

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于两相幂次趋近律的航天器姿态控制

陈强, 朱健宏, 陶玫玲

引用本文:

陈强, 朱健宏, 陶玫玲. 基于两相幂次趋近律的航天器姿态控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(5): 1145–1152.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1304>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 输入饱和的充液航天器抗干扰有限时间滑模控制

Anti-disturbance finite-time sliding mode control for liquid-filled spacecraft with input saturation

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1078–1086 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0820>

#### 考虑加速度约束的终端角度约束滑模制导律设计

Sliding-mode guidance law with acceleration and angle constraints

*控制与决策*. 2021, 36(10): 2511–2516 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0284>

#### 多航天器系统分布式固定时间输出反馈姿态协同跟踪控制

Distributed fixed-time output feedback attitude coordination tracking control for multiple rigid spacecraft

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1049–1058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0968>

#### 直线同步电动机磁悬浮系统的自适应模糊滑模控制

Adaptive fuzzy sliding mode control for magnetic suspension system of linear synchronous motor

*控制与决策*. 2021, 36(3): 693–698 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0774>

#### 航天器输入受限的鲁棒自适应姿态跟踪控制

Robust adaptive attitude tracking control of spacecraft with constrained inputs

*控制与决策*. 2021, 36(9): 2297–2304 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0013>

# 基于两相幂次趋近律的航天器姿态控制

陈 强<sup>†</sup>, 朱健宏, 陶玫玲

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310023)

**摘要:** 针对带有系统不确定性的航天器姿态控制系统, 提出一种基于两相幂次趋近律的姿态控制方法. 在趋近律设计中, 根据滑模变量值的变化调整趋近律的幂次值, 确保滑模变量在远离滑模面和接近滑模面时均具有更快的收敛速度. 同时, 通过分别计算两个趋近阶段的收敛时间, 可直接获得较为准确的滑模变量收敛时间表达式. 此外, 在控制器设计中采用鲁棒项补偿未知不确定性与外界扰动的影响, 从而增强系统的鲁棒性. 最后, 基于 Lyapunov 函数方法证明系统的稳定性, 并给出仿真对比验证所提控制方法的有效性.

**关键词:** 航天器; 姿态控制; 两相幂次趋近律; 滑模控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1304

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 陈强, 朱健宏, 陶玫玲. 基于两相幂次趋近律的航天器姿态控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(5): 1145-1152.

## Two-phase power reaching law-based spacecraft attitude control

CHEN Qiang<sup>†</sup>, ZHU Jian-hong, TAO Mei-ling

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract:** A two-phase power reaching law-based attitude control scheme is proposed for spacecrafts with system uncertainties. In the presented reaching law design, the power value is adjusted according to the change of sliding mode variable value, such that the fast convergence rate of the sliding mode variable can be achieved when it is far away from and approaching to the equilibrium. Meanwhile, a relatively accurate convergence time expression of the sliding mode variable is obtained directly by calculating two convergence time in different reaching stages, respectively. A robust term is adopted in the control design to compensate for the effect of uncertainties and disturbances, and thus the system robustness is enhanced. Finally, the stability of the system is analyzed based on the Lyapunov stability synthesis, and the effectiveness of the proposed control scheme is verified by comparative simulations.

**Keywords:** spacecraft; attitude control; two-phase power reaching law; sliding mode control

## 0 引言

航天器姿态控制是航天技术中的一个重要问题, 常见的姿态控制方法主要包括自抗扰控制<sup>[1]</sup>、自适应控制<sup>[2-3]</sup>、鲁棒控制<sup>[4-5]</sup>和滑模控制<sup>[6-7]</sup>等. 其中, 滑模控制具有收敛快速、鲁棒性强等优点, 已被广泛应用于诸多运动控制领域. 然而, 抖振问题是滑模控制中不可避免的重要问题, 高频抖振将影响控制精度和系统稳定性. 目前已有的削弱滑模抖振方法主要包括边界层方法<sup>[8]</sup>、智能控制方法<sup>[9-10]</sup>、干扰观测器方法<sup>[11]</sup>以及趋近律方法<sup>[12]</sup>等.

文献[13]将趋近律主要分为等速趋近律、指数趋近律和幂次趋近律. 相比等速趋近律, 指数趋近律

具有较快的收敛速度, 但当增益过大时, 容易引起抖振问题. 而幂次趋近律在一定程度上能削弱抖振, 但在远离滑模面时收敛速度较慢. 针对航天器姿态控制问题, 目前已有较多趋近律控制的相关研究, 然而, 为削弱抖振影响, 一般需减小增益, 导致趋近速度变慢<sup>[14-16]</sup>. 文献[17]基于快速幂次趋近律设计了一种自适应非奇异终端滑模容错控制方法, 快速项的加入弥补了幂次趋近律远离滑模面时速度的不足, 最终实现航天器姿态的有限时间跟踪; 文献[18]通过在指数趋近律设计中加入包含系统估计项的系数, 能够同时提高滑模变量收敛速度以及削弱系统状态趋于零时的抖振; 文献[19]通过在幂次项系数中增加反余切辅

收稿日期: 2020-09-17; 录用日期: 2021-02-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61973274, 62073291); 浙江省自然科学基金项目(LY17F030018, LZ22F030007); 高端装备先进感知与智能控制教育部重点实验室开放课题(GDSC202010).

责任编辑: 王燕舞.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: sdnjchq@zjut.edu.cn.

助函数,提出了一种变增益快速幂次趋近律,使得滑模变量在初始阶段收敛速度较快,而在接近滑模面时减小控制器抖振.然而,以上方法中滑模变量的收敛时间受系统初始状态影响较大,其收敛速度有待进一步提高.文献[20]对双幂次趋近律进行了收敛时间分析,通过仿真验证了双幂次趋近律相比传统趋近律具有更快的收敛速度和更好的运动品质;文献[21]在文献[20]的基础上进一步指出双幂次趋近律具有固定时间收敛性质,并给出了收敛时间上界;文献[22]提出了一种复合快速趋近律形式,能够实现滑模变量的固定时间收敛,且收敛时间受初始状态影响较小;文献[23]提出了一种多幂次趋近律形式,通过在双幂次趋近律基础上增加第3个幂次项,并在趋近过程中不断调节幂次项系数,以提高滑模变量的收敛速度,然而该趋近律表达形式相对复杂,待调节参数较多;近来,文献[24]提出了一种新型两相吸引子形式,并在多智能体控制系统中进行了收敛性分析和仿真验证,然而该方法需要系统模型和参数完全已知,从而限制了其进一步推广和应用.

基于上述讨论,本文针对航天器姿态控制系统,提出一种基于两相幂次趋近律的滑模控制方法.根据不同收敛阶段滑模变量值的变化范围调整趋近律的幂次值,使得滑模变量在不同收敛阶段均具有较快的收敛速度.与现有的双幂次等趋近律形式相比,两相幂次趋近律方法能够直接获得较为准确的滑模变量收敛时间表达式,有利于根据实际需要设置和调节控制器参数.同时,在控制器设计中采用鲁棒项补偿未知不确定性与外界扰动的影响,增强系统的鲁棒性.最后,基于Lyapunov函数方法证明系统的稳定性,并通过仿真对比验证所提控制方法的有效性.

## 1 问题描述

本文采用的四元数建模的航天器姿态运动学和动力学方程为

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}q_v^T \Omega, \quad (1)$$

$$\dot{q}_v = \frac{1}{2}(q_0 I_3 + q_v^\times) \Omega, \quad (2)$$

$$J\dot{\Omega} = -\Omega^\times J\Omega + u + d. \quad (3)$$

其中:单位姿态四元数  $q = [q_0, q_v^T]^T \in R^{4 \times 1}$ ,  $q_0$  为标量部分,  $q_v = [q_1, q_2, q_3]^T$  为向量部分,满足  $q_0^2 + \|q_v\|^2 = 1$ ;  $I_3 \in R^{3 \times 3}$  为单位矩阵;  $\Omega \in R^{3 \times 1}$  为航天器在机体坐标系下的角速度;  $J \in R^{3 \times 3}$  为航天器的惯性矩阵;  $u \in R^{3 \times 1}$  为航天器的控制力矩;  $d \in R^{3 \times 1}$  为有界的外界扰动;  $q_v^\times \in R^{3 \times 3}$  和  $\Omega^\times \in R^{3 \times 3}$  分

别为关于  $q_v$  和  $\Omega$  的反对称矩阵.对于任意向量  $a = [a_1, a_2, a_3]^T$ ,  $a^\times$  的表达式为

$$a^\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

航天器的期望姿态运动学方程可表示为

$$\dot{q}_{d0} = -\frac{1}{2}q_{dv}^\times \Omega_d, \quad (5)$$

$$\dot{q}_{dv} = \frac{1}{2}(q_{d0} I_3 + q_{dv}^\times) \Omega_d. \quad (6)$$

其中:期望姿态轨迹  $q_d = [q_{d0}, q_{dv}^T]^T \in R^{4 \times 1}$ ,  $q_{d0}$  为标量部分,  $q_{dv}$  为向量部分,满足  $q_{d0}^2 + \|q_{dv}\|^2 = 1$ ;  $\Omega_d \in R^{3 \times 1}$  为航天器在惯性坐标系下的期望角速度.

航天器(1)~(3)的轨迹跟踪误差和角速度误差<sup>[25]</sup>分别表示为

$$e_0 = q_{dv}^T q_v + q_0 q_{d0}, \quad (7)$$

$$e_v = q_{d0} q_v - q_{dv}^\times q_v - q_0 q_{dv}, \quad (8)$$

$$e_\Omega = \Omega - C \Omega_d. \quad (9)$$

其中:  $e = [e_0, e_v^T]^T \in R^{4 \times 1}$  为姿态跟踪误差,  $e_0$  为标量部分,  $e_v = [e_1, e_2, e_3]^T$  为向量部分,  $e_\Omega = [e_{\Omega 1}, e_{\Omega 2}, e_{\Omega 3}]^T$  为航天器姿态角速度误差;  $C$  为惯性坐标系到机体坐标系的旋转矩阵,其表达式为

$$C = (1 - 2e_v^T e_v) I_3 + 2e_v e_v^T - 2e_0 e_v^\times. \quad (10)$$

由式(1)~(10)可得航天器姿态误差方程

$$\dot{e}_0 = -\frac{1}{2}e_v^T e_\Omega, \quad (11)$$

$$\dot{e}_v = \frac{1}{2}(e_0 I_3 + e_v^\times) e_\Omega, \quad (12)$$

$$J\dot{e}_\Omega = F + J_0^{-1} u + D. \quad (13)$$

其中:  $F = -J_0^{-1} \Omega^\times J_0 \Omega + e_\Omega^\times C \Omega_d - C \dot{\Omega}_d$ ;  $J = J_0 + \Delta J$ ,  $J_0$  为标称惯性矩阵,  $\Delta J$  为惯性矩阵不确定项;  $D = [D_1, D_2, D_3]^T = J_0^{-1} [-\Omega^\times \Delta J \Omega - \Delta J \dot{\Omega} + d]$  为系统不确定性与外界扰动的总和,满足  $\|D\| \leq \mu$ ,  $\mu > 0$  为一个正常数.

本文的控制目标是,针对航天器姿态误差系统(11)~(13)设计滑模控制器  $u$ ,使得航天器姿态误差  $e_v$  与角速度误差  $e_\Omega$  能够渐近收敛至平衡点附近的邻域内.

## 2 基于两相幂次趋近律的滑模控制器设计

### 2.1 两相幂次趋近律设计

根据航天器姿态误差模型(11)~(13)构造如下滑模面:

$$s = e_\Omega + \lambda e_v. \quad (14)$$

其中:  $s = [s_1, s_2, s_3]^T \in R^{3 \times 1}$ ,  $\lambda$  为一个正常数.

为提高滑模变量  $s$  的收敛速度, 设计一种新的两相幂次趋近律, 其表达式为

$$\dot{s}_i = -\rho s_i - \eta |s_i|^{\alpha(s_i)} \text{sgn}(s_i). \quad (15)$$

其中:  $i = 1, 2, 3, \rho > 0, \eta > 0, \text{sgn}(\cdot)$  为符号函数.  $\alpha(s_i(t))$  的表达式为

$$\alpha(s_i(t)) = \begin{cases} p_1/q_1, & |s_i(t)| \geq 1; \\ q_2/p_2, & |s_i(t)| < 1. \end{cases} \quad (16)$$

其中:  $p_1, p_2, q_1, q_2$  为正奇数, 且满足  $p_1 > q_1 > 0, p_2 > q_2 > 0$ .

当滑模变量的初值满足  $s_i(0) \geq 0$  时, 其收敛时间可分为  $0 \leq s_i(0) < 1$  和  $s_i(0) \geq 1$  两种情况讨论.

1) 当滑模变量初值满足  $0 \leq s_i(0) < 1$  时, 滑模变量  $s$  以  $\dot{s}_i = -\rho s_i - \eta |s_i|^{q_2/p_2} \text{sgn}(s_i)$  直接收敛至零, 则式(15)可改写为

$$s_i^{-q_2/p_2}(t) \frac{ds_i}{dt} = -\rho s_i^{1-q_2/p_2}(t) - \eta. \quad (17)$$

由式(17)可得, 滑模变量  $s$  的收敛时间  $t_1$  为

$$t_1 = \frac{1}{\rho(1 - q_2/p_2)} \ln \left( 1 + \frac{\rho}{\eta} s_i^{1-q_2/p_2}(0) \right). \quad (18)$$

2) 当滑模变量初值满足  $s_i(0) \geq 1$  时, 两相幂次趋近律(15)收敛过程如图1所示. 首先, 滑模变量以  $\dot{s}_i = -\rho s_i - \eta |s_i|^{p_1/q_1} \text{sgn}(s_i)$  经过时间  $t_2$  收敛至  $s_i(t_2) = 1$ ; 其次, 滑模变量再以  $\dot{s}_i = -\rho s_i - \eta |s_i|^{q_2/p_2} \text{sgn}(s_i)$  从  $s_i(t_2) = 1$  收敛至  $s_i(t_3) = 0$ . 因此, 滑模变量的总收敛时间为  $t_3$ .

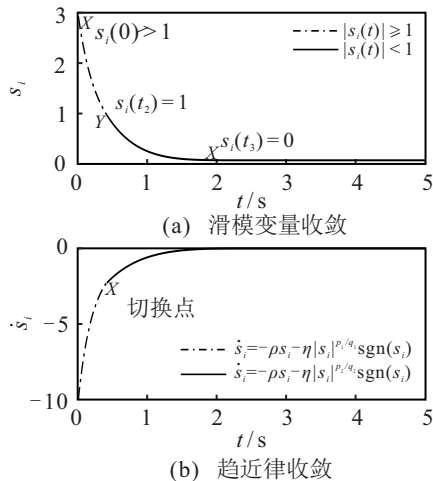


图1  $s_i(0) \geq 1$  时两相幂次趋近律

① 当  $t \in [0, t_2]$  时,  $s_i(t) \geq 1$ , 则式(15)可改写为

$$s_i^{-p_1/q_1}(t) \frac{ds_i}{dt} = -\rho s_i^{1-p_1/q_1}(t) - \eta. \quad (19)$$

由式(19)可得,  $s_i(0)$  到  $s_i(t_2) = 1$  的时间  $t_2$  为

$$t_2 = \frac{1}{\rho(p_1/q_1 - 1)} \ln \frac{1 + \frac{\rho}{\eta}}{1 + \frac{\rho}{\eta} s_i^{1-p_1/q_1}(0)}. \quad (20)$$

② 当  $t \in (t_2, t_3]$  时,  $0 \leq s_i(t) < 1$ . 由式(18)可知, 滑模变量从  $s_i(t_2) = 1$  收敛至  $s_i(t_3) = 0$  所需时间为

$$t_3 - t_2 = \frac{1}{\rho(1 - q_2/p_2)} \ln \left( 1 + \frac{\rho}{\eta} \right). \quad (21)$$

因此由式(21)和(20)可知, 当滑模变量初值满足  $s_i(0) \geq 1$  时, 滑模变量的收敛时间  $t_3$  为

$$t_3 = \frac{1}{\rho} \ln \left( 1 + \frac{\rho}{\eta} \right) \left( \frac{1}{p_1/q_1 - 1} + \frac{1}{1 - q_2/p_2} \right) - \frac{1}{\rho(p_1/q_1 - 1)} \ln \left( 1 + \frac{\rho}{\eta} s_i^{1-p_1/q_1}(0) \right). \quad (22)$$

当滑模变量初值满足  $s_i(0) < 0$  时, 滑模变量收敛与上述过程类似, 不再赘述. 由式(20)和(22)可知, 在两相幂次趋近律(15)的作用下, 滑模变量  $s_i$  能够实现有限时间收敛. 进一步, 由式(22)还可以得到滑模变量收敛时间的上界  $\bar{t}_3$  为

$$\bar{t}_3 = \frac{1}{\rho} \ln \left( 1 + \frac{\rho}{\eta} \right) \left( \frac{1}{p_1/q_1 - 1} + \frac{1}{1 - q_2/p_2} \right). \quad (23)$$

**注1** 由式(22)可知, 滑模变量收敛时间与两相幂次趋近律(15)和(16)中的  $\rho, \eta, p_1/q_1, q_2/p_2$  以及滑模变量初值  $s_i(0)$  相关, 且增大  $\rho, \eta, p_1/q_1$  和减小  $q_2/p_2$  可以减小滑模变量的收敛时间. 由于此时  $s_i(0) \geq 1$ , 则  $0 < s_i^{1-p_1/q_1}(0) \leq 1$ , 因此滑模变量初值  $s_i(0)$  越大, 对其收敛时间的影响相对越小.

## 2.2 与其他趋近律收敛特性对比

为了更好地说明所提两相幂次趋近律的收敛特性, 本节给出常用的指数趋近律<sup>[26]</sup>与双幂次趋近律<sup>[21]</sup>的分析与对比.

1) 指数趋近律表达式为

$$\dot{s}_i = -k_1 s_i - k_2 \text{sgn}(s_i). \quad (24)$$

2) 双幂次趋近律表达式为

$$\dot{s}_i = -k_3 |s_i|^{p_1/q_1} \text{sgn}(s_i) - k_4 |s_i|^{q_2/p_2} \text{sgn}(s_i). \quad (25)$$

其中:  $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0, p_1, p_2, q_1$  和  $q_2$  的定义与两相幂次趋近律(15)相同.

与两相幂次趋近律(15)和双幂次趋近律(25)相比, 当  $s_i \rightarrow 0$  时, 指数趋近律(24)在切换面不连续, 容易产生抖振现象. 与双幂次趋近律(25)相比, 当两相幂次趋近律(15)系数为  $\rho = \eta = \max\{k_3, k_4\}$  时, 收敛速度对比分析如下.

当  $s_i \geq 1$  时, 有以下不等式成立:

$$\begin{aligned} & -\eta |s_i|^{p_1/q_1} \text{sgn}(s_i) - \rho s_i \leq \\ & -k_3 |s_i|^{p_1/q_1} \text{sgn}(s_i) - k_4 |s_i|^{q_2/p_2} \text{sgn}(s_i) \leq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

当  $0 \leq s_i < 1$  时, 有

$$\begin{aligned} & -\eta |s_i|^{q_2/p_2} \text{sgn}(s_i) - \rho s_i \leq \\ & -k_4 |s_i|^{q_2/p_2} \text{sgn}(s_i) - k_3 |s_i|^{p_1/q_1} \text{sgn}(s_i) \leq 0. \end{aligned} \quad (27)$$

当  $-1 < s_i \leq 0$  时,有

$$0 \leq -k_3|s_i|^{p_1/q_1} \operatorname{sgn}(s_i) - k_4|s_i|^{q_2/p_2} \operatorname{sgn}(s_i) \leq -\rho s_i - \eta|s_i|^{q_2/p_2} \operatorname{sgn}(s_i). \quad (28)$$

当  $s_i \leq -1$  时,有

$$0 < -k_3|s_i|^{p_1/q_1} \operatorname{sgn}(s_i) - k_4|s_i|^{q_2/p_2} \operatorname{sgn}(s_i) \leq -\eta|s_i|^{p_1/q_1} \operatorname{sgn}(s_i) - \rho s_i. \quad (29)$$

由式(26)~(29)可知,当  $\rho = \eta = \max(k_3, k_4)$  时,滑模变量  $s_i$  在任意阶段,两相幂次趋近律(15)比双幂次趋近律(25)都具有更快的收敛速度.

与双幂次趋近律(25)相比,本文提出的两相幂次趋近律(15)主要不同之处体现在:1)能够直接得到较为准确的滑模变量收敛时间表达式,而非通过放缩得到收敛时间上界.在航天器姿态控制中,可以根据实际需求调节相关控制参数.2)通过幂次项的设计将滑模变量的趋近过程分为两个阶段,从而分别保证滑模变量在远离滑模面和接近滑模面时均具有更快的收敛速度.

### 2.3 控制器设计及稳定性分析

对式(14)求导可得

$$\dot{s} = \dot{e}_\Omega + \lambda \dot{e}_v. \quad (30)$$

将式(12)和(13)代入(30),可得

$$\dot{s} = F + J_0^{-1}u + D + \lambda \dot{e}_v. \quad (31)$$

由式(15)和(31)设计滑模控制器,有

$$u = -J_0 \left( \rho s + \eta |s|^{\alpha(s)} \operatorname{sgn}(s) + F + \lambda \dot{e}_v + \frac{\sigma^2 s}{\sigma \|s\| + \epsilon} \right). \quad (32)$$

其中:  $\sigma \geq \mu, \epsilon > 0$  均为正常数,  $\frac{\sigma^2 s}{\sigma \|s\| + \epsilon}$  为鲁棒项.

**引理 1**<sup>[26]</sup> 考虑航天器姿态误差系统(11)~(13),若存在  $k > 0$  使得  $e_\Omega + k e_v = 0$  成立,则系统姿态误差  $e_v$  和角速度误差  $e_\Omega$  将指数收敛于原点.

**证明** 由式(14)可知,当  $s = 0$  时,有  $e_\Omega = -\lambda e_v$  成立.航天器姿态误差系统(11)~(13)的平衡点包括  $\{e = [\pm 1, 0, 0, 0]^T, e_\Omega = 0\}$ .对于  $\{e = [-1, 0, 0, 0]^T, e_\Omega = 0\}$ ,选取李雅普诺夫函数

$$V_1 = e_v^T e_v + (1 + e_0)^T. \quad (33)$$

由四元数的性质可知,  $e_0^2 + e_v^T e_v = 1, |e_0| \leq 1$ ,因此式(33)可改写为

$$V_1 = 2 + 2e_0. \quad (34)$$

由式(11)可知,  $V_1$  的一阶导数为

$$\dot{V}_1 = -e_v^T e_\Omega = \lambda e_v^T e_v \geq 0. \quad (35)$$

因此,平衡点  $\{e = [-1, 0, 0, 0]^T, e_\Omega = 0\}$  是不稳定的,

系统中存在任意小的干扰均能导致系统状态远离平衡点.

对于  $\{e = [1, 0, 0, 0]^T, e_\Omega = 0\}$ ,选取李雅普诺夫函数

$$V_2 = e_v^T e_v + (1 - e_0)^T = 2 - 2e_0. \quad (36)$$

同理可得,  $V_2$  的一阶导数为

$$\dot{V}_2 = e_v^T e_\Omega = -\lambda e_v^T e_v \geq 0. \quad (37)$$

因此,平衡点  $\{e = [1, 0, 0, 0]^T, e_\Omega = 0\}$  是稳定的.

由于  $(1 - e_0)^2 - e_v^T e_v = 2e_0^2 + e_v^T e_v - 2e_0 - e_v^T e_v = 2e_0(e_0 - 1) \leq 0$ ,则有

$$(1 - e_0)^2 \leq e_v^T e_v. \quad (38)$$

将式(38)代入(37),有

$$V_2 \leq 2e_v^T e_v, \quad (39)$$

则由式(37)和(39)可得

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{1}{2} \lambda V_2. \quad (40)$$

根据李雅普诺夫稳定性理论,  $e_\Omega$  和  $e_v$  将指数收敛于原点.  $\square$

基于本文提出的两相幂次趋近律(15)和(16)可设计控制器,其表达式为

$$u_1 = -J_0 \left( \rho s + \eta |s|^{\alpha(s)} \operatorname{sgn}(s) + F + \lambda \dot{e}_v + \frac{\sigma^2 s}{\sigma \|s\| + \epsilon} \right). \quad (41)$$

**定理 1** 考虑航天器姿态误差系统(11)~(13),在滑模控制器(41)的作用下,滑模变量  $s$  能够在有限时间内收敛至滑模面  $s = 0$  附近的邻域内,且航天器姿态误差  $e_v$  与角速度误差  $e_\Omega$  渐近收敛至平衡点附近的邻域内.

**证明** 设计李雅普诺夫函数为

$$V = s_i^2, \quad (42)$$

其中  $i = 1, 2, 3$ .

对式(42)求导可得

$$\dot{V} = 2s_i \dot{s}_i. \quad (43)$$

将式(31)和(41)代入(43),可得

$\dot{V} =$

$$\begin{aligned} & 2s_i \left( -\rho s_i - \eta |s_i|^{\alpha(s_i)} \operatorname{sgn}(s_i) + D_i - \frac{2\sigma^2 s_i}{\sigma |s_i| + \epsilon} \right) = \\ & -2\rho s_i^2 - 2\eta |s_i|^{\alpha(s_i)+1} + \\ & 2s_i D_i - 2\sigma |s_i| + \frac{2\epsilon\sigma |s_i|}{\sigma |s_i| + \epsilon} \leq \\ & -2\rho V - 2\eta V^{\frac{\alpha(s_i)+1}{2}} - \\ & 2(\sigma - |D_i|) |s_i| + \frac{2\epsilon\sigma |s_i|}{\sigma |s_i| + \epsilon} \leq \\ & -2\rho V - 2\eta V^{\frac{\alpha(s_i)+1}{2}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2(\sigma - \mu)|s_i| + \frac{2\epsilon\sigma|s_i|}{\sigma|s_i| + \epsilon} &\leq \\
 -2\rho V - 2\eta V^{\frac{\alpha(s_i)+1}{2}} + 2\epsilon \cdot \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{\sigma|s_i|}} &\leq \\
 -2\rho V - 2\eta V^{\frac{\alpha(s_i)+1}{2}} + 2\epsilon &
 \end{aligned} \tag{44}$$

存在一个常数  $\theta_1 \in (0, 1)$ , 使得式(44)满足

$$\dot{V} \leq -2\rho\theta_1 V - 2\eta V^{\frac{\alpha(s_i)+1}{2}} + 2\epsilon - 2\rho(1 - \theta_1)V. \tag{45}$$

当  $V \geq \frac{\epsilon}{\rho(1 - \theta_1)}$  时, 有

$$\dot{V} \leq -2\rho\theta_1 V - 2\eta V^{\frac{\alpha(s_i)+1}{2}} \leq 0. \tag{46}$$

由式(46)可得

$$V^{-\frac{\alpha(s_i)+1}{2}}(t) \frac{dV}{dt} \leq -2\rho\theta_1 V^{1 - \frac{\alpha(s_i)+1}{2}}(t) - 2\eta. \tag{47}$$

由式(47)可知,  $V(t)$  收敛域为  $\left\{V|V \leq \frac{\epsilon}{\rho(1 - \theta_1)}\right\}$ , 且收敛时间  $T_1$  满足

$$T_1 \leq \frac{1}{\rho\theta_1} \ln \left(1 + \frac{\rho\theta_1}{\eta}\right) \left(\frac{1}{p_1/q_1 - 1} + \frac{1}{1 - q_2/p_2}\right). \tag{48}$$

此外, 存在另一个常数  $\theta_2 \in (0, 1)$ , 使得式(44)满足

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -2\rho V - 2\eta\theta_2 V^{\frac{\alpha(s_i)+1}{2}} + 2\epsilon - \\
 &2\eta(1 - \theta_2)V^{\frac{\alpha(s_i)+1}{2}}. \tag{49}
 \end{aligned}$$

同理可得, 当  $V \geq \left(\frac{\epsilon}{\eta(1 - \theta_2)}\right)^{\frac{2}{q_2/p_2+1}}$  时, 有

$$\dot{V} \leq -2\rho V - 2\eta\theta_2 V^{\frac{\alpha(s_i)+1}{2}} \leq 0. \tag{50}$$

此时,  $V(t)$  的收敛域为  $\left\{V|V \leq \left(\frac{\epsilon}{\eta(1 - \theta_2)}\right)^{\frac{2}{q_2/p_2+1}}\right\}$ , 且收敛时间  $T_2$  满足

$$T_2 \leq \frac{1}{\rho} \ln \left(1 + \frac{\rho}{\eta\theta_2}\right) \left(\frac{1}{p_1/q_1 - 1} + \frac{1}{1 - q_2/p_2}\right). \tag{51}$$

综合式(48)和(51)可得滑模变量将在有限时间内收敛至滑模面  $s = 0$  附近的以下邻域内:

$$s_i \in \{|s_i| \leq \sqrt{\zeta}\}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{52}$$

其中

$$\zeta = \min \left(\frac{\epsilon}{\rho(1 - \theta_1)}, \left(\frac{\epsilon}{\eta(1 - \theta_2)}\right)^{\frac{2}{q_2/p_2+1}}\right). \tag{53}$$

整理式(14)可得

$$e_{\Omega_i} + \left(\lambda - \frac{s_i}{e_i}\right)e_i = 0. \tag{54}$$

当  $|s_i| < \lambda|e_i|$  时,  $e_{\Omega_i} + \left(\lambda - \frac{s_i}{e_i}\right)e_i = 0$  满足线性滑模面形式, 则由引理1可知  $e_i$  和  $e_{\Omega_i}$  将渐近趋近于原点, 直至  $|s_i| \geq \lambda|e_i|$  时结束. 由式(52)可知, 航天器系统稳态姿态误差和稳态角速度误差收敛至平衡点附近的以下邻域内:

$$|e_i| \leq \frac{\sqrt{\zeta}}{\lambda}, \tag{55}$$

$$|e_{\Omega_i}| \leq |s_i| + \lambda|e_i| \leq 2\sqrt{\zeta}, \tag{56}$$

其中  $i = 1, 2, 3$ . □

**注2** 控制器(41)中的鲁棒项  $\frac{\sigma^2 s}{\sigma\|s\| + \epsilon}$  有利于抑制系统总扰动和增强系统的鲁棒性.  $\sigma$  越大, 对总扰动的抑制能力越强, 但过大的  $\sigma$  会导致过大的控制器增益.  $\epsilon$  的大小与滑模变量的收敛域相关,  $\epsilon$  越小, 收敛域越小. 然而, 若  $\epsilon$  过小, 则可能会引起控制器的高频抖振问题. 因此参数  $\sigma$  和  $\epsilon$  的取值需要综合考虑收敛域和控制器增益.

**注3** 当滑模变量  $s$  收敛至滑模面  $s = 0$  时, 有  $e_{\Omega} + \lambda e_v = 0$  成立, 由引理1可知,  $e_{\Omega}$ 、 $e_v$  将指数收敛于原点. 根据式(10)~(12)可得  $C = I_3, \dot{e}_0 = 0, \dot{e}_v = 0$ , 则由式(9)可知, 当  $e_{\Omega} = 0$  时,  $\Omega = \Omega_d$ . 因此,  $u = \Omega_d^\times J_0 \Omega_d + J_0 \dot{\Omega}_d$ . 由于  $J_0$ 、 $\Omega_d$  和  $\dot{\Omega}_d$  均是有界的, 可知控制信号  $u$  也是有界的, 即不会出现奇异性问题.

### 3 仿真实验

为验证本文所提控制方法的有效性, 本节将通过数值仿真对比进行验证. 航天器系统标称惯性矩阵  $J_0$ 、惯性矩阵不确定项  $\Delta J$  和外界扰动  $d^{[26]}$  分别为

$$J_0 = \begin{bmatrix} 20 & 1.2 & 0.9 \\ 1.2 & 17 & 1.4 \\ 0.9 & 1.4 & 15 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$\Delta J = \text{diag}\{\sin(0.1t), 2\sin(0.2t), 3\sin(0.3t)\} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$d = \begin{bmatrix} 0.1 \sin(0.1t) \\ 0.2 \sin(0.2t) \\ 0.3 \sin(0.3t) \end{bmatrix} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

航天器姿态初值  $q(0) = [0.8832, 0.3, -0.2, -0.3]^T$ , 角速度初值  $\Omega(0) = [0, 0, 0]^T \text{ rad/s}$ , 期望姿态  $q_d = [1, 0, 0, 0]^T$ , 期望角速度为

$$\Omega_d = 0.05 \begin{bmatrix} \sin(0.01\pi t) \\ \sin(0.02\pi t) \\ \sin(0.03\pi t) \end{bmatrix} \text{ rad/s}.$$

为验证本文所提方法的优越性, 给出以下3种方法 ( $M_1 \sim M_3$ ) 进行对比, 其中滑模面形式均为式(14).

$M_1$ : 基于本文提出的两相幂次趋近律(15)和(16)设计控制器, 其表达式如式(41)所示.

$M_2$ : 基于文献[21]中的指数趋近律(24)设计控制器, 其表达式如下:

$$u_2 = -J_0 \left( F + k_1 s + k_2 \text{sgn}(s) + \frac{\sigma^2 s}{\sigma\|s\| + \epsilon} \right). \tag{57}$$

$M_3$ : 基于文献[15]中的双幂次趋近律(25)设计控制器, 其表达式为

$$u_3 = -J_0 \left( F + k_3 |s|^{p_1/q_1} \text{sgn}(s) + k_4 |s|^{q_2/p_2} \text{sgn}(s) + \frac{\sigma^2 s}{\sigma \|s\| + \epsilon} \right). \quad (58)$$

M<sub>1</sub>方法参数设置如下:  $\lambda = 5, \rho = 1.2, \eta = 1.2, p_1/q_1 = 31/11, q_2/p_2 = 5/9, \sigma = 0.35, \epsilon = 0.01$ . 控制器限幅为  $30 \text{ N} \cdot \text{m}$ . 为保证对比公平性, M<sub>2</sub>方法和M<sub>3</sub>方法中的  $p_1/q_1, q_2/p_2, \sigma$  和  $\epsilon$  等参数设置与M<sub>1</sub>方法相同, 其余参数设置为  $k_1 = 1.2, k_2 = 0.01, k_3 = 1.2, k_4 = 0.8$ .

仿真结果如图2~图5所示. 图2和图3分别描述了姿态误差和角速度误差对比结果.

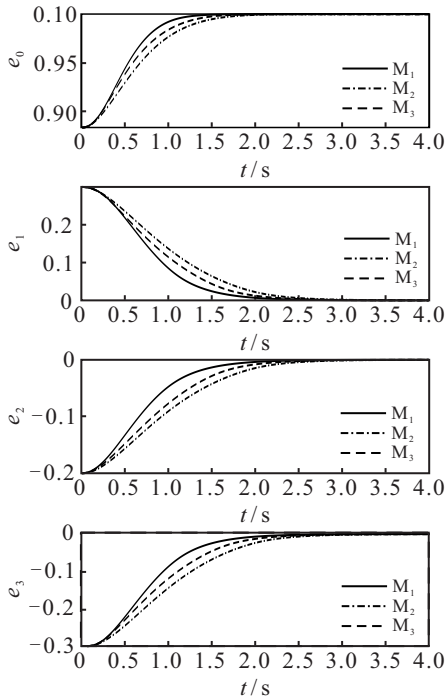


图2 航天器姿态跟踪误差收敛对比

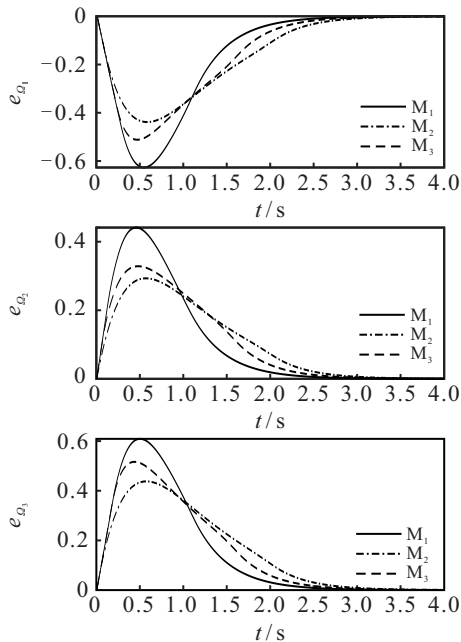


图3 航天器角速度跟踪误差收敛对比

由图2和图3可知, 相较于M<sub>2</sub>和M<sub>3</sub>方法, 本文提出的M<sub>1</sub>方法能够保证更快的姿态和角速度误差收敛速度. 图4和图5分别给出了3种方法的控制器输出以及滑模变量收敛对比结果.

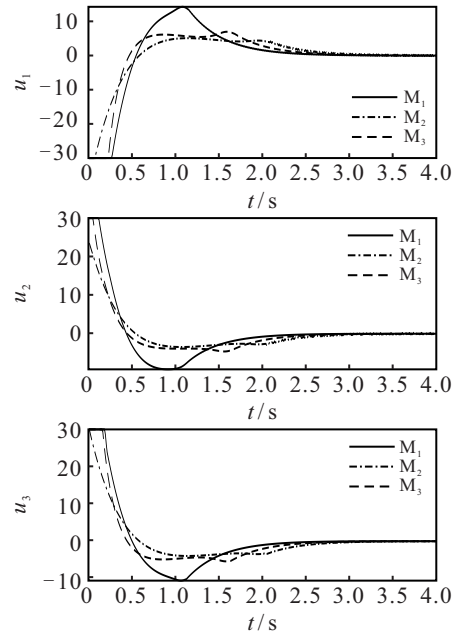


图4 控制器输出对比

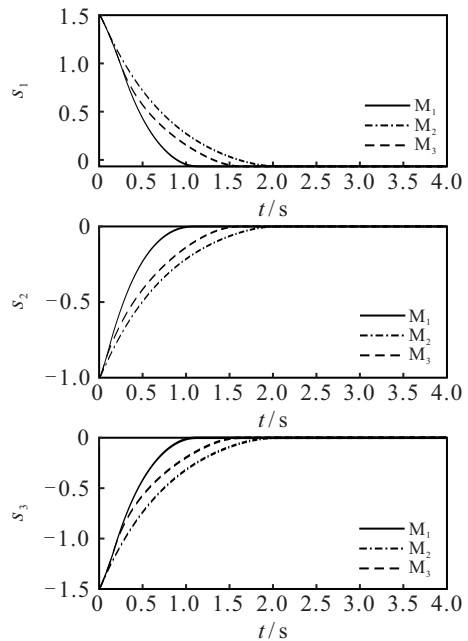


图5 滑模变量收敛对比

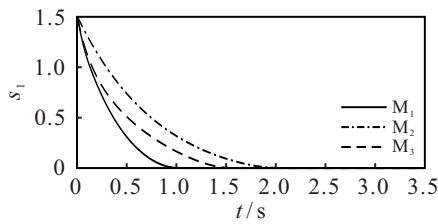
由图4可知, 3种方法的控制器输出均被限幅在  $30 \text{ N} \cdot \text{m}$  以内. 由图5可以看出, 在控制器限幅作用下, M<sub>1</sub>方法的滑模变量收敛时间小于M<sub>2</sub>和M<sub>3</sub>方法. 因此, 相比指数趋近律方法和双幂次趋近律方法, 本文提出的两相幂次趋近律方法能够保证滑模变量和跟踪误差具有更快的收敛速度.

为对比不同滑模变量初值下趋近律的收敛速度, 设置如下两组不同的姿态初值再次进行仿真对比:

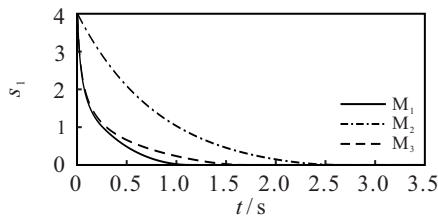
$$D_1: q(0) = [0.8832, 0.3, -0.2, -0.3]^T,$$

$$D_2: q(0) = [0.1, 0.8, 0.55, 0.2179]^T.$$

仿真对比结果如图6~图8所示。

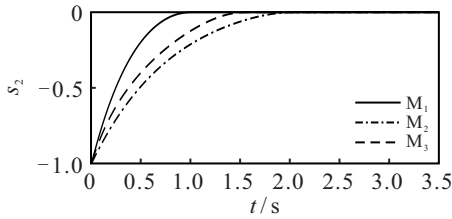


(a)  $D_1$ 初值下收敛对比

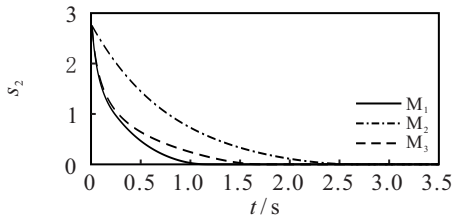


(b)  $D_2$ 初值下收敛对比

图6 不同初值滑模变量  $s_1$  收敛对比

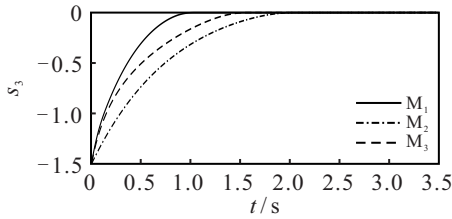


(a)  $D_1$ 初值下收敛对比

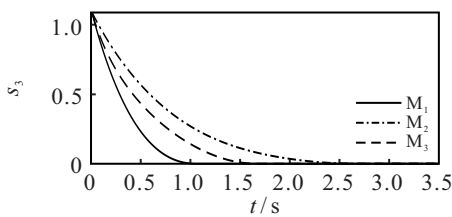


(b)  $D_2$ 初值下收敛对比

图7 不同初值滑模变量  $s_2$  收敛对比



(a)  $D_1$ 初值下收敛对比



(b)  $D_2$ 初值下收敛对比

图8 不同初值滑模变量  $s_3$  收敛对比

从仿真结果可知,  $M_2$  方法的收敛时间随着滑模变量初值的增大而明显增大, 而  $M_1$  和  $M_3$  方法的收敛时间变化较小. 但相比  $M_3$  方法,  $M_1$  方法在滑模变量各阶段都具有更快的收敛速度.

以上仿真对比可以表明, 本文所设计的两相幂次趋近律和滑模控制器能够使滑模变量具有较快的趋近速度, 进而保证姿态误差  $e$  和角速度误差  $e_\Omega$  快速收敛至平衡点附近邻域.

### 4 结论

本文针对带有系统不确定性的航天器系统姿态控制问题, 提出了一种基于两相幂次趋近律的滑模控制方法. 两相幂次趋近律根据滑模变量值的大小调整幂次项的取值, 从而提高滑模变量在整个收敛过程中的收敛速度. 此外, 该趋近律还能够直接得到较为确切的滑模变量收敛时间表表达式. 这意味着一旦确定系统初始状态和参数, 即可获得较为准确的滑模变量收敛时间, 对控制参数的设置具有一定的指导意义. 在控制器设计中, 采用鲁棒方法处理系统惯性不确定性与外界扰动, 可以保证系统的鲁棒性. 后续研究工作主要包括基于两相幂次趋近律的有限时间滑模控制器设计, 以及在实际系统中验证所提方法的有效性.

### 参考文献(References)

- [1] 钟声, 黄一, 胡锦涛. 深空探测航天器姿态的自抗扰控制[J]. 控制理论与应用, 2019, 36(12): 2028-2034.  
(Zhong S, Huang Y, Hu J C. Active disturbance rejection control for attitude control of deep space explorer[J]. Control Theory & Applications, 2019, 36(12): 2028-2034.)
- [2] Huang Y, Jia Y M. Adaptive finite-time 6-DOF tracking control for spacecraft fly-around with input saturation and state constraints[J]. IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems, 2019, 55(6): 3259-3272.
- [3] Sun Z Y, Shao Y, Chen C C. Fast finite-time stability and its application in adaptive control of high-order nonlinear system[J]. Automatica, 2019, 106: 339-348.
- [4] Wu B L, Cao X B. Robust attitude tracking control for spacecraft with quantized torques[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 54(2): 1020-1028.
- [5] 陈海涛, 宋申民. 考虑执行器性能约束的刚体航天器鲁棒姿态跟踪控制[J]. 控制与决策, 2019, 34(4): 735-742.  
(Chen H T, Song S M. Robust attitude tracking control of rigid spacecraft considering control input constraints[J]. Control and Decision, 2019, 34(4): 735-742.)

- [6] Xu S S D, Chen C C, Wu Z L. Study of nonsingular fast terminal sliding-mode fault-tolerant control[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62(6): 3906-3913.
- [7] Lu K, Xia Y, Yu C, et al. Finite-time tracking control of rigid spacecraft under actuator saturations and faults[J]. IEEE Transactions on Automation Science & Engineering, 2016, 13(1): 368-381.
- [8] Abidi K, Xu J X, Yu X H. On the discrete-time integral sliding-mode control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(4): 709-715.
- [9] Ha Q P, Nguyen Q H, Rye D C, et al. Fuzzy sliding-mode controllers with applications[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2001, 48(1): 38-46.
- [10] Tsai C H, Chung H Y, Yu F M. Neuro-sliding mode control with its applications to seesaw systems[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2004, 15(1): 124-134.
- [11] Lin S Y, Cai Y Z, Yang B, et al. Electrical line-shafting control for motor speed synchronisation using sliding mode controller and disturbance observer[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(2): 205-212.
- [12] Chakrabarty S, Bandyopadhyay B. A generalized reaching law with different convergence rates[J]. Automatica, 2016, 63: 34-37.
- [13] 高为炳. 变结构控制理论基础[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 1990: 95-101.  
(Gao W B. The theoretical basis of variable structure control[M]. Beijing: Science and Technology of China press, 1990: 95-101.)
- [14] Yu S H, Yu X H, Shirinzadeh B, et al. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode[J]. Automatica, 2005, 41(11): 1957-1964.
- [15] 宋晓娟, 王宏伟, 吕书锋. 输入饱和的充液航天器抗干扰有限时间滑模控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(5): 1078-1086.  
(Song X J, Wang H W, Lyu S F. Anti-disturbance finite-time sliding mode control for liquid-filled spacecraft with input saturation[J]. Control and Decision, 2021, 36(5): 1078-1086.)
- [16] Bayat F. Model predictive sliding control for finite-time three-axis spacecraft attitude tracking[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(10): 7986-7996.
- [17] 韩治国, 张科, 吕梅柏, 等. 航天器自适应快速非奇异终端滑模容错控制[J]. 控制理论与应用, 2016, 33(8): 1046-1053.  
(Han Z G, Zhang K, Lyu M B, et al. Adaptive non-singular fast terminal sliding mode based tolerant control for spacecraft[J]. Control Theory & Applications, 2016, 33(8): 1046-1053.)
- [18] 陈闯, 王勃, 于泳, 等. 基于改进指数趋近律的感应电机滑模转速观测器研究[J]. 电工技术学报, 2020, 35(S1): 155-163.  
(Chen C, Wang B, Yu Y, et al. An improved exponential reaching law based-sliding mode observer for speed-sensorless induction motor drives[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2020, 35(S1): 155-163.)
- [19] 陈强, 杨晨冰, 南余荣. 基于变速趋近律的Buck型变换器抗扰动控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(4): 893-900.  
(Chen Q, Yang C B, Nan Y R. Disturbance rejection control of buck converters based on variable rate reaching law[J]. Control and Decision, 2021, 36(4): 893-900.)
- [20] 张合新, 范金锁, 孟飞, 等. 一种新型滑模控制双幂次趋近律[J]. 控制与决策, 2013, 28(2): 289-293.  
(Zhang H X, Fan J S, Meng F, et al. A new double power reaching law for sliding mode control[J]. Control and Decision, 2013, 28(2): 289-293.)
- [21] 李慧洁, 蔡远利. 基于双幂次趋近律的滑模控制方法[J]. 控制与决策, 2016, 31(3): 498-502.  
(Li H J, Cai Y L. Sliding mode control with double power reaching law[J]. Control and Decision, 2016, 31(3): 498-502.)
- [22] Li H J, Cai Y L. On SFTSM control with fixed-time convergence[J]. IET Control Theory and Applications, 2017, 11(6): 766-773.
- [23] 张瑶, 马广富, 郭延宁, 等. 一种多幂次滑模趋近律设计与分析[J]. 自动化学报, 2016, 42(3): 466-472.  
(Zhang Y, Ma G F, Guo Y N, et al. A multi power reaching law of sliding mode control design and analysis[J]. Acta Automatica Sinica, 2016, 42(3): 466-472.)
- [24] Sun M X. Two-phase attractors for finite-duration consensus of multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(5): 1757-1765.
- [25] Sidi, Marcel J. Spacecraft dynamics and control[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997: 152-160.
- [26] Xia Y, Zhu Z, Fu M, et al. Attitude tracking of rigid spacecraft with bounded disturbances[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2011, 58(2): 647-659.

### 作者简介

陈强(1984—), 男, 副教授, 博士, 从事自适应控制与学习控制等研究, E-mail: sdnjchq@zjut.edu.cn;

朱健宏(1997—), 男, 硕士生, 从事自适应控制与学习控制的研究, E-mail: jayhooz@163.com;

陶玫玲(1993—), 女, 博士生, 从事四旋翼姿态控制与自适应控制的研究, E-mail: taomeilingsmile@163.com.

(责任编辑: 闫 妍)