-1}^*)| - V_a^*(x_{k-1}) &= \\ (1-\alpha)[V_a^*(x_k) - V_a^*(x_{k-1})] + |L_e(x_{0|k-1}^*, u_{0|k-1}^*)| &\leq \\ (\alpha-1)[L_a(x_{0|k-1}^*, u_{0|k-1}^*)] + |L_e(x_{0|k-1}^*, u_{0|k-1}^*)|. & \end{aligned} \quad (22)$$

注意到 $\alpha \in [0, 1)$ 及 $L_a(x, u)$ 的正定性, 故存在 \mathcal{K}_∞ 类函数 π 和 \mathcal{K} 类函数 τ_2 , 使得不等式

$$\begin{aligned} V_a^*(x_k) - V_a^*(x_{k-1}) &\leq \\ -\pi(\|x - x_s\|) + \tau_2(|L_e(x_{0|k-1}^*, u_{0|k-1}^*)|) & \end{aligned} \quad (23)$$

成立. 联立式(21)和(23), 可知函数 $V_a^*(x)$ 为闭环系统(7)的一个 ISS-Lyapunov 函数, 则由引理 1 可得, 闭环系统(7)在不变集 X_F 内关于经济目标函数是输入到状态稳定的. \square

3 实例仿真

考虑如下非线性连续搅拌釜反应器 (CSTR) 模型:

$$\begin{aligned} \dot{C}_A &= \frac{q}{V}(C_{Af} - C_A) - k_0 C_A e^{-\frac{E}{RT}}, \\ \dot{T} &= \frac{q}{V}(T_f - T) - \frac{\Delta H}{\rho C_p} k_0 C_A e^{-\frac{E}{RT}} + \\ &\quad \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - T). \end{aligned} \quad (24)$$

其中: C_A 、 T 和 T_c 分别表示反应物浓度 (mol/L)、反应器温度 (K) 以及冷却剂温度 (K), 模型参数 $q = 100 \text{ L/min}$, $C_{Af} = 1 \text{ mol/L}$, $UA = 5 \times 10^4 \text{ J/(min}\cdot\text{K)}$, $\rho = 1000 \text{ g/L}$, $C_p = 0.239 \text{ J/(g}\cdot\text{K)}$, $E/R = 8750 \text{ K}$, $k_0 = 7.2 \times 10^{10} \text{ min}^{-1}$, $V = 100 \text{ L}$, $T_f = 350 \text{ K}$ 和 $\Delta H = -5 \times 10^4 \text{ J/mol}$. 选择状态变量 $x = [C_A, T]^T$

和控制输入 $u = T_c$, 定义状态和控制约束

$$X = [0, 1] \times [300, 370], U = [280, 350]. \quad (25)$$

为验证本文策略的有效性, 选择两类有界经济目标函数: 有界持续波动经济目标函数和收敛经济目标函数. 根据经济目标函数的特点将仿真实验分成两组, 并在仿真实验与文献[23]提出的 EMPC 策略做比较, 以验证本文策略的优越性. 两组实验中取采样间隔 $T_s = 0.1 \text{ min}$, 采用欧拉法离散系统(24).

3.1 仿真实验 1

通常 CSTR 反应温度直接影响产品质量和产量, 进而影响生产经济效益. 在 CSTR 运行过程中, 由于原料成本、生产需求、市场波动等因素, 经济性能指标通常会频繁波动; 在实际生产过程中, 需要根据经济性能指标合理调节冷却剂温度, 将反应温度稳定在期望区域, 降低 CSTR 能源消耗. 假设 CSTR 经济性能指标由如下经济目标函数描述:

$$L_{1e}(x, u) = 0.4 \sin(0.75(u + (x_2 - 350)^2)). \quad (26)$$

将式(26)代入优化问题(2), 求解可得最优经济稳态点 $(x_{1s}^*, u_{1s}^*) = (0.6423, 341.9923, 302.3964)$. 定义

$$\begin{aligned} L_a(x, u) &= (x - x_s^*)^T Q (x - x_s^*) + R(u - u_s^*)^2, \\ E_a(x) &= (x - x_s^*)^T P_1 (x - x_s^*). \end{aligned} \quad (27)$$

其中: $Q = \text{diag}\{1, 1\}$, $R = 0.1$. 在 (x_{1s}^*, u_{1s}^*) 点对离散化 CSTR 模型线性化, 并通过 Matlab 命令 `dlqr` 求解关于 L_a 的二次型最优控制问题, 得正定对称矩阵 P_1 和局部控制律增益矩阵 K_1 为

$$P = \begin{bmatrix} 4921.9 & 85.3 \\ 85.3 & 2.5 \end{bmatrix}, K_1 = [29.8588, 0.7517]. \quad (28)$$

再根据假设 1 离线计算 $X_{1T} = \{x \in R^2 : E_a(x) \leq 63.13\}$ 和局部控制律 $\mu_1(x) = K_1(x - x_{1s}^*) + u_{1s}^*$.

选取预测时域 $N = 7$, 仿真步长 $T_{\text{sim}} = 100$, 仿真初始状态 $x_0 = (0.7, 340)$, 仿真结果如图 1 和图 2 所示. 其中: 实线对应 $\alpha = 0$ 的仿真结果, 点划线对应 $\alpha = 0.3$ 的仿真结果, 虚线对应 $\alpha = 0.7$ 的仿真结果, 点线对应 $\alpha = 0.9$ 的仿真结果. 图 1 表示闭环系统的状态轨迹和控制输入曲线, 可以看出, 对于有界波动经济目标函数(26)和不同收缩因子 α , 闭环系统都在点 (x_{1s}^*, u_{1s}^*) 附近有界稳定; 图 2 给出了最优值函数 V_a^* 和经济目标函数 L_{1e} 的实时曲线, 可以看出函数 V_a^* 单调递减, 而 L_{1e} 处于有界波动状态. 进一步分析图 1 和图 2 可知, 增大收缩因子 α , 值函数 V_a^* 单调递减速度减慢, 闭环状态轨迹到达 x_{1s}^* 的有界稳定范围(状态 x_2 的偏差率小于 0.15%)的时间增加.

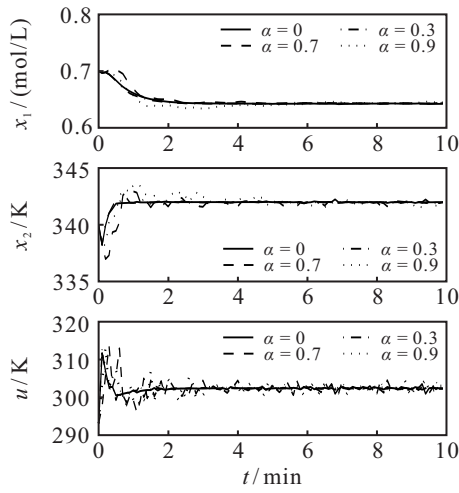


图1 闭环状态轨迹和控制输入曲线(波动)

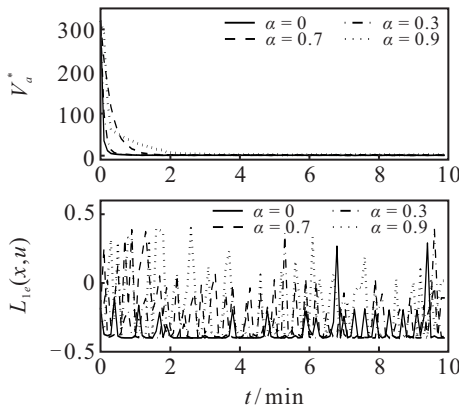


图2 最优值函数和波动经济目标函数曲线(波动)

下面考虑CSTR闭环系统的平均经济性能. 定义 T_{sim} 内的平均经济性能指标

$$J_a = \frac{\sum_{k=0}^{T_{sim}} |L_e(x_k, u^{empc}(x_k))|}{T_{sim}} \quad (29)$$

表1列出了在不同 α 下闭环系统过渡到有界稳定区域的暂态时间 T_{tr} 和平均经济性能. 分析表1结果可知,收缩因子 α 与系统暂态时间成正比,与平均经济性能成反比,验证了经济性目标与稳定性目标的冲突特性,但设计者可以通过调节收缩因子 α 来权衡该冲突性,提高了EMPC应用的灵活性.

表1 平均经济性能及暂态时间

经济性能函数	L_{1e}		L_{2e}	
	$J_{1\alpha}$	T_{1tr}	$J_{2\alpha}$	T_{2tr}
$\alpha = 0$	0.3576	22	0.1175	19
$\alpha = 0.3$	0.3290	25	0.1174	22
$\alpha = 0.7$	0.2892	28	0.1171	26
$\alpha = 0.9$	0.2596	30	0.1170	29

3.2 仿真实验2

本实验不考虑原料量、市场需求等波动因素对经济性能指标的影响,定义如下经济目标函数:

$$L_{2e}(x, u) = 0.04(u + (x_2 - 350)^2)e^{-k/10}, \quad (30)$$

其中 k 为采样时刻. 计算最优经济稳态点 $(x_{2s}^*, u_{2s}^*) = (0.4973, 350.1532, 299.9547)$. 同仿真实验1方法,求解正定对称矩阵 P_2 和局部控制律增益矩阵 K_2 ,有

$$P_2 = \begin{bmatrix} 9934.2 & 179.1 \\ 179.1 & 4.2 \end{bmatrix}, K_2 = [60.1449, 1.3776]. \quad (31)$$

终端约束集 $X_{2T} = \{x \in R^2 : E_a(x) \leq 63.02\}$ 和局部控制律为 $\mu_2(x) = K_2(x - x_{2s}^*) + u_{2s}^*$. 取实验1仿真环境,运行结果如图3和图4所示. 其中,实线对应 $\alpha = 0$ 的仿真结果,点划线对应 $\alpha = 0.3$ 的仿真结果;虚线对应 $\alpha = 0.7$ 的仿真结果,点线对应 $\alpha = 0.9$ 的仿真结果;上下两条虚直线对应控制量约束上下限. 分析图3和4可知,随着经济目标函数 L_{2e} 最终收敛到零,式(6e)松弛项也逐渐衰减至零,闭环系统渐近稳定到稳态 x_{2s}^* ;而值函数 V_a^* 虽然最终收敛至零,但不是严格单调递减的,这主要是收缩约束(6e)引入了松弛项. 进一步考虑收缩因子对经济性和稳定性目标的影响,根据式(29)计算 T_{sim} 内的平均经济性能,如表1所示.

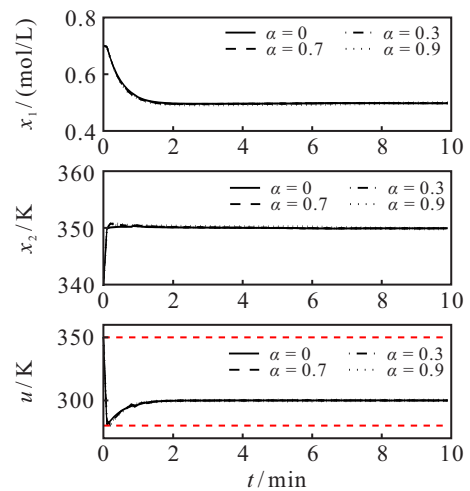


图3 闭环状态轨迹和控制输入曲线(收敛)

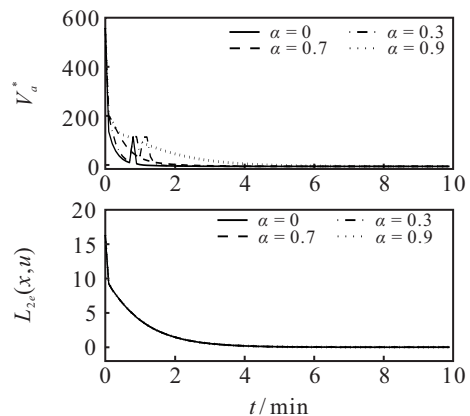


图4 最优值函数和收敛经济目标函数曲线(收敛)

分析表1及图3和图4结果,可得出与实验1相同结论,即 α 值越小,闭环系统暂态时间越短,但平均经济性能越差;反之, α 值越大,平均经济性能越好,但闭环系统暂态时间越长.

下面对比现有收缩EMPC策略^[23]. 记本文策略为Our-EMPC,收缩约束无松弛的EMPC策略为NR-EMPC,在相同 $\alpha = 0.9$ 和仿真环境下运行结果如图5和图6所示,其中实线为Our-EMPC运行结果,虚线为NR-EMPC运行结果. 分析图5和图6可知,两种策略都能保证CSTR状态轨迹渐近稳定至稳态 x_{2s}^* 处,且在任意时刻满足状态和控制量约束,但两种策略驱动系统收敛的路径不同,即NR-EMPC闭环系统在暂态响应过程中出现震荡现象. 这主要是因为当 α 值越趋于1,在不引入松弛项的情况下,最优值函数 V_a^* 递减速度越慢,从而导致闭环系统暂态性能变差. 相反,Our-EMPC闭环系统的收敛时间明显小于NR-EMPC闭环系统,加快了闭环系统的暂态响应.

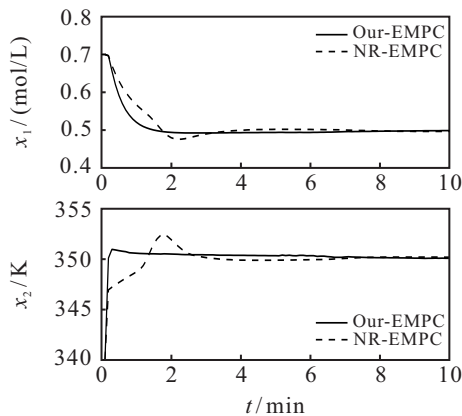


图5 闭环状态轨迹

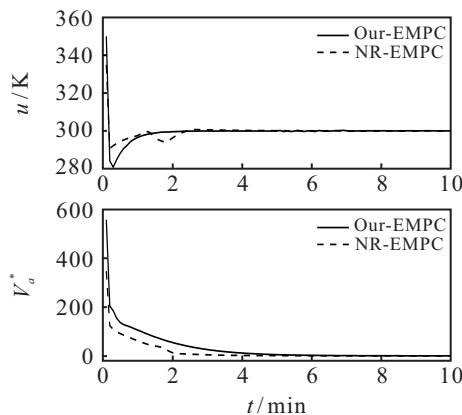


图6 控制输入和最优值函数曲线

4 结论

本文考虑约束非线性系统的一类有界经济性能指标优化最优控制问题,提出了一种具有稳定性保证的收缩松弛EMPC策略. 先将经济性和稳定性目标

分解为双层最优控制目标,利用稳定目标函数的最优值函数和基于经济目标函数的松弛项构建EMPC优化问题的收缩约束. 在此基础上,采用MPC稳定性终端条件和局部能控性假设,建立了闭环系统最优经济稳态点关于经济性能函数的ISS结果. 非线性CSTR的仿真对比实验结果验证了本文策略的有效性和优越性. 考虑到实际系统总是存在各种不确定扰动,本文后续将进一步研究基于ISS的不确定非线性系统鲁棒EMPC策略.

参考文献(References)

- [1] Ellis M, Durand H, Christofides P D. A tutorial review of economic model predictive control methods[J]. Journal of Process Control, 2014, 24(8): 1156-1178.
- [2] Wang R G, Manchester I R, Bao J. Distributed economic MPC with separable control contraction metrics[J]. IEEE Control Systems Letters, 2017, 1(1): 104-109.
- [3] Risbeck M J, Rawlings J B. Economic model predictive control for time-varying cost and peak demand charge optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(7): 2957-2968.
- [4] Ellis M, Christofides P D. Integrating dynamic economic optimization and model predictive control for optimal operation of nonlinear process systems[J]. Control Engineering Practice, 2014, 22: 242-251.
- [5] Gutekunst J, Bock H G, Potschka A. Economic NMPC for averaged infinite horizon problems with periodic approximations[J]. Automatica, 2020, 117: 109001.
- [6] Clarke W C, Manzie C, Brear M J. Hierarchical economic MPC for systems with storage states[J]. Automatica, 2018, 94: 138-150.
- [7] Watkins N J, Nowzari C, Pappas G J. Robust economic model predictive control of continuous-time epidemic processes[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(3): 1116-1131.
- [8] Alessandretti A, Aguiar A P, Jones C N. On convergence and performance certification of a continuous-time economic model predictive control scheme with time-varying performance index[J]. Automatica, 2016, 68: 305-313.
- [9] Müller M A, Angeli D, Allgöwer F, et al. Convergence in economic model predictive control with average constraints[J]. Automatica, 2014, 50(12): 3100-3111.
- [10] Fagiano L, Teel A R. Generalized terminal state constraint for model predictive control[J]. Automatica, 2013, 49(9): 2622-2631.
- [11] Diehl M, Amrit R, Rawlings J B. A Lyapunov function for economic optimizing model predictive control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(3):

- 703-707.
- [12] Angeli D, Amrit R, Rawlings J B. On average performance and stability of economic model predictive control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(7): 1615-1626.
- [13] Amrit R, Rawlings J B, Angeli D. Economic optimization using model predictive control with a terminal cost[J]. *Annual Reviews in Control*, 2011, 35(2): 178-186.
- [14] Ferramosca A, Limon D, Camacho E F. Economic MPC for a changing economic criterion for linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(10): 2657-2667.
- [15] Grüne L. Economic receding horizon control without terminal constraints[J]. *Automatica*, 2013, 49(3): 725-734.
- [16] McKenzie L W. Turnpike theory[J]. *Econometrica*, 1976, 44(5): 841.
- [17] Grüne L, Stieler M. Asymptotic stability and transient optimality of economic MPC without terminal conditions[J]. *Journal of Process Control*, 2014, 24(8): 1187-1196.
- [18] Imsland L, Maree J P. Performance and stability for combined economic and regulatory control in MPC[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2014, 47(3): 639-645.
- [19] Maree J P, Imsland L. Combined economic and regulatory predictive control[J]. *Automatica*, 2016, 69: 342-347.
- [20] Alessandretti A, Aguiar A P, Jones C N. An input-to-state-stability approach to economic optimization in model predictive control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(12): 6081-6093.
- [21] Vallerio M, van Impe J, Logist F. Tuning of NMPC controllers via multi-objective optimisation[J]. *Computers & Chemical Engineering*, 2014, 61: 38-50.
- [22] Anilkumar M, Padhiyar N, Moudgalya K. Lexicographic optimization based MPC: Simulation and experimental study[J]. *Computers & Chemical Engineering*, 2016, 88: 135-144.
- [23] 何德峰. 约束非线性系统稳定经济模型预测控制[J]. *自动化学报*, 2016, 42(11): 1680-1690.
(He D F. Stabilizing economic model predictive control of constrained nonlinear systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(11): 1680-1690.)
- [24] He D F, Sun J, Yu L. Economic MPC with a contractive constraint for nonlinear systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(18): 4072-4087.
- [25] Wang Z M, Hu G Q. Economic MPC of nonlinear systems with nonmonotonic Lyapunov functions and its application to HVAC control[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(6): 2513-2527.
- [26] Magni L, Raimondo D M, Scattolini R. Regional input-to-state stability for nonlinear model predictive control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(9): 1548-1553.
- [27] Jiang Z P, Wang Y. Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2001, 37(6): 857-869.

作者简介

王青松(1997—),男,硕士生,从事非线性系统经济模型预测控制的研究, E-mail: 2111903053@zjut.edu.cn;

何德峰(1979—),男,教授,博士生导师,从事智能系统预测控制理论与应用等研究, E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn;

韩平(1996—),男,硕士生,从事非线性系统经济模型预测控制的研究, E-mail: hanping@zjut.edu.cn.

(责任编辑: 孙艺红)