

基于指标和自适应边界选择的高维多目标优化算法

李二超, 魏立森

引用本文:

李二超, 魏立森. 基于指标和自适应边界选择的高维多目标优化算法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(5): 1183–1194.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1518>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[一种求解约束多目标问题的协作进化算法](#)

A collaborative evolutionary algorithm for solving constrained multi-objective problems

控制与决策. 2021, 36(11): 2656–2664 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0791>

[基于R2指标和目标空间分解的高维多目标粒子群优化算法](#)

R2 indicator and objective space partition based many-objective particle swarm optimizer

控制与决策. 2021, 36(9): 2085–2094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0113>

[基于弱关联的自适应高维多目标进化算法](#)

A weak association-based adaptive evolutionary algorithm for many-objective optimization

控制与决策. 2021, 36(8): 1804–1814 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1723>

[基于向量角分解的高维多目标进化算法](#)

Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition

控制与决策. 2021, 36(3): 761–768 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0925>

[基于多种群分解预测的动态多目标引力搜索算法](#)

Dynamic multi-objective gravitational searching algorithm based on multi-population decomposition prediction

控制与决策. 2021, 36(12): 2910–2918 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1002>

基于指标和自适应边界选择的高维多目标优化算法

李二超[†], 魏立森

(兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 兰州 730050)

摘要: 多目标优化算法的主要目标是实现好的多样性和收敛性. 传统的高维多目标优化算法, 当目标维数增加时, 选择方式难以平衡种群的收敛性与多样性. 对此, 提出一个基于指标和自适应边界选择的高维多目标优化算法. 在环境选择中, 首先计算种群中两两个体的指标 $I_\varepsilon(x, y)$ 作为第一选择标准; 其次, 提出一种自适应边界选择策略, 利用种群进化信息对超平面系数进行模糊预测; 再次, 近似计算待选个体到超平面的范式距离作为第二选择标准; 最后, 将所提出算法与 5 种代表性的高维多目标算法进行比较, 实验结果表明, 所提出算法在处理复杂 Pareto 前沿高维多目标优化问题时, 能在平衡收敛性与多样性的同时, 更好地维护多样性.

关键词: 指标; 模糊预测; 超平面; 自适应边界选择; 收敛性; 多样性

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1518

引用格式: 李二超, 魏立森. 基于指标和自适应边界选择的高维多目标优化算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(5): 1183-1194.

An indicator-based many-objective evolutionary algorithm with adaptive boundary selection

LI Er-chao[†], WEI Li-sen

(College of Electrical Engineering and Information Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: The main goal of the multi-objective optimization algorithm is to achieve good diversity and convergence. In traditional many-objective optimization algorithms, the selection operator is difficult to balance the convergence and diversity of the population, when the dimensionality of the objective increases. To solve this problem, this paper proposes a many-objective algorithm named an indicator-based many-objective evolutionary algorithm with adaptive boundary selection. In environmental selection, it first calculates the index $I_\varepsilon(x, y)$ of the two bodies in the population as the first selection criterion, and then proposes an adaptive boundary selection strategy, which uses population evolution information to make fuzzy predictions of hyperplane coefficients, and then approximately calculate the paradigm distance from the candidate individual to the hyperplane as the second selection criterion. Finally, the proposed algorithm is compared with five representative many-objective optimization algorithms. The experimental results show that when the algorithm handles many-objective optimization problem of the complex Pareto frontier, it can balance convergence and diversity while better maintaining diversity.

Keywords: indicator; fuzzy prediction; hyperplane; adaptive boundary selection; convergence; diversity

0 引言

多目标优化问题是指同时对两个及两个以上的目标进行优化. 如果优化问题包含 3 个以上目标, 则称为高维多目标优化问题 (many objective optimization problems, MaOPs)^[1]. 由于多目标优化问题目标之间相互矛盾, 不存在最优解同时优化所有的目标, 这类问题的优化目的是在多个目标之间求取一组折

中解^[2]. 另外, 多目标优化在实际生产生活中也有着广泛的应用^[3-5].

多目标优化算法是解决多目标问题的主要算法, 研究表明, 传统的多目标优化算法不能很好地解决 MaOPs 问题. 主要原因是, 随着目标个数的增加, 传统的基于 Pareto 关系在高维空间中的选择压力会急剧减小, 不能对解进行有效区分. 此外, 逼近非支配解的

收稿日期: 2020-11-03; 录用日期: 2021-02-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (61763026, 62063019).

责任编委: 陈家伟.

[†]通讯作者. E-mail: lecstarr@163.com.

数量呈指数级增长,导致计算复杂度和搜索难度急剧增加,而且目标数量的增加会提高目标空间的复杂度,导致解难以收敛到真实前沿,并且多样性也难以维持^[6-7].为了解决这些问题,人们提出了大量的多目标进化算法.这些多目标优化算法大致分为三类:第1类是基于放松支配关系的多目标优化算法^[8-10],通过修改传统的非支配关系来增加解的选择压力,但需要额外的参数调整支配区域,不合适的参数会影响算法的多样性;第2类是基于分解的多目标优化算法^[11-12],将多目标问题分解为多个单目标子问题,通过聚合函数在每个权重向量上选取最好的个体来维持种群的多样性和收敛性,这类算法需对权重向量进行调整,很难同时很好地处理规则和不规则问题;第3类是基于性能指标的多目标优化算法^[13-15],利用指标综合衡量解的多样性和收敛性的能力,对解进行选择,这类算法简单,易于实施,但不能较好地维持前沿的覆盖率^[16].

还有一些多目标优化算法采取了不同于上述算法的思想,通过优先选择一些特殊的解来引导种群实现更好的收敛性和分布性.例如:极值点和非支配排序的NSGA-II-BS^[6]以及两阶段进化算法MOEA/PT^[17]优先选择极值解来增强算法的整体性能;大规模多目标优化算法SparseEA^[18]优先选择稀疏解来增强算法的整体性能.另外,研究发现边界解^[19]也可以很好地提高种群的收敛性和多样性,优先选择这些个体将极大地增强算法搜索整个Pareto前沿的能力^[20].PARP-EA^[21]先利用成绩标量函数,以 M 个坐标轴作为权重向量选取 M 个最小成绩标量函数值的边界解,利用这 M 个个体构造超平面,再进行后续解的选择操作. One by oneEA^[22]在逐一选择策略中采用边界选择机制,即通过 M 个标量函数替换收敛性指标以获取 M 个边界解.类似地, VaEA^[23]在个体的选择中首先通过标量函数计算 M 个边界解,然后利用最大夹角优先准则和最差别除准则对个体进行筛选.但随着目标函数的增加,边界解的数量也会增加,仅仅保护 M 个边界解是远远不够的.文献^[16]提出了MaOEA/IBP算法,采用边界保护策略,通过计算个体到超平面的距离来对个体进行选择,但算法采用指定的超平面对种群进行引导,算法整体性能较弱.

以上算法利用边界解,希望获得更好的收敛性和多样性.为了更充分地利用边界解,本文在文献^[16]基础上提出一种基于指标和自适应边界选择的高维多目标优化算法.首先利用二元指标进行选择,有效

地保证收敛性;然后将所提出的自适应边界选择策略作为第2选择标准以保证种群的多样性.所提出的自适应边界选择策略充分利用种群变化的信息,自适应地得到一个融合变化信息的超平面,利用个体到超平面的距离来选择合适的解,相较于固定超平面,在解的衡量上更为合理.将MaOEA/ABS与5种具代表性的高维多目标优化算法进行比较,结果显示,所提出的算法在解决复杂Pareto前沿时,能对种群的进化及时响应,表现出更好的收敛性及多样性.

1 相关概念

1.1 高维多目标优化概念及定义

不失一般性,以最小化问题为例,一个具有 n 个决策变量, m 个目标函数的多目标优化问题^[24]可表述为

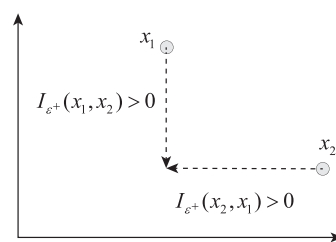
$$\begin{aligned} \min F(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T; \\ \text{s.t. } x &\in \Omega. \end{aligned}$$

其中: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \Omega$ 是决策变量, Ω 是决策空间, Y 是目标空间, $F: \Omega \rightarrow Y \in R^m$ 由 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ 个目标函数组成,当 $m > 3$ 时称为高维多目标优化问题.

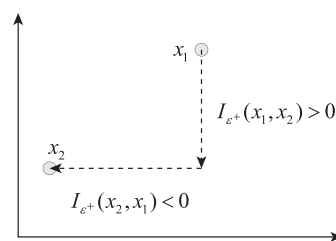
1.2 二元指标定义

一个二元指标被定义为一个函数,映射两个Pareto解集近似为一个实数,即为一个Pareto近似解集支配另一个近似解集所需要的最小距离,在目标空间中保持弱支配的关系.二元指标的定义^[25-27]具体如下.

二元指标: 一个二元指标,对于所有的 $x_1, x_2, x_3 \in X, I(x_1, x_2)$ 的支配关系如下:



(a) x_1, x_2 互不支配



(b) x_2 支配 x_1

图1 二元指标支配关系二维示意

1) $x_1 \prec x_2 \Rightarrow I(x_1, x_2) < I(x_2, x_1)$;

2) $x_1 \prec x_2 \Rightarrow I(x_3, x_1) \leq I(x_3, x_2)$.

基于二元指标的 $I_{\varepsilon+}$ 指标定义如下:

$$I_{\varepsilon+}(x_1, x_2) = \min_{\varepsilon}(f_i(x_1) - \varepsilon \leq f_i(x_2), 1 \leq i \leq m).$$

其中: x_1, x_2 是两个决策变量, m 是目标个数. 二元指标的二维示意如图1所示.

2 提出的方法

2.1 整体框架

算法1描述了所提出算法 MaOEA-ABS 的主要框架. 首先, 随机生成大小为 N 的初始种群, 选择优秀的个体进入交配池; 然后, 采用模拟二进制交叉 (SBX) 和多样式变异 (PM) 产生子代 Q_t , 将子代与父代个体合并; 最后, 通过环境选择机制从合并后的个体中选出 N 个收敛性和多样性好的个体进入下一代. 重复以上步骤直到满足终止条件.

算法1 general framework of MaOEA-ABS.

input: N (种群规模), t_{\max} (最大进化代数);

output: $P_{t_{\max}}$ (最终种群).

1) initialize the population P_0 with N random individuals

2) while termination criterion is not fulfilled do

3) pool = mating slecting (P_t)

4) Q_t = reproduction (pool)

5) $P_t = Q_t + P_t$

6) P_{t+1} = environmental selction (P_t)

7) $t = t + 1$

8) end

9) return P_{t+1} .

2.2 环境选择机制

算法1中的环境选择机制如算法2所示. 传统的高维多目标优化算法随着目标维数的增加面临选择压力不足, 本文在环境选择中将指标与所提出的基于模糊预测自适应边界选择策略相结合, 将指标作为第1选择标准, 所提出的基于模糊预测的自适应边界选择策略作为第2选择标准, 进行个体的选择, 以期在高维优化中获得更好的收敛性和多样性.

算法2 environmental slection.

input: P_t (合并后的种群), T (进化代数);

output: P_{t+1} (下一代种群).

1) $(F_1, F_2, \dots) = \text{non-dominated-sorting}(P_t)$

2) $\tau = \arg \min_{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} |F_i| \geq N, R = F_1 \cup F_2 \cup \dots$

$\cup F_{\tau}$

3) $R' = \text{normalization}(R)$

/* 每隔5代模糊预测超平面 p 值 */

4) if mod ($T, 5$) == 0 then

5) $P = \text{fuzzy-prediction}(F'_1)$

6) $P_1 = P$

7) else

8) $P = P_1$

9) end

10) 计算个体到自适应超平面的范式距离 $d(x, c)$, 计算两两个体的 $I_{\varepsilon}(x, y)$ 值

11) while $|R| > N$ do

12) 选取 $I_{\varepsilon+}(x, y)$ 值最小的两个个体

13) if $I_{\varepsilon+}(x, y) < 0$ then

14) remove y from R

15) else if $I_{\varepsilon+}(y, x) < 0$ then

16) remove x from R

17) else

/* 根据计算的适应度进行边界选择 */

18) if $d(x, c) > d(y, c)$ then

19) remove x from R

20) else if $d(x, c) < d(y, c)$ then

21) remove y from R

22) else

23) randomly remove the x or y

24) end

25) end

26) end

27) return R .

假定种群的规模是 N , 从 P_t 中选择一部分个体形成交配池, 经过交叉变异后生成子代个体 Q_t , 子代与父代合并后经过环境选择机制选出 P_{t+1} 个个体进入下一代. 在环境选择中, 首先通过非支配排序的方法对合并个体进行等级划分, 假设划分后的等级 F_1, F_2, \dots , 以 $\tau = \arg \min_{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} |F_i| \geq N$ 对个体分层进行截断, 选取 $R = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{\tau}$ 的个体. 归一化 R 中个体, 选取归一化后 F_1 层个体, 利用模糊预测的方法对超平面系数 p 进行自适应调整, 用预测的超平面计算所选个体到超平面的距离. 然后利用第1选择标准, 选择最小的 I_{ε} 值, 若 $I_{\varepsilon}(x, y) < 0$ 或 $I_{\varepsilon}(y, x) < 0$, 则 $x \prec y$ 或 $y \prec x$, 删除被支配的个体. 如果不满足这个条件, 则采用第2选择标准, 利用解到模糊预测超平面的距离作为适应度值, 进行解的选择. 重复以上步骤直到选取 N 个个体. 这种选择方式能在高维空间中当 Pareto 关系对个体无法分层时进一步区分个体, 从而有效地提高算法的收敛性和多样性.

2.3 基于模糊预测的自适应边界策略

本文提出一种自适应边界选择策略,与文献[16]的边界保护策略类似,个体的适应度计算为个体到超平面的范式距离,选择范式距离最小的个体进入下一代.由于不同测试问题种群的最优Pareto解的形状都不一样,同时种群进化的过程中前沿信息不断变化,此时需要用符合当前进化状态的超平面对个体进行实时引导.但文献[16]采用固定的超平面来计算个体适应度,没有考虑问题的特征以及种群进化的信息,这样会使个体的进化出现偏差,从而降低算法的收敛性及多样性.本文引入模糊预测^[28]的方法,通过非支配排序的方法获取种群的前沿信息,对超平面的系数进行预测,根据个体适应度大小进行选择,这样能在提高多样性和收敛性的同时更好地兼顾分布性能.如图2所示二维坐标系下的3个解的选择过程 x_1, x_2, x_3 ,在自适应边界选择中 x_1 是边界解,其适应度最小应优先选择;对于 x_2, x_3 ,优先选择收敛性较小的即适应度较小的 x_2 .下面介绍模糊预测的具体方法.

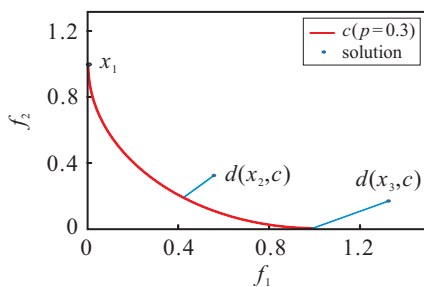


图2 边界选择策略示意

2.3.1 自适应模糊预测

基于自适应超平面的边界选择策略通过利用前沿信息模糊的拟合超平面来选择个体,对种群进行合理的引导,具体的模糊预测步骤如算法3所示.

首先计算经过非支配排序后第1层的个体到系数为 $p = 1$ 超平面的距离

$$Dis^1(x) = \frac{\sum_{i=1}^m f_i^1(x) - 1}{\sqrt{m}}; \quad (1)$$

然后,利用求得距离计算平均值和标准差,有

$$E = \frac{\sum_{x \in F_1} Dis^1(x)}{|F_1|}, \quad (2)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{x \in F_1} (Dis^1(x) - E)^2}{|F_1| - 1}}. \quad (3)$$

根据 E 和 σ 对高维空间中超平面系数 p 按如下步骤进行近似估计.

step 1: 预先设定两个样本集 sp_1 和 sp_2 如下:

$$p' = \begin{cases} 1 - 0.05i, & p' \in sp_1 \text{ and } i = 0, 1, \dots, T_1 - 1; \\ 1 + 0.1i, & p' \in sp_2 \text{ and } j = 0, 1, \dots, T_2 - 1. \end{cases} \quad (4)$$

其中: p' 是 p 的样本值,选取 $T_1 = 17, T_2 = 51$ 分别确定了 sp_1 和 sp_2 的样本大小.

step 2: 计算每个 p' 的平均拟合值记为 $Fit(p')$,通过拟合值在样本中选取最合适的超平面系数,即

$$Fit(p') = \frac{\sum_{i=1}^{|F_1|} \left[\sum_{j=1}^m [f_j^i(x')] p' \right]^{\frac{1}{p'}}}{|F_1|}. \quad (5)$$

step 3: 初步选择与前沿平面拟合最好的超平面系数 p' 作为初步预测的 p 值,如下所示:

$$p = \begin{cases} p' \in sp_1 : \arg \min |Fit(p') - 1|, & E < 0; \\ p' \in sp_2 : \arg \min |Fit(p') - 1|, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

step 4: 对初步预测的 p 值根据 $cv(E$ 与 σ 的比值)进行模糊调整,即

$$p = \begin{cases} 1.0 + cv, & |cv| < 0.1 \wedge r_1 < 0.9; \\ p + r_3, & |cv| > 0.1 \wedge r_2 > 0.9; \\ p, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7)$$

其中: $cv = \sigma/E, r_1$ 和 r_2 在 $[0, 1]$ 内随机取值, r_3 是 $[-0.02, 0.02]$ 内的随机扰动. step 4根据 cv 值调整系数 p 是为了更好地预测线性PF,这种线性的PF示意如图3所示.真实的前沿面远离 HP^1 ,如果 cv 接近于零,则远离超平面的线性PF系数将以更大的概率接近于1,防止线性PF上预测太过偏离.

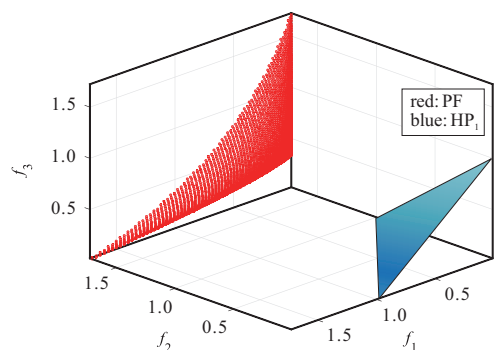


图3 远离超平面线性PF示意

算法3 fuzzy-prededction

input: F_1 (非支配排序第1层的个体);

output: p (自适应超平面).

/* 计算非支配排序第1层个体到超平面的距离 */

- 1) for each $x \in F_1$ do
- 2) compute $\text{Dis}^1(x)$ with (1)
- 3) end
- 4) compute E with (2)
- 5) compute σ with (3)
- 6) preset two samples sets sp_1 and sp_2 with (4)
- 7) calculate $\text{Fit}(p')$ by (5) for each sample p'
/* p 值的预测及调整 */
- 8) preliminarily predict p by (6)
- 9) fuzzily adjust p by (7)
- 10) return p .

2.3.2 基于边界的适应度计算

在充分利用种群的进化前沿信息基础上,对超平面的系数进行实时预测,然后通过计算个体的适应度对个体进行筛选. 基于边界选择的策略中,个体的适应度通过个体与超平面的距离来衡量. 首先,超平面 C 被定义为

$$\left(\sum_{i=1}^m (g_i(x))^p\right)^{1/p} = 1. \quad (8)$$

其中: $\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)\}$ 是超平面 C 上的向量, p 是超平面的曲率. 然后,个体的适应度即个体到超平面的距离,采用文献[16]的计算方式来近似描述. 因为原点到超平面的范式距离是1,所以个体到超平面的范式距离可表示为

$$d(x, C) \approx \left(\sum_{i=1}^m (f_i(x))^p\right)^{1/p} - 1, \quad (9)$$

其中 $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\}$ 是个体目标空间中的向量. 适应度即 $d(x, C)$ 的值越小,个体越接近于预测的超平面.

2.4 计算时间复杂度分析

MaOEA/ABS 的计算时间复杂度主要取决于其环境选择策略. 对具有 m 个目标、种群大小为 $2N$ 个个体的种群进行归一化的计算时间复杂度为 $O(m \times N)$; 非支配排序的计算时间复杂度为 $O(N \log^{M-2} N)$; 二元指标 $I_e(x, y)$ 的计算时间复杂度为 $O(mN^2)$; 自适应模糊预测的时间复杂度为 $O(mNT)$, 其中 T 为系数样本中的个数; 边界适应度的时间复杂度为 $O(mN)$. 因此, MaOEA/ABS 的最大时间复杂度是 $O(mN^2)$. 这与当前优秀算法的计算复杂度是一致的,从而表明 MaOEA/ABS 具有很好的计算效率.

3 仿真实验

本节旨在通过实验研究验证 MaOEA/ABS 的性能. 将所提出的算法与 MaOEA/IBP^[16]、MaOEA/IGD^[29]、EFR-RR^[30]、MOMBI-II^[31]、One by oneEA^[20]

具有代表性的多目标优化算法在 WFG^[32] 和 MaF^[33] 测试函数集上进行对比实验. 本文实验的目标个数是 $M \in \{6, 10, 13\}$, 所有实验在配置为 Inter Core、CPU: i5-1020、8 GB 内存、主频 2.3 GHz 的计算机上进行,程序采用 Matlab 2016a 编写,并在多目标优化算法开源平台 PlatEMO-2.7^[34] 上运行.

3.1 性能指标

为了精确地定量评估算法的综合性能,本文采取两种广泛使用的指标 IGD 和 DM, 并采用反转世代距离来综合评判算法的收敛性和多样性. DM 指标用于评价近似前沿的分布性.

基于反世代距离的 IGD 指标 (inverted distance, IGD)^[35] 兼顾了近似解集的多样性和收敛性,其指标值是通过计算近似最优解与在真实前沿均匀采样的一组参考点之间的距离得到. 对于任意算法,设 P 为算法在目标空间中得到的一个近似最优解集, P^* 为真实前沿上的一组均匀分布的点集,则 IGD 指标的计算公式为

$$\text{IGD}(P) = \frac{1}{|P^*|} \sum_{z^* \in P^*} d(z^*, P). \quad (10)$$

其中: $|P^*|$ 是 P^* 的基数,即真实前沿上集的数目; $d(z^*, P)$ 为真实前沿上的点 $z^* \in P^*$ 与 P 之间的距离. IGD 的指标值越小,表示近似解集的收敛性和分布性越好,越接近真实前沿.

利用分布性指标 DM (diversity metric, DM)^[36-37] 评价种群的分布均匀性,它的取值区间为 $[0, 1]$, DM 指标值越大,说明近似前沿的分布性越好. 该评价指标的参数设置见表 1.

表 1 DM 的网格划分设置

目标数	6	10	13
网格划分	3	3	3

3.2 实验参数设置

1) 种群大小: EFR-RR 的种群数量与权重向量有关,使用文献[25]中的两层参考点分布来产生权重向量. 为了保证算法的公平性,种群大小与其他算法保持一致,所以对于目标数为 6、10、13,各个算法种群大小设置分别是 132、275、182.

2) 进化算子参数设置: 采用二进制交叉和多项式变异. 交叉概率 $p_c = 1.0$, 变异概率 $p_m = 1/n$, 其中 n 是决策空间的维数. 二进制交叉 (SBX) 和多项式变异 (PM) 的分布指标分别是 $\eta_c = 20, \eta_m = 20$.

3) 对比算法参数设置: LEFR-RR 算法的邻域大小设置为 $K = 2$.

4) 决策变量设置: WFG1-9 以及 MaF1-6 测试问

题上 $K = 10$, MaF7测试问题上 $K = 20$, 决策变量的维度是 $D = M + K - 1$. MaF8-9测试问题上决策变量的维度是2, MaF13测试问题上决策变量维度是5.

5) 运行次数及终止条件: 本文所有算法在开

源平台 PlatEMO^[34] 中运行, 每个算法独立运行20次, 记录标准差和平均值. 当目标函数的评价次数 (MFE) 达到30 000时, 算法结束运行, 算法的运行代数 $G_{\max} = \text{MFE}/N$. 具体运行代数如表2所示.

表2 算法的迭代代数

目标数	MaOEA/ABS	MaOEA/IBP	EFR-RR	MaOEA/IGD	One by oneEA	MOMBI-II
6	227	227	227	227	227	227
10	109	109	109	109	109	109
13	164	164	164	164	164	164

3.3 实验结果分析

MaOEA/ABS与MaOEA/IBP、EFR-RR、MaOEA/IGD、One by oneEA、MOMBI-II在19个MaF和WFG测试函数上经过20次独立运行的IGD和DM指标的比对结果如表3和表4所示. 从表中可以看出, MaOEA/ABS在6、10、13共计57个测试函数上IGD指标取得32个全局最优结果, DM指标取得37个全局最优结果, 从而表明MaOEA/ABS算法中指标和自适应边界选择策略的选解方式在非支配排序失效的情况下能更进一步挖掘解的信息, 实现更好的收敛性和多样性, 在处理高维多目标优化问题上具有很大的优势. 本文对各个测试函数的具体分析如下.

针对WFG系列测试函数, WFG1被设计为带有凸的、混合的、偏见的PF; WFG2也是一种凸的、混合的、退化的PF, 其共同的属性都是混合的前沿. 在IGD指标上, MaOEA/ABS虽然比MaOEA/IBP差, 但是相较于其他算法表现较好. 另外, MaOEA/ABS在这两个测试函数上的DM指标整体性能优异, 表明基于指标和边界选择的策略能在保持综合性能的同时更好地维护多样性. WFG3是一种线性、多模、退化的PF, 而且决策变量不可分离, 所以在这个问题上MaOEA/ABS的IGD指标值和DM相对表现较差. WFG4和WFG5被设计为带有凹的、欺骗性的PF, WFG6是一种凹的、多模的PF, WFG7带有凹的、有偏的PF特性, MaOEA/ABS在这几类问题的IGD和DM上均取得了全局最优的结果, 说明本文提出的自适应边界保护策略能较好地拟合前沿, 实现更好的收敛性和多样性. 对于WFG8具有凹的、有偏不可分解的特性, MaOEA/ABS在10维上取得了最好的IGD指标值, 相较于其他算法表现较好. WFG9带有凹的不可分解的PF特性, 在6维、10维和13维上对于IGD指标取得了全局最优的结果. 由DM指标可以看出, 自适应边界保护策略的使用算法在这两类问题上, 在保证综合性能的前提下都展示出了很好的分布性

能. 综合统计结果来看, MaOEA/ABS在WFG测试集上性能优越.

针对MaF系列测试函数, MaF1具有线性、反转的PF, 通过反转DTLZ1前沿形状得到. MaPEA/ABS在此类问题上, IGD和DM指标值都获得了最好的结果. 这是由于MaOEA/ABS通过指标和自适应边界选择策略对个体进行引导, 而其他算法依赖参考点引导个体, 不能很好地适应前沿形状. MaF2具有凹的前沿特性, 对于IGD指标值, 算法在各个维度虽然没有取得全局最优的结果, 但相较于其他算法性能优异. 另外DM整体表现优异. MaF3具有凸的、多模的PF, IGD和DM指标值在6维、10维上取得了全局最优的结果. 在13维上MaOEA/ABS的性能仅次于MaOEA/IBP, 得到了较好的效果. MaF4是由DTLZ3反转得到, 具有凹的、多模、反转、弱缩放特性, 算法在6维、13维上取得了最好的IGD指标值和DM指标值. MaF5是凸的、偏见的、弱缩放的, MaOEA/ABS在10维和13维上IGD指标取得了最优的结果, DM取得了全局最优. MaF6具有凹的、退化的前沿特性, 算法表现较差. MaF7具有混合、退化、多模的PF特性, 算法在IGD上表现最优, DM指标上全局最优. MaF8和MaF9具有线性的、退化的特性, 算法在这类问题上取得了较好的效果. MaF13是凹的、无偏、退化的, 决策变量是非线性的, 算法很难收敛到真实前沿, MaOEA/ABS在这类问题上性能突出, 在DM和IGD指标上都取得了很好的结果.

为了更直观地了解IGD指标值的变化, 验证本文所提出算法的有效性, 图4给出了WFG5、WFG6、WFG7、MaF1随评价次数增加的IGD进化曲线. 可以看出, 本文所提出算法在这些问题上随着评价次数的增加, 能快速降至最小值并稳定在最小值. 其中MOMBI-II和MaOEA-IGD是两种在环境选择中基于不同指标选择的算法, 在进化过程中指标波动较大, 进化过程不稳定, 说明两种算法指标在高维空间上

表3 算法在测试问题上独立运行20次的IGD平均值和标准差

problem	<i>M</i>	<i>D</i>	MaOEA/ABS	MaOEA/IBP	One by oneEA	MaOEA/IGD	EFR-RR	MOMBI-II
WFG1	6	15	1.243 7e+0 (1.35e-1)	6.461 4e-1 (5.30e-2)	1.360 4e+0 (8.15e-2)	1.820 8e+0 (4.04e-1)	9.761 8e-1 (1.06e-1)	1.167 5e+0 (1.62e-1)
	10	19	2.476 8e+0 (1.91e-1)	1.664 6e+0 (1.17e-1)	2.693 2e+0 (1.05e-1)	3.144 0e+0 (3.42e-2)	1.948 4e+0 (1.03e-1)	1.496 0e+0 (1.24e-1)
	13	22	2.689 4e+0 (1.66e-1)	1.829 6e+0 (9.34e-2)	3.080 0e+0 (1.76e-1)	2.867 0e+0 (1.98e-1)	2.226 1e+0 (1.08e-1)	1.988 0e+0 (1.71e-1)
WFG2	6	15	7.493 4e-1 (2.02e-2)	7.049 1e-1 (3.05e-2)	1.086 8e+0 (5.63e-2)	1.888 3e+0 (7.96e-1)	7.334 2e-1 (2.26e-2)	9.907 3e-1 (6.61e-2)
	10	19	1.125 5e+0 (4.18e-2)	1.114 6e+0 (2.95e-2)	1.653 9e+0 (9.05e-2)	1.898 1e+0 (7.35e-1)	1.085 3e+0 (5.57e-2)	1.788 5e+0 (9.36e-1)
	13	22	1.844 8e+0 (1.09e-1)	1.808 2e+0 (6.26e-2)	2.327 5e+0 (8.29e-2)	2.092 9e+0 (3.13e-1)	1.875 7e+0 (1.29e-1)	6.986 5e+0 (2.77e+0)
WFG3	6	15	2.042 3e+0 (4.56e-1)	4.587 5e-1 (5.99e-2)	2.105 7e+0 (2.05e-1)	3.303 4e+0 (3.03e+0)	9.213 4e-1 (1.02e-1)	1.489 1e+0 (2.09e-1)
	10	19	3.605 8e+0 (6.76e-1)	1.107 3e+0 (1.00e-1)	5.456 9e+0 (8.89e-1)	1.668 8e+0 (1.18e-1)	1.103 2e+0 (1.28e-1)	7.119 0e+0 (2.67e-1)
	13	22	5.880 3e+0 (1.21e+0)	2.061 4e+0 (4.30e-1)	8.683 9e+0 (1.78e+0)	4.331 8e+0 (2.58e-1)	2.164 4e+0 (2.66e-1)	1.140 1e+1 (2.33e-1)
WFG4	6	15	1.840 3e+0 (7.02e-2)	1.884 2e+0 (2.20e-2)	2.567 0e+0 (1.38e-1)	4.561 1e+0 (2.05e+0)	1.937 3e+0 (3.33e-2)	2.899 2e+0 (2.36e-1)
	10	19	4.089 5e+0 (5.20e-2)	4.208 5e+0 (7.20e-2)	5.792 8e+0 (1.94e-1)	9.568 0e+0 (1.09e+0)	4.630 5e+0 (3.92e-2)	5.794 1e+0 (4.57e-1)
	13	22	6.736 5e+0 (1.29e-1)	6.918 7e+0 (1.51e-1)	8.961 8e+0 (2.15e-1)	8.159 9e+0 (5.80e-1)	7.610 9e+0 (1.26e-1)	1.454 4e+1 (1.69e+0)
WFG5	6	15	1.831 0e+0 (5.20e-2)	1.904 8e+0 (1.95e-2)	2.502 9e+0 (1.70e-1)	3.845 4e+0 (2.16e+0)	2.067 7e+0 (5.34e-2)	2.846 2e+0 (1.78e-1)
	10	19	4.049 9e+0 (4.17e-2)	4.502 4e+0 (5.75e-2)	6.227 4e+0 (1.22e-1)	8.198 4e+0 (7.08e-1)	4.864 6e+0 (6.61e-2)	5.458 1e+0 (3.56e-2)
	13	22	6.564 2e+0 (9.68e-2)	7.145 1e+0 (1.25e-1)	9.305 4e+0 (1.04e-1)	7.583 5e+0 (2.08e-1)	7.510 2e+0 (7.08e-2)	2.003 4e+1 (2.72e+0)
WFG6	6	15	1.841 5e+0 (4.68e-2)	1.956 9e+0 (2.65e-2)	3.039 2e+0 (1.03e-1)	6.804 5e+0 (2.26e+0)	2.019 9e+0 (6.14e-2)	3.079 1e+0 (3.15e-1)
	10	19	4.140 0e+0 (4.35e-2)	4.813 2e+0 (7.81e-2)	6.864 3e+0 (2.16e-1)	8.233 8e+0 (7.76e-1)	5.090 9e+0 (8.63e-2)	5.342 4e+0 (2.80e-2)
	13	22	6.792 9e+0 (2.92e-1)	7.423 4e+0 (1.63e-1)	1.045 4e+1 (2.75e-1)	1.094 0e+1 (5.00e+0)	7.920 7e+0 (7.18e-2)	1.142 3e+1 (1.95e+0)
WFG7	6	15	1.844 6e+0 (5.05e-2)	1.948 1e+0 (3.74e-2)	3.153 6e+0 (1.85e-1)	4.814 4e+0 (1.54e+0)	1.991 4e+0 (5.07e-2)	2.921 1e+0 (2.75e-1)
	10	19	4.071 5e+0 (3.96e-2)	4.404 1e+0 (4.07e-2)	6.015 9e+0 (2.58e-1)	8.937 2e+0 (7.70e-1)	4.702 2e+0 (7.91e-2)	5.408 4e+0 (1.33e-1)
	13	22	6.533 8e+0 (9.93e-2)	7.019 5e+0 (1.07e-1)	8.451 8e+0 (2.69e-1)	8.423 6e+0 (4.27e-1)	7.585 9e+0 (9.80e-2)	1.157 8e+1 (1.50e+0)
WFG8	6	15	2.197 2e+0 (7.35e-2)	1.929 4e+0 (1.94e-2)	2.761 5e+0 (1.99e-1)	5.510 4e+0 (2.04e+0)	1.991 0e+0 (3.98e-2)	3.653 3e+0 (5.43e-2)
	10	19	4.431 9e+0 (1.45e-1)	4.651 0e+0 (9.22e-2)	6.483 3e+0 (4.77e-1)	9.671 7e+0 (8.43e-1)	4.545 6e+0 (8.87e-2)	6.203 9e+0 (8.25e-1)
	13	22	7.347 9e+0 (3.82e-1)	7.181 6e+0 (1.92e-1)	9.059 1e+0 (9.01e-1)	9.044 7e+0 (7.01e-1)	7.976 9e+0 (2.11e-1)	1.641 1e+1 (1.73e+0)
WFG9	6	15	1.812 4e+0 (3.89e-2)	1.823 1e+0 (3.59e-2)	2.449 9e+0 (1.49e-1)	3.839 4e+0 (1.78e+0)	1.938 7e+0 (5.49e-2)	3.515 3e+0 (4.64e-2)
	10	19	4.128 6e+0 (4.89e-2)	4.164 3e+0 (5.88e-2)	5.448 7e+0 (2.04e-1)	9.288 7e+0 (9.55e-1)	4.498 5e+0 (7.99e-2)	5.304 4e+0 (7.78e-2)
	13	22	6.667 7e+0 (1.05e-1)	6.842 6e+0 (8.74e-2)	8.265 8e+0 (2.10e-1)	8.398 4e+0 (3.63e-1)	7.391 4e+0 (1.34e-1)	1.872 6e+1 (3.68e+0)
MaF1	6	15	1.775 9e-1 (2.20e-3)	1.783 3e-1 (2.85e-3)	2.259 4e-1 (7.13e-2)	3.144 0e-1 (9.78e-3)	3.144 5e-1 (2.06e-2)	2.484 3e-1 (1.96e-3)
	10	19	2.504 5e-1 (3.07e-3)	2.539 4e-1 (3.22e-3)	4.790 5e-1 (2.11e-2)	4.178 7e-1 (3.25e-2)	4.828 0e-1 (3.18e-2)	3.722 3e-1 (1.68e-2)
	13	22	3.237 2e-1 (8.36e-3)	3.251 7e-1 (6.04e-3)	5.472 7e-1 (2.45e-2)	4.090 7e-1 (9.17e-3)	6.197 4e-1 (5.71e-2)	4.664 3e-1 (1.33e-2)
MaF2	6	15	1.376 4e-1 (6.73e-3)	1.372 9e-1 (6.42e-3)	2.000 0e-1 (2.79e-2)	3.332 2e-1 (1.96e-1)	1.582 3e-1 (1.03e-2)	2.529 4e-1 (5.99e-3)
	10	19	1.862 0e-1 (9.20e-3)	1.845 5e-1 (7.87e-3)	5.822 4e-1 (2.79e-2)	5.156 5e-1 (4.18e-2)	2.197 0e-1 (2.05e-2)	4.720 8e-1 (8.81e-2)
	13	22	3.135 3e-1 (2.43e-2)	3.126 2e-1 (2.32e-2)	6.111 7e-1 (3.26e-2)	4.901 5e-1 (3.55e-2)	3.127 4e-1 (3.05e-2)	7.939 5e-1 (8.90e-3)
MaF3	6	15	2.552 4e-1 (4.39e-1)	8.153 2e-1 (1.81e+0)	2.213 2e+1 (2.02e+1)	2.680 3e+1 (1.59e+1)	1.537 4e+2 (2.90e+2)	4.612 4e-1 (7.94e-1)
	10	19	1.373 5e+1 (1.56e+1)	5.491 7e+1 (1.71e+2)	8.457 5e+2 (5.11e+2)	3.313 3e+4 (1.67e+4)	1.170 5e+3 (2.01e+3)	1.893 2e+1 (2.98e+1)
	13	22	1.968 0e+1 (4.11e+1)	1.226 6e+1 (2.08e+1)	4.065 7e+2 (2.51e+2)	6.637 4e+1 (6.75e+1)	2.710 5e+2 (3.95e+2)	3.626 0e+0 (3.87e+0)
MaF4	6	15	5.838 0e+0 (3.18e+0)	7.655 3e+0 (5.12e+0)	2.032 1e+1 (4.71e+0)	7.252 6e+1 (3.52e+1)	3.513 8e+1 (3.56e+1)	9.895 9e+0 (4.49e+0)
	10	19	3.878 6e+2 (2.62e+2)	6.859 5e+2 (8.27e+2)	2.645 5e+2 (1.57e+2)	9.119 7e+4 (1.74e+4)	3.786 0e+3 (2.42e+3)	3.863 8e+2 (4.80e+2)
	13	22	8.576 2e+2 (1.10e+3)	1.301 3e+3 (1.46e+3)	2.446 9e+3 (7.49e+2)	3.114 4e+4 (2.08e+4)	3.294 9e+4 (1.68e+4)	1.472 1e+3 (1.04e+3)
MaF5	6	15	5.590 8e+0 (1.93e+0)	5.413 7e+0 (5.74e-1)	1.128 4e+1 (1.04e+0)	1.199 5e+1 (2.25e+0)	5.906 4e+0 (1.91e-1)	7.580 4e+0 (2.34e+0)
	10	19	4.814 0e+1 (1.97e+0)	5.083 4e+1 (1.81e+0)	2.107 8e+2 (1.49e+1)	3.039 8e+2 (4.41e+0)	8.480 6e+1 (1.07e+1)	8.182 4e+1 (2.62e+0)
	13	22	3.618 1e+2 (2.45e+1)	4.063 2e+2 (3.86e+1)	1.523 4e+3 (2.87e+1)	1.996 2e+3 (2.07e+0)	8.672 7e+2 (8.30e+1)	8.365 3e+2 (1.08e+2)
MaF6	6	15	7.802 3e-3 (1.05e-3)	7.743 9e-3 (1.02e-3)	3.416 9e-3 (8.77e-5)	6.554 7e-1 (1.23e-1)	1.083 2e-1 (2.23e-2)	6.743 8e-1 (1.22e-1)
	10	19	2.133 3e+0 (1.43e+0)	1.968 9e+0 (1.27e+0)	2.996 5e-3 (1.35e-4)	3.777 3e+0 (1.21e+0)	3.273 0e-1 (1.18e-1)	5.404 5e-1 (1.97e-1)
	13	22	2.311 6e+0 (1.41e+0)	2.112 0e+0 (1.09e+0)	3.387 9e-3 (1.05e-4)	6.418 6e-1 (1.79e-1)	2.709 8e-1 (1.00e-1)	6.907 8e-1 (1.01e-1)
MaF7	6	25	3.915 3e-1 (6.98e-2)	3.695 0e-1 (6.62e-2)	6.411 3e-1 (6.82e-2)	9.244 6e-1 (5.71e-2)	5.619 5e-1 (4.26e-2)	6.906 4e-1 (2.08e-1)
	10	29	7.992 0e-1 (3.67e-2)	8.606 3e-1 (5.25e-2)	2.076 4e+0 (3.46e-1)	1.309 6e+1 (2.00e+0)	1.184 0e+0 (1.07e-1)	4.837 1e+0 (5.30e-1)
	13	32	1.445 6e+0 (2.71e-1)	1.355 9e+0 (1.28e-1)	2.579 3e+0 (2.55e-1)	1.882 6e+0 (1.10e-1)	1.783 2e+0 (4.45e-1)	7.823 7e+0 (6.86e-2)
MaF8	6	2	1.244 4e-1 (1.51e-2)	1.224 4e-1 (1.34e-2)	5.670 5e-1 (8.07e-2)	1.055 9e+0 (2.25e-1)	3.621 8e-1 (2.29e-2)	3.427 8e-1 (3.19e-2)
	10	2	1.871 1e-1 (1.19e-1)	1.873 9e-1 (1.08e-1)	2.226 5e-1 (5.81e-2)	7.329 7e+1 (4.13e+1)	6.994 3e-1 (1.55e-1)	1.357 7e+0 (1.49e-1)
	13	2	1.727 3e-1 (3.13e-2)	1.952 7e-1 (5.41e-2)	2.964 0e-1 (8.99e-2)	1.786 5e+0 (4.84e-1)	8.449 2e-1 (1.25e-1)	2.037 3e+0 (3.12e-1)
MaF9	6	2	1.322 7e-1 (5.06e-2)	1.124 2e-1 (1.26e-2)	1.637 7e-1 (4.87e-2)	1.118 4e+0 (7.44e-1)	5.218 1e-1 (9.73e-2)	4.931 9e-1 (3.74e-2)
	10	2	1.567 6e-1 (8.91e-2)	1.173 8e-1 (2.03e-2)	1.872 5e-1 (4.92e-2)	5.472 8e+1 (2.58e+1)	7.410 6e-1 (7.66e-1)	1.546 8e+0 (8.09e-1)
	13	2	2.429 3e-1 (1.92e-1)	7.619 6e-1 (1.99e+0)	7.021 6e-1 (1.90e+0)	5.915 6e+0 (4.64e+0)	1.624 1e+0 (2.47e+0)	5.957 0e+0 (4.03e+0)
MaF13	6	5	1.404 9e-1 (1.96e-2)	1.574 5e-1 (2.72e-2)	1.426 5e-1 (1.70e-2)	9.310 1e-1 (7.72e-2)	4.876 7e-1 (3.47e-2)	3.909 0e-1 (4.40e-2)
	10	5	1.148 2e-1 (1.37e-2)	1.286 4e-1 (2.15e-2)	1.419 0e-1 (1.83e-2)	4.364 4e-1 (8.74e-2)	4.940 2e-1 (1.16e-1)	1.021 9e+0 (1.84e-1)
	13	5	1.457 4e-1 (2.27e-2)	1.480 9e-1 (2.44e-2)	2.183 4e-1 (3.59e-2)	1.397 6e+0 (2.49e-1)	7.453 0e-1 (1.75e-1)	1.467 3e+0 (1.31e-1)
最优统计结果			32/57	17/57	4/57	0/57	2/57	2/57

表4 算法在测试问题上独立运行20次的DM平均值和标准差

problem	M	D	MaOEA/ABS	MaOEA/IBP	One by oneEA	MaOEA/IGD	EFR-RR	MOMBI-II
WFG1	6	15	5.360 2e-1 (2.50e-2)	5.705 9e-1 (1.56e-2)	3.957 1e-1 (2.79e-2)	2.119 6e-1 (5.22e-2)	5.704 1e-1 (4.32e-2)	2.722 6e-1 (8.55e-2)
	10	19	3.760 9e-1 (2.63e-2)	4.729 3e-1 (2.88e-2)	2.534 9e-1 (3.41e-2)	1.448 3e-1 (1.31e-2)	4.099 5e-1 (2.63e-2)	3.474 4e-1 (2.70e-2)
	13	22	3.978 0e-1 (2.34e-2)	4.194 0e-1 (2.85e-2)	3.050 6e-1 (3.78e-2)	2.114 8e-1 (3.37e-2)	3.375 9e-1 (3.32e-2)	2.747 6e-1 (2.31e-2)
WFG2	6	15	5.500 3e-1 (1.81e-2)	4.718 4e-1 (2.19e-2)	3.668 3e-1 (1.22e-2)	1.383 8e-1 (2.17e-2)	5.436 7e-1 (1.99e-2)	2.966 1e-1 (1.05e-1)
	10	19	6.017 3e-1 (2.35e-2)	5.733 6e-1 (1.38e-2)	3.787 4e-1 (1.53e-2)	5.408 8e-1 (5.02e-2)	5.365 1e-1 (3.10e-2)	2.984 2e-1 (6.26e-2)
	13	22	5.140 0e-1 (2.59e-2)	4.546 3e-1 (1.81e-2)	2.957 2e-1 (1.23e-2)	3.314 9e-1 (8.14e-2)	3.559 0e-1 (3.98e-2)	1.537 8e-1 (4.12e-2)
WFG3	6	15	1.504 8e-1 (1.56e-2)	2.434 9e-1 (1.45e-2)	1.839 0e-1 (8.10e-3)	5.615 5e-1 (3.61e-1)	2.341 2e-1 (1.28e-2)	1.675 4e-1 (3.21e-2)
	10	19	1.348 4e-1 (7.61e-3)	1.546 4e-1 (6.71e-3)	1.050 5e-1 (6.93e-3)	1.299 6e-1 (4.51e-3)	2.135 6e-1 (1.89e-2)	1.711 9e-1 (2.78e-2)
	13	22	1.135 4e-1 (1.33e-2)	1.290 9e-1 (1.37e-2)	7.105 2e-2 (4.58e-3)	6.788 8e-2 (6.90e-3)	1.615 8e-1 (9.30e-3)	7.871 1e-2 (1.88e-2)
WFG4	6	15	6.304 7e-1 (1.10e-2)	4.773 1e-1 (1.92e-2)	4.864 4e-1 (2.14e-2)	3.257 1e-1 (1.52e-1)	4.949 0e-1 (2.60e-2)	2.936 4e-1 (6.35e-2)
	10	19	4.670 7e-1 (2.71e-2)	3.622 9e-1 (3.34e-2)	3.641 5e-1 (2.17e-2)	2.545 9e-1 (2.11e-2)	2.562 3e-1 (2.26e-2)	1.966 8e-1 (2.40e-2)
	13	22	4.282 1e-1 (2.66e-2)	3.236 2e-1 (3.04e-2)	3.067 9e-1 (2.16e-2)	2.248 9e-1 (4.14e-2)	3.079 7e-1 (2.59e-2)	1.249 0e-1 (1.98e-2)
WFG5	6	15	6.216 1e-1 (1.32e-2)	4.422 6e-1 (2.10e-2)	4.721 7e-1 (1.95e-2)	2.595 5e-1 (8.11e-2)	4.545 2e-1 (1.57e-2)	1.812 9e-1 (3.25e-2)
	10	19	4.530 8e-1 (1.97e-2)	2.781 3e-1 (2.05e-2)	3.322 3e-1 (2.15e-2)	3.058 9e-1 (1.14e-2)	2.497 6e-1 (1.98e-2)	1.789 8e-1 (1.02e-2)
	13	22	4.294 1e-1 (2.49e-2)	2.248 3e-1 (2.29e-2)	2.969 5e-1 (1.81e-2)	1.866 6e-1 (1.60e-2)	2.978 1e-1 (2.80e-2)	9.032 1e-2 (2.47e-2)
WFG6	6	15	6.275 0e-1 (1.82e-2)	4.130 6e-1 (1.43e-2)	4.018 3e-1 (1.74e-2)	4.402 6e-1 (3.53e-1)	4.282 5e-1 (2.18e-2)	2.333 8e-1 (6.31e-2)
	10	19	4.347 5e-1 (3.40e-2)	2.412 8e-1 (1.40e-2)	2.852 4e-1 (1.89e-2)	3.036 3e-1 (1.79e-2)	2.070 9e-1 (2.36e-2)	1.845 4e-1 (1.21e-2)
	13	22	4.090 1e-1 (1.99e-2)	1.783 6e-1 (2.38e-2)	2.474 5e-1 (1.85e-2)	2.217 6e-1 (2.20e-1)	2.618 5e-1 (1.56e-2)	1.694 2e-1 (3.51e-2)
WFG7	6	15	6.201 4e-1 (1.66e-2)	4.493 8e-1 (1.61e-2)	4.158 9e-1 (2.18e-2)	1.265 2e-1 (5.56e-2)	4.573 3e-1 (2.35e-2)	2.872 5e-1 (6.41e-2)
	10	19	4.597 9e-1 (2.24e-2)	2.889 1e-1 (1.98e-2)	3.520 9e-1 (2.18e-2)	2.907 9e-1 (1.68e-2)	2.526 1e-1 (2.32e-2)	2.144 3e-1 (2.56e-2)
	13	22	4.369 9e-1 (3.71e-2)	2.657 0e-1 (2.46e-2)	3.899 9e-1 (2.92e-2)	2.746 2e-1 (4.25e-2)	3.611 1e-1 (2.58e-2)	1.704 8e-1 (2.82e-2)
WFG8	6	15	6.647 2e-1 (9.78e-3)	4.648 2e-1 (1.21e-2)	4.472 0e-1 (3.91e-2)	2.744 9e-1 (3.22e-1)	4.682 6e-1 (2.03e-2)	1.050 5e-1 (1.27e-2)
	10	19	4.891 1e-1 (2.97e-2)	3.142 1e-1 (3.17e-2)	2.996 8e-1 (2.92e-2)	2.586 3e-1 (1.58e-2)	3.224 9e-1 (2.71e-2)	2.148 0e-1 (2.78e-2)
	13	22	4.791 5e-1 (3.08e-2)	3.071 2e-1 (3.43e-2)	2.933 5e-1 (5.34e-2)	2.892 2e-1 (3.61e-2)	3.761 8e-1 (4.23e-2)	1.261 1e-1 (2.52e-2)
WFG9	6	15	6.333 7e-1 (1.30e-2)	4.803 6e-1 (2.19e-2)	5.141 6e-1 (1.52e-2)	2.351 9e-1 (1.55e-1)	4.759 6e-1 (2.16e-2)	1.198 4e-1 (1.37e-2)
	10	19	4.840 4e-1 (3.26e-2)	3.881 2e-1 (2.86e-2)	4.133 6e-1 (2.12e-2)	3.055 5e-1 (1.40e-2)	3.135 1e-1 (2.60e-2)	2.318 0e-1 (1.73e-2)
	13	22	4.625 8e-1 (2.66e-2)	4.097 7e-1 (2.54e-2)	4.159 6e-1 (3.46e-2)	2.709 8e-1 (6.42e-2)	3.679 5e-1 (1.76e-2)	1.116 2e-1 (3.71e-2)
MaF1	6	15	4.175 5e-1 (4.47e-2)	4.248 1e-1 (5.29e-2)	4.197 8e-1 (4.80e-2)	2.437 8e-1 (2.82e-2)	1.826 1e-1 (7.39e-2)	3.066 6e-1 (4.21e-2)
	10	19	3.838 1e-1 (3.68e-2)	4.062 4e-1 (4.15e-2)	2.881 6e-1 (2.36e-2)	2.673 8e-1 (3.55e-2)	2.104 8e-1 (3.62e-2)	2.460 8e-1 (1.77e-2)
	13	22	3.352 6e-1 (4.61e-2)	3.203 0e-1 (2.12e-2)	2.568 3e-1 (2.05e-2)	1.966 0e-1 (1.68e-2)	2.191 6e-1 (3.05e-2)	2.135 1e-1 (1.41e-2)
MaF2	6	15	5.132 2e-1 (1.65e-2)	5.045 2e-1 (2.08e-2)	5.558 5e-1 (2.40e-2)	3.449 6e-1 (1.15e-1)	5.048 2e-1 (2.41e-2)	2.371 0e-1 (1.05e-2)
	10	19	5.747 6e-1 (1.29e-2)	5.714 7e-1 (1.22e-2)	1.825 3e-1 (1.94e-2)	2.081 4e-1 (1.60e-2)	5.010 4e-1 (1.37e-2)	1.914 7e-1 (5.59e-2)
	13	22	4.279 6e-1 (2.22e-2)	4.210 2e-1 (2.52e-2)	1.500 0e-1 (1.95e-2)	2.499 2e-1 (3.93e-2)	4.409 3e-1 (2.84e-2)	3.112 5e-2 (2.48e-3)
MaF3	6	15	4.452 7e-1 (4.87e-2)	4.332 6e-1 (6.66e-2)	1.917 6e-1 (1.27e-1)	1.850 2e-1 (1.45e-1)	9.085 6e-2 (5.04e-2)	3.590 2e-1 (1.34e-1)
	10	19	4.490 2e-1 (5.45e-2)	4.180 7e-1 (5.54e-2)	3.234 2e-1 (2.81e-2)	1.869 7e-1 (4.71e-2)	2.179 6e-1 (5.07e-2)	1.195 6e-1 (5.02e-2)
	13	22	4.220 2e-1 (7.00e-2)	4.409 0e-1 (5.94e-2)	3.250 8e-1 (3.91e-2)	1.551 8e-1 (5.12e-2)	3.003 1e-1 (8.06e-2)	1.081 4e-1 (2.05e-2)
MaF4	6	15	5.732 3e-1 (8.17e-2)	5.279 5e-1 (1.45e-1)	1.925 7e-1 (9.63e-2)	1.304 5e-1 (1.19e-1)	1.779 2e-1 (9.63e-2)	3.576 0e-1 (5.48e-2)
	10	19	1.776 3e-1 (1.34e-1)	1.528 0e-1 (1.25e-1)	1.590 1e-1 (8.00e-2)	4.589 5e-1 (1.92e-1)	4.638 5e-2 (1.28e-2)	2.548 8e-1 (1.96e-1)
	13	22	4.154 8e-1 (1.12e-1)	3.549 9e-1 (1.67e-1)	1.811 1e-1 (6.29e-2)	2.239 0e-1 (2.26e-1)	6.771 2e-2 (9.79e-3)	1.821 9e-1 (5.57e-2)
MaF5	6	15	4.927 1e-1 (5.95e-2)	4.291 1e-1 (3.59e-2)	3.453 7e-1 (2.44e-2)	1.157 6e-1 (4.27e-2)	2.471 0e-1 (1.15e-2)	2.691 9e-1 (2.68e-2)
	10	19	3.087 1e-1 (3.65e-2)	2.455 7e-1 (2.69e-2)	2.017 0e-1 (1.39e-2)	4.099 2e-2 (6.90e-3)	1.996 8e-1 (2.00e-2)	2.190 9e-1 (1.63e-2)
	13	22	2.052 0e-1 (3.97e-2)	1.651 1e-1 (2.54e-2)	1.927 1e-1 (2.25e-2)	7.041 5e-2 (5.44e-3)	1.739 8e-1 (1.41e-2)	1.723 2e-1 (1.98e-2)
MaF6	6	15	7.878 4e-1 (1.66e-2)	7.802 0e-1 (1.62e-2)	8.075 0e-1 (1.19e-2)	5.106 8e-1 (2.45e-1)	5.789 1e-1 (1.08e-1)	1.209 3e-1 (1.53e-1)
	10	19	1.978 2e-1 (2.56e-1)	2.166 6e-1 (2.46e-1)	6.927 4e-1 (1.97e-2)	5.945 8e-1 (1.56e-1)	3.817 9e-1 (1.90e-1)	2.706 5e-1 (2.50e-1)
	13	22	2.072 0e-1 (1.51e-1)	2.409 3e-1 (1.92e-1)	7.339 5e-1 (1.36e-2)	8.053 3e-1 (1.60e-1)	5.205 9e-1 (1.52e-1)	9.564 5e-2 (9.73e-2)
MaF7	6	25	6.215 7e-1 (7.78e-2)	5.802 9e-1 (5.18e-2)	5.307 1e-1 (5.19e-2)	3.148 2e-1 (6.79e-2)	3.469 5e-1 (6.49e-2)	4.933 7e-1 (4.69e-2)
	10	29	9.295 9e-1 (4.18e-2)	6.539 1e-1 (6.66e-2)	8.803 3e-1 (4.39e-2)	6.554 1e-1 (5.90e-2)	6.826 4e-1 (6.60e-2)	7.293 5e-1 (5.63e-2)
	13	32	8.423 6e-1 (9.56e-2)	6.920 7e-1 (7.88e-2)	8.010 4e-1 (3.15e-2)	5.629 2e-1 (2.45e-2)	7.055 2e-1 (6.72e-2)	6.510 2e-1 (4.28e-2)
MaF8	6	2	6.490 6e-1 (1.54e-2)	6.515 4e-1 (1.46e-2)	3.132 4e-1 (4.98e-2)	5.041 7e-2 (3.79e-2)	2.968 0e-1 (3.02e-2)	2.620 8e-1 (2.58e-2)
	10	2	6.426 5e-1 (4.51e-2)	6.352 9e-1 (4.62e-2)	5.483 0e-1 (3.06e-2)	7.625 0e-1 (5.59e-2)	2.399 1e-1 (5.95e-2)	5.463 3e-2 (3.27e-2)
	13	2	6.689 5e-1 (9.59e-3)	6.644 6e-1 (1.27e-2)	5.696 6e-1 (3.63e-2)	1.301 8e-1 (1.07e-1)	2.329 4e-1 (3.94e-2)	2.114 5e-2 (8.62e-3)
MaF9	6	2	7.049 4e-1 (2.20e-2)	6.958 1e-1 (2.09e-2)	6.449 9e-1 (3.20e-2)	1.064 3e-1 (5.86e-2)	3.899 5e-1 (2.91e-2)	1.653 9e-1 (2.40e-2)
	10	2	6.549 2e-1 (5.20e-2)	6.835 5e-1 (1.79e-2)	5.590 4e-1 (3.36e-2)	1.617 8e-1 (2.84e-2)	3.262 5e-1 (4.66e-2)	8.658 2e-2 (5.39e-2)
	13	2	6.381 1e-1 (9.87e-2)	6.286 0e-1 (1.53e-1)	5.972 9e-1 (1.35e-1)	1.408 8e-1 (9.63e-2)	3.173 3e-1 (6.68e-2)	1.768 1e-2 (1.03e-2)
MaF13	6	5	6.733 1e-1 (1.65e-2)	6.608 7e-1 (1.31e-2)	6.644 6e-1 (1.67e-2)	8.868 8e-2 (3.83e-2)	3.269 0e-1 (4.35e-2)	1.853 4e-1 (5.80e-2)
	10	5	6.798 6e-1 (1.36e-2)	6.829 7e-1 (1.43e-2)	6.462 0e-1 (1.56e-2)	4.727 4e-1 (5.58e-2)	2.938 3e-1 (3.22e-2)	1.308 6e-1 (4.06e-2)
	13	5	6.791 1e-1 (2.02e-2)	6.823 5e-1 (1.53e-2)	6.298 8e-1 (2.68e-2)	6.509 9e-2 (2.68e-2)	1.907 8e-1 (3.91e-2)	9.064 2e-2 (2.60e-2)
最优统计结果			37/57	10/57	3/57	4/57	3/57	0/57

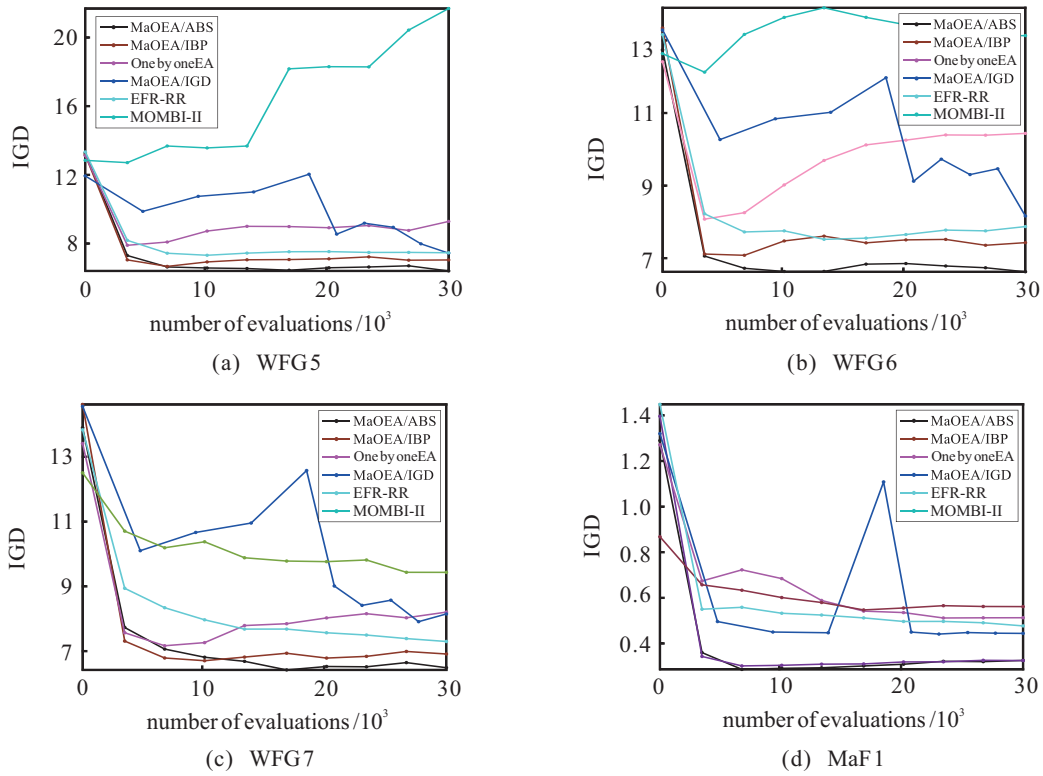


图4 6种算法在WFG5、WFG6、WFG7、MaF1测试问题13目标上的IGD变化曲线

选择个体存在缺陷。One by oneEA和EFR-RR算法的指标收敛能力也弱于本文算法,这是因为边界解的数量会随着目标个数的增加而增加,该算法仅在选解阶段保护 M 个边界解,弱化了算法的性能。MaOEA/IBP算法的性能弱于MaOEA/ABS,原因在于本文所提出的自适应边界的环境选择策略充分利用了种群的进化信息,从而在环境选择中能更好地选择个体,提升了算法的多样性和收敛性。

综合上面的分析,本文算法对于处理复杂Pareto前沿问题具有较大的优势,利用指标和自适应选择策略进行选解,能够提高算法的整体性能,在实现较好的收敛性和分布性的同时,更好地维护了多样性。

为了直观地反映6种算法在解空间中解集的分布情况,图5给出了6种算法在3目标WFG1问题和10目标WFG6测试问题上的解集分布,对于10目标WFG6测试问题采用平行坐标图绘制。由图5可以看出,本文算法在3目标下解的多样性明显优于其他算法。对于10目标WFG6测试问题, MaOEA/IGD、EFR-RR、MaOEA/IBP、MOMBI-II分布性较好,但是收敛性较差; One by oneEA实现了较好的收敛性但是分布性差; MaOEA/ABS实现了较好的收敛性和分布性。

3.4 自适应模糊预测有效性及参数影响分析

1) 自适应模糊预测的有效性分析。

经过实验分析,本文所提出的算法在大多数测试

问题上有着不错的表现,这说明本文的自适应边界选择策略能够及时根据种群当前的进化状态进行预测,引导种群逼近真实前沿。但是,对于一些测试问题如WFG1、WFG2、WFG3,这些测试问题的前沿形状呈现出混合、多模的特性,往往难以预测。对于种群前沿的预测也有很多工作^[38-39],这些方法的预测需要真实的前沿,但在实际应用问题中很难知道真实前沿,而且计算复杂度高。本文的模糊预测方法是根据种群的支配前沿进行预测,相对而言复杂度低且易于实施。

2) 参数影响分析。

在自适应模糊预测中,使用参数 cv 、 r_1 、 r_2 、 r_3 对初步拟合的 p 值进行调整以提高预测的结果。其中: cv 主要对远离超平面的线性前沿进行模糊调整,使得线性问题的预测结果不致于偏离; r_1 、 r_2 、 r_3 参数的取值借鉴模糊系统参数的调整方法,使得预测结果出现一些预想不到的结果,弥补了由于预测不准而引起的性能下降。为了验证参数对预测结果的影响,本文将参数调整的算法(MaOEA/ABS-I)、没有参数调整的算法(MaOEA/ABS-II)在测试问题WFG4、WFG8、MaF1、MaF8、MaF9上进行验证分析,实验结果如表5所示。根据指标结果可以看出,经过参数的调整,改善了预测的效果,算法的性能相应地得到了提升。

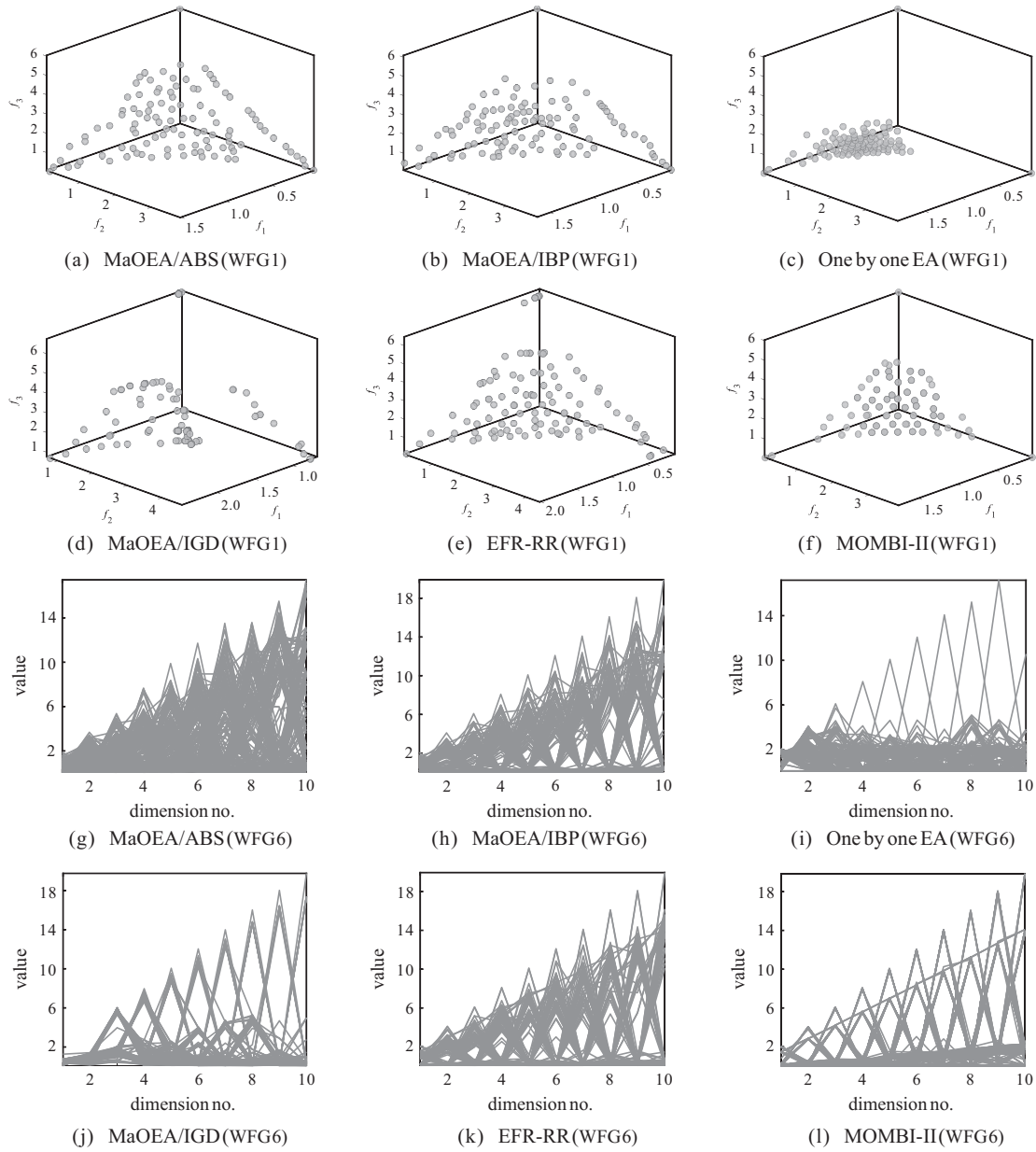


图5 6种算法在3目标WFG1和10目标WFG6测试问题上的解集分布图

表5 独立运行20次IGD指标的方差和标准差

problem	M	D	MaOEA/ABS-I	MaOEA/ABS-II
WFG4	6	15	1.831 7e+0 (4.89e-2)	1.844 1e+0 (6.09e-2)
	10	19	4.097 7e+0 (3.33e-2)	4.100 2e+0 (3.78e-2)
	13	22	6.720 5e+0 (1.51e-1)	6.765 2e+0 (2.33e-1)
WFG8	6	15	2.157 3e+0 (5.34e-2)	2.177 1e+0 (6.58e-2)
	10	19	4.378 3e+0 (1.51e-1)	4.440 0e+0 (1.75e-1)
	13	22	7.214 9e+0 (3.37e-1)	7.219 5e+0 (3.47e-1)
MaF1	6	15	1.782 4e-1 (3.43e-3)	1.792 0e-1 (2.22e-3)
	10	19	2.525 3e-1 (3.25e-3)	2.563 6e-1 (2.89e-3)
	13	22	3.229 7e-1 (6.65e-3)	3.263 1e-1 (6.46e-3)
MaF8	6	2	1.231 1e-1 (2.00e-2)	1.262 1e-1 (1.15e-2)
	10	2	1.784 3e-1 (6.00e-2)	2.097 9e-1 (1.33e-1)
	13	2	1.653 8e-1 (1.75e-2)	1.781 0e-1 (4.89e-2)
MaF9	6	2	1.140 3e-1 (1.22e-2)	1.350 0e-1 (7.41e-2)
	10	2	1.854 3e-1 (1.39e-1)	2.820 3e-1 (4.30e-1)
	13	2	6.258 3e-1 (1.92e+0)	2.039 7e-1 (1.05e-1)
测试结果			14/15	1/15

4 结论

本文针对高维多目标优化问题的求解,为获得好的多样性和收敛性,提出了一种基于指标和自适应边界选择的高维多目标优化算法.该算法使用二元指标值作为第1标准对解进行选择,采用自适应边界选择策略作为第2标准对解进行选择.具体地,在环境选择中,当指标值不能对解进行有效区分时,提出的自适应边界选择策略能够充分利用种群的进化信息,对超平面系数进行模糊预测,然后通过计算个体到超平面的距离来进行解的选择.算法在目标维数为6、10、13的复杂Pareto前沿问题上表现良好,能在平衡收敛性和多样性的同时,更好地维护种群的多样性.但是,所提出算法采用的自适应边界选择策略对一些问题的超平面不能很好地预测,如何利用解的进化信息对超平面进行更好地预测将是下一步将开展

的工作. 此外, 将所提出算法应用于实际问题也是未来研究的主要方向之一.

参考文献(References)

- [1] Wang R, Purshouse R C, Fleming P J. Preference-inspired co-evolutionary algorithm using adaptively generated goal vectors[C]. IEEE Congress on Evolutionary Computation. Cancun, 2013: 916-923.
- [2] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. An indicator-based multiobjective evolutionary algorithm with reference point adaptation for better versatility[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 22(4): 609-622.
- [3] 李俊青, 潘全科, 王玉亭. 多目标柔性车间调度的 Pareto 混合禁忌搜索算法[J]. 计算机集成制造系统, 2010, 16(7): 1419-1426.
(Li J Q, Pan Q K, Wang Y T. Hybrid Pareto-based tabu search algorithm for solving the multi-objective flexible Job Shop scheduling problem[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2010, 16(7): 1419-1426.)
- [4] 伍力, 吴捷, 钟丹虹. 多目标优化改进遗传算法在电网规划中的应用[J]. 电力系统自动化, 2000, 24(12): 45-48.
(Wu L, Wu J, Zhong D H. Application of an improved genetic algorithm in multi-objective power network optimization planning[J]. Automation of Electric Power Systems, 2000, 24(12): 45-48.)
- [5] 申晓宁, 郭毓, 陈庆伟, 等. 基于多目标协同进化算法的多机器人路径规划[J]. 南京航空航天大学学报, 2008, 40(2): 245-249.
(Shen X N, Guo Y, Chen Q W, et al. Multi-robot path planning based on multiobjective co-evolutionary algorithm[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2008, 40(2): 245-249.)
- [6] 朱春阳, 郭晓彤, 孙浩然, 等. 基于极值点搜索和非支配排序的高维多目标优化算法[J]. 小型微型计算机系统, 2018, 39(1): 32-36.
(Zhu C Y, Guo X T, Sun H R, et al. Many-objective optimization algorithm based on nadir point search and nondominated sorting[J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2018, 39(1): 32-36.)
- [7] 赵玉亮, 宋业新, 康丽文. 基于向量角分解的高维多目标进化算法[J]. 控制与决策, 2021, 36(3): 761-768.
(Zhao Y L, Song Y X, Kang L W. Many-objective evolutionary algorithm based on vector angle decomposition[J]. Control and Decision, 2021, 36(3): 761-768.)
- [8] 毕晓君, 张永建, 陈春雨. 基于模糊支配的高维多目标进化算法 MFEA[J]. 电子学报, 2014, 42(8): 1653-1659.
(Bi X J, Zhang Y J, Chen C Y. A many-objective evolutionary algorithm based on fuzzy dominance: MFEA[J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(8): 1653-1659.)
- [9] Yang S X, Li M Q, Liu X H, et al. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2013, 17(5): 721-736.
- [10] Yuan Y, Xu H, Wang B, et al. A new dominance relation-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 20(1): 16-37.
- [11] Zhang Q F, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2007, 11(6): 712-731.
- [12] Qi Y T, Ma X L, Liu F, et al. MOEA/D with adaptive weight adjustment[J]. Evolutionary Computation, 2014, 22(2): 231-264.
- [13] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization[J]. Evolutionary Computation, 2011, 19(1): 45-76.
- [14] Sun Y N, Yen G G, Yi Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(2): 173-187.
- [15] Trautmann H, Wagner T, Brockhoff D. R2-EMOA: Focused multiobjective search using R2-indicator-based selection[C]. International Conference on Learning and Intelligent Optimization. Berlin: Springer, 2013: 70-74.
- [16] Liang Z P, Luo T T, Hu K F, et al. An indicator-based many-objective evolutionary algorithm with boundary protection[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, 51(9): 4553-4566.
- [17] 郭晓彤, 李玲燕, 朱春阳. Pareto 支配关系下两阶段进化高维多目标优化算法[J]. 计算机科学与探索, 2018, 12(8): 1350-1360.
(Guo X T, Li L Y, Zhu C Y. Two phase many-objective optimization algorithm based on Pareto dominance relationship[J]. Journal of Frontiers of Computer Science and Technology, 2018, 12(8): 1350-1360.)
- [18] Tian Y, Zhang X Y, Wang C, et al. An evolutionary algorithm for large-scale sparse multiobjective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2020, 24(2): 380-393.
- [19] Singh H K, Isaacs A, Ray T. A Pareto corner search evolutionary algorithm and dimensionality reduction in many-objective optimization problems[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2011, 15(4):

- 539-556.
- [20] 刘益萍. 高维多目标进化优化理论与方法[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2017.
(Liu Y P. Many-objective evolutionary optimization: Theory and method[D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2017.)
- [21] Xiang Y, Zhou Y R, Yang X W, et al. A many-objective evolutionary algorithm with Pareto-adaptive reference points[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 24(1): 99-113.
- [22] Liu Y P, Gong D W, Sun J, et al. A many-objective evolutionary algorithm using A one-by-one selection strategy[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(9): 2689-2702.
- [23] Xiang Y, Zhou Y R, Li M Q, et al. A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(1): 131-152.
- [24] Cai X Y, Yang Z X, Fan Z, et al. Decomposition-based-sorting and angle-based-selection for evolutionary multiobjective and many-objective optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(9): 2824-2837.
- [25] Dai G M, Zhou C, Wang M C, et al. Indicator and reference points co-guided evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2018, 140: 50-63.
- [26] Zitzler E, Künzli S. Indicator-based selection in multiobjective search[C]. *International Conference on Parallel Problem Solving from Nature—PPSN VIII*, Berlin: Springer, 2004: 832-842.
- [27] 周冲. 基于参考点的高维多目标演化算法研究及其在卫星星座设计中的应用[D]. 武汉: 中国地质大学, 2018.
(Zhou C. Research of reference points based many-objective evolutionary algorithm and application to satellite constellation design problem[D]. Wuhan: China University of Geosciences, 2018.)
- [28] Liu S B, Lin Q Z, Tan K C, et al. A fuzzy decomposition-based multi/many-objective evolutionary algorithm[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 8697(99): 1-15.
- [29] Sun Y N, Yen G G, Yi Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(2): 173-187.
- [30] Yuan Y, Xu H, Wang B, et al. Balancing convergence and diversity in decomposition-based many-objective optimizers[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(2): 180-198.
- [31] Hernández Gómez R, Coello Coello C A. Improved metaheuristic based on the R2 indicator for many-objective optimization[C]. *Proceedings of the Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. New York: ACM, 2015: 679-686.
- [32] Huband S, Hingston P, Barone L, et al. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(5): 477-506.
- [33] Cheng R, Li M Q, Tian Y, et al. A benchmark test suite for evolutionary many-objective optimization[J]. *Complex & Intelligent Systems*, 2017, 3(1): 67-81.
- [34] Tian Y, Cheng R, Zhang X Y, et al. PlatEMO: A Matlab platform for evolutionary multi-objective optimization[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, 12(4): 73-87.
- [35] Coello C A C, Cortés N C. Solving multiobjective optimization problems using an artificial immune system[J]. *Genetic Programming and Evolvable Machines*, 2005, 6(2): 163-190.
- [36] 刘元, 郑金华, 邹娟, 等. 基于邻域竞赛的多目标优化算法[J]. *自动化学报*, 2018, 44(7): 1304-1320.
(Liu Y, Zheng J H, Zou J, et al. An evolutionary algorithm through neighborhood competition for multi-objective optimization[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(7): 1304-1320.)
- [37] Deb K, Jain S. Running performance metrics for evolutionary multi-objective optimization[R]. Kanpur: Indian Institute of Technology Kanpur, 2002/2004, 2002.
- [38] Hernández-Díaz A G, Santana-Quintero L V, Coello Coello C A, et al. Pareto-adaptive ε -dominance[J]. *Evolutionary Computation*, 2007, 15(4): 493-517.
- [39] Zapotecas Martínez S, Sosa Hernández V A, Aguirre H, et al. Using a family of curves to approximate the Pareto front of a multi-objective optimization problem[C]. *The 13th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*. Cham: Springer International Publishing, 2014: 682-691.

作者简介

李二超(1980—), 男, 教授, 博士生导师, 从事人工智能、进化计算、机器人控制等研究, E-mail: lecstarr@163.com;

魏立森(1998—), 男, 博士生, 从事多目标优化的研究, E-mail: 2947095936@qq.com.

(责任编辑: 李君玲)