

控制与决策

Control and Decision

矩形件无约束二维板材剪切的4块排样算法

潘卫平, 樊治平, 黄敏

引用本文:

潘卫平, 樊治平, 黄敏. 矩形件无约束二维板材剪切的4块排样算法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(5): 1211–1219.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1552>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于动态资源权重的多技能项目调度启发式算法

Dynamic resource priority-based heuristics for multi-skill resource constrained project scheduling problem

控制与决策. 2021, 36(10): 2553–2561 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0070>

基于Frenet坐标系的自动驾驶轨迹规划与优化算法

Trajectory planning and optimization algorithm for automated driving based on Frenet coordinate system

控制与决策. 2021, 36(4): 815–824 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0748>

一种基于MOEA/D的组合权重方法

A combination weight method based on MOEA/D

控制与决策. 2021, 36(12): 3056–3062 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0592>

混合碳政策下制造商低碳转型的技术选择策略

Technology selection in low carbon transition of the manufacturer under mixed carbon policy

控制与决策. 2021, 36(7): 1763–1770 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1536>

非局部低秩正则化视频压缩感知重构

Compressive video sensing reconstruction via nonlocal low-rank regularization

控制与决策. 2021, 36(11): 2743–2750 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0310>

矩形件无约束二维板材剪切的4块排样算法

潘卫平^{1†}, 樊治平¹, 黄敏^{2,3}

(1. 东北大学 工商管理学院, 沈阳 110169; 2. 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004;
3. 东北大学 流程工业综合自动化国家重点实验室, 沈阳 110004)

摘要: 针对矩形件无约束二维板材剪切排样问题, 提出一种新的4块排样方式及其生成算法. 该排样方式将板材划分成4个块, 对每个块, 按照递归方式进行排样. 选择一行同种矩形件放置在块的左下角, 沿着这行矩形件的上边界和右边界将该块剩余部分划分成两个更小的子块以待进一步递归考察. 首先, 构造动态规划算法一次性生成所有可能尺寸的块中矩形件的递归排样方式; 然后, 采用隐式枚举算法确定板材的最优4块划分, 得到矩形件在板材上的最优4块排样方式. 采用文献基准例题和符合实际情况的随机例题, 将所提出算法与几种典型的文献算法进行对比, 实验结果表明所提出算法时间复杂度在低于或等于文献算法的前提下, 排样方式价值比文献算法高.

关键词: 剪切排样; 排样算法; 递归排样方式; 4块排样方式; 板材; 矩形件

中图分类号: TH164

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1552

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 潘卫平, 樊治平, 黄敏. 矩形件无约束二维板材剪切的4块排样算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(5): 1211-1219.

A four-block layout algorithm for unconstrained two dimensional plate guillotine cutting problem of rectangular items

PAN Wei-ping^{1†}, FAN Zhi-ping¹, HUANG Min^{2,3}

(1. School of Business Administration, Northeast University, Shenyang 110169, China; 2. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 3. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: A four-block layout and its generation algorithm are proposed for the unconstrained two-dimensional plate guillotine cutting problem of rectangular items, in which the plate is divided into four blocks, and each block is arranged recursively. A row of the same kind of rectangular items is selected and placed in the left lower corner of the block. Along the upper and right boundaries of this row of rectangular items, the rest of the block is divided into two smaller sub blocks for further recursive investigation. Firstly, the recursive layout of rectangular items in all possible size blocks is generated using the dynamic programming algorithm at one time. Then the optimal four-block layout of rectangular items on the plate is determined using the implicit enumeration algorithm. The algorithm is compared with several typical literature algorithms using literature benchmark examples and random examples in accordance with the actual situation. The experimental results show that the time complexity of this algorithm is lower than or equal to the literature algorithm, and the value of layout is higher than that of the literature algorithm.

Keywords: guillotine cutting; layout algorithm; recursion packing; four-block layout; plate; rectangular items

0 引言

矩形件无约束二维板材剪切排样问题是指用剪切工艺将一张大矩形板材切割出若干种小矩形件, 对每种矩形件允许切割的数量无约束, 优化目标是板材切割出的矩形件总价值最大. 该问题在工业领域具有广泛的应用, 例如玻璃、木板、金属板切割下料环

节等. 优良的排样方式, 可以提高板材利用率, 节省生产成本, 增加企业竞争力. 矩形件无约束二维板材剪切排样问题在 Wäscher 等^[1] 的装填布局问题分类中属于矩形件二维单一物体布局问题, 属于典型的组合优化问题, 具有很高的计算复杂度.

矩形件无约束二维板材剪切排样问题目前存在

收稿日期: 2020-11-10; 录用日期: 2021-03-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71871049); 国家自然科学基金重点国际合作研究项目(71620107003); 辽宁省兴辽英才计划项目(XLYC1802115); 流程工业综合自动化国家重点实验室基础科研业务费基金项目(2013ZCX11); 东北大学博士后基金项目(20200311); 中央高校基本科研业务费专项基金项目(N2106008).

†通讯作者. E-mail: weiping209@126.com.

精确算法^[2].按照排样原理的不同,精确算法有分阶段排样算法^[3]和不分阶段排样算法^[2],它们的时间复杂度均为 $O(L^2W^2)$,对于中大规模问题计算时间过长无法满足实际应用需要.目前实际中一般采用启发式算法.

启发式算法通过限制排样方式满足一定的特征来缩小排样方式的解空间,减少算法计算量.常见的排样特征有分阶段排样方式和分块排样方式.

分阶段排样方式采用若干个阶段将板材剪切成长方形件,其中同一个阶段的剪切线互相平行,相邻阶段的剪切线互相垂直.Hifi^[4]提出了两阶段排样方式和三阶段排样方式,构造了利用动态规划算法生成两阶段排样方式,以及利用自顶向下与动态规划相结合的算法生成三阶段排样方式.崔耀东等提出了两种特殊的三阶段排样方式,即T型排样方式^[5]和两段排样方式^[6],构造了利用递归算法生成T型排样方式,以及利用背包问题算法生成两段排样方式.Cui^[7]提出了一种三阶段排样方式新的生成算法.季君等^[8]提出了同质块两段排样方式,该种排样方式是两段排样方式的变形,即用同质块替换两段排样方式的矩形件;通过求解一系列背包问题生成同质块两段排样方式.李华等^[9]提出了双排多段排样方式及其背包模型生成算法,该种排样方式是四阶段排样方式的一种特殊情形,第1阶段将板材切成两个段,第2阶段将段切成块,第3阶段将块切成同质条带,第4阶段将同质条带切成矩形件.季君等^[10]提出了同质条带两阶段排样方式的生成算法.上述算法中前3种算法的时间复杂度为 $O(mLW)$,后3种算法的时间复杂度为 $O(LW(L+W))$,这里 m 为矩形件的种类数, L 、 W 分别为板材的长和宽(单位为mm).

分块排样方式是将板材划分为若干个矩形块,分别考察各块中矩形件的排样方式,按照排样价值最大原则确定各块的大小.一般而言,在各块中矩形件布局模式相同前提下,排样方式解空间随着块数的增加而增大.确定2块的大小,时间复杂度为 $O(L)$ 或 $O(W)$;确定3块和4块的大小,时间复杂度均为 $O(LW)$;确定5块的大小,时间复杂度为 $O(L^2W)$ 或 $O(LW^2)$.由于确定5块及更多块大小的时间复杂度过高,一般分块排样方式的块数不超过4块.

杨传民等^[11]提出了简单块4块排样方式,将板材划分为4个块,每个块中排放相同种类相同方向的矩形件,设计了这种排样方式的优化模型和算法,并分析了利用率上界;杨玉丽等^[12]提出了规范块4块排样方式,在每个块中矩形件按照规范多级

方式排列,可以看出简单块4块排样方式是规范块4块排样方式的子集,故前者排样价值不大于后者;潘卫平等^[13]提出了匀质条带3块排样方式,每个块中排放方向相同的匀质条带,采用动态规划算法确定块中匀质条带的布局,采用隐式枚举法确定板材的3块划分;刘小可等^[14]提出了基于普通块的4块排样方式及其生成算法.上述4种算法时间复杂度均为 $O(mLW)$.潘卫平等^[15]提出了简单块占角排样方式的动态规划算法,时间复杂度为 $O(mL^2W^2/(l_{\min}w_{\min}))$,这里 l_{\min} 为矩形件的最小长度, w_{\min} 为矩形件的最小宽度.Yanasse等^[16]提出了基于两阶段的2块和3块排样方式,每个块中矩形件按照两阶段方式进行排列,建立了这两种排样方式的线性模型,结果表明所提出方法可以求解中小规模问题,该方法时间复杂度未知.

上述文献中时间复杂度为 $O(mLW)$ 的算法虽然计算时间较少,但板材排样价值较低.时间复杂度高于 $O(mLW)$ 的算法计算时间偏长,对于中大规模问题不能较好地满足实际应用需要.

为了寻求一种排样价值高且时间复杂度较低的排样算法,本文提出一种新的4块排样方式及其生成算法.这种排样方式将板材划分成4个块;在每个块的左下角排放一行矩形件,将块的剩余部分划分成2个子块,对子块进行递归排样.设计动态规划算法生成矩形件在块中的优化排样,采用隐式枚举算法确定各个块的大小.

1 问题模型和上下界

1.1 问题描述和模型

矩形件无约束二维板材剪切排样问题:采用剪切工艺将一张尺寸为 $L \times W$ (长为 L ,宽为 W)的板材切割出 m 种矩形件,其中第 i 种矩形件的尺寸为 $l_i w_i$,价值为 v_i , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$,对每种矩形件允许切割的数量无约束,问题目标为寻找一个剪切排样方式使得板材切割出的矩形件总价值最大.

令排样方式 P 中包含第 i 种矩形件的个数为 c_i , V 为排样方式的价值, N 为非负整数集合, P_0 为可行剪切排样方式集合,则该问题的数学模型为

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^m c_i v_i; \\ \text{s.t. } P &\in P_0, \\ c_i &\in N. \end{aligned} \quad (1)$$

模型(1)的第1行约束条件包含3方面的含义:1)矩形件在板材上排列时不超越板材边界;2)矩形

件互不重叠;3)排样方式满足剪切工艺要求,即每次切割时均能将板材一分为二. Birgin 等^[17]建立了矩形件无约束二维非剪切排样问题的整数规划模型,没有考虑排样方式的剪切约束,模型花费 mLW 个 0-1 变量和 LW 个约束条件. 从这可以估计到模型(1)的整数规划形式包含的变量个数不少于 mLW , 约束条件个数不少于 LW . 因为 L 为单位为毫米的板材长度值, W 为板材宽度值, 对于实际排样问题, L 、 W 一般为几千, 故直接采用数学软件求解模型(1)并不现实.

1.2 上界和下界

令 \bar{V} 和 \underline{V} 分别为板材 $L \times W$ 排样价值的上界和下界. 本文给出如下上下界:

$$\bar{V} = LW \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \left\{ \frac{v_i}{l_i w_i} \right\}, \quad (2)$$

$$\underline{V} = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \left\{ v_i \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor \right\}. \quad (3)$$

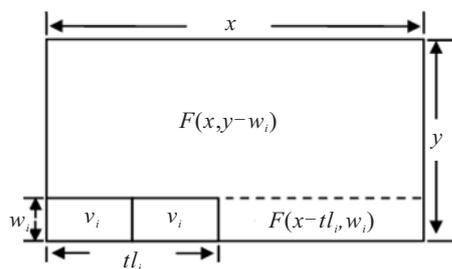
其中: 上界由板材上排满单价最高的矩形件得到, 下界由板材上只排放一种类型的矩形件得到.

2 新的4块排样方式

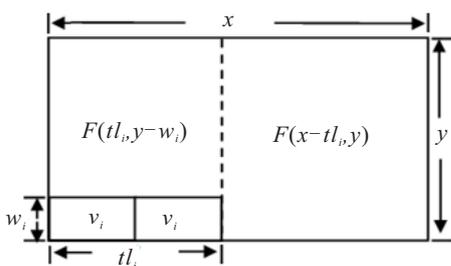
2.1 递归块的相关概念

定义1 递归块: 在块 $x \times y$ (长为 x 、宽为 y) 的左下角从左至右排放一行矩形件 i , 将块剩余部分划分成 2 个子块, 将子块看作新的块, 继续按照上述方式进行矩形件的排放和块剩余部分的划分, 直到块中无法排放矩形件为止.

在块的左下角排放一行 (t 个) 矩形件后, 块剩余部分有两种划分方式, 如图 1(a) 所示, 沿着矩形件上边界的水平剪切线将块剩余部分划分成上下两个子块; 如图 1(b) 所示, 沿着矩形件右边界的竖直剪切线



(a) 沿着矩形件上边界的水平剪切线划分



(b) 沿着矩形件右边界的竖直剪切线划分

图 1 块剩余部分的两种划分方法

将块剩余部分划分成左右两个子块. 称用水平剪切线划分块剩余部分的递归块为 X 向递归块, 用竖直剪切线划分块剩余部分的递归块为 Y 向递归块. 为了限制递归块的复杂性, 控制算法时间复杂度, 规定块左下角排放的矩形件个数 t 不超过常数 α , 本文规定 $\alpha = 5$.

设尺寸为 $x \times y$ 的 X 向递归块的价值为 $F_X(x, y)$, Y 向递归块的价值为 $F_Y(x, y)$, 最优递归块的价值为 $F(x, y)$, 则有如下递推公式:

$$F_X(x, y) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \{ t v_i + F(x, y - w_i) + F(x - t l_i, w_i) \}, \quad (4)$$

$$F_Y(x, y) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, m\}} \{ t v_i + F(t l_i, y - w_i) + F(x - t l_i, y) \}, \quad (5)$$

$$F(x, y) = \max \{ F_X(x, y), F_Y(x, y) \}. \quad (6)$$

式(4)表明, X 向递归块的价值等于左下角 t 个矩形的价值加上子块 $x \times (y - w_i)$ 和子块 $(x - t l_i) \times w_i$ 的价值. 式(5)表明, Y 向递归块的价值等于左下角 t 个矩形的价值加上子块 $t l_i \times (y - w_i)$ 和子块 $(x - t l_i) \times y$ 的价值. 式(6)表明最优递归块的价值等于 X 向递归块和 Y 向递归块的价值较大者.

2.2 4块排样

定义2 递归块4块排样方式: 首先选用父剪切线将板材划分为 2 个板块, 然后用与父剪切线垂直的子剪切线将每个板块再一分为二, 得到 4 个板块. 在每个板块中按照递归块方式排样矩形件, 称这种排样方式为递归块4块排样方式.

如图 2(a) 所示, 先用水平父剪切线将板材划分为上下两个板块, 然后用竖直剪切线将下方的板块划分为 A 、 B 两个子板块, 将上方的板块划分为 C 、 D 两个子板块. 如图 2(b) 所示, 先用竖直父剪切线将板材划分为左右两个板块, 然后用水平剪切线将左边的板块划分为 A 、 B 两个子板块, 将右边的板块划分为 C 、 D 两个子板块. 称父剪切线为水平方向的 4 块方式为 X 向 4 块方式, 父剪切线为竖直方向的 4 块方式为 Y 向 4 块方式.

以板材左下角为原点, 板材的下边为 X 轴, 左边为 Y 轴建立直角坐标系. 对于 X 向 4 块方式, 设其父剪切线方程为 $y = y_1$, 两条子剪切线方程分别为 $x = x_1$ 和 $x = x_2$. 对于 Y 向 4 块方式, 设其父剪切线方程为 $x = x_1$, 两条子剪切线方程分别为 $y = y_1$ 和 $y = y_2$. 在确定了父剪切线和子剪切线的方程后, 便得到

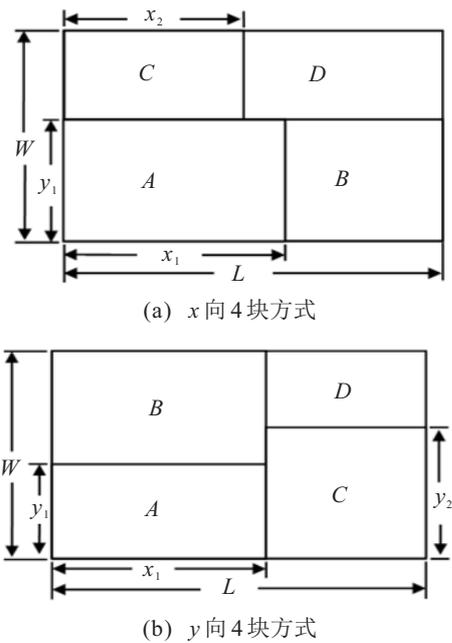


图2 板材的两种4块划分方式

了4个块的尺寸,4块方式即得到了确定. 设 V_X 为 X 向4块方式的价值, V_Y 为 Y 向4块方式的价值, V 为最优4块方式的价值, 则有如下公式:

$$V_X = \max_{0 \leq y_1 \leq \lfloor \frac{W}{2} \rfloor} \{ \max_{0 \leq x_1 \leq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \{ F(x_1, y_1) + F(L - x_1, y_1) \} + \max_{0 \leq x_2 \leq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \{ F(x_2, W - y_1) + F(L - x_2, W - y_1) \} \}, \quad (7)$$

$$V_Y = \max_{0 \leq x_1 \leq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor} \{ \max_{0 \leq y_1 \leq \lfloor \frac{W}{2} \rfloor} \{ F(x_1, y_1) + F(x_1, W - y_1) \} + \max_{0 \leq y_2 \leq \lfloor \frac{W}{2} \rfloor} \{ F(L - x_1, y_2) + F(L - x_1, W - y_2) \} \}, \quad (8)$$

$$V = \max\{V_X(x, y), V_Y(x, y)\}. \quad (9)$$

式(7)表明 X 向4块方式的父剪切线的纵坐标在 $0 \sim \lfloor W/2 \rfloor$ 范围取值, 两条子剪切线的横坐标均在 $0 \sim \lfloor L/2 \rfloor$ 范围取值. 按照板材排样价值最大原则确定父剪切线和子剪切线的坐标. 式(8)与(7)类似. 式(9)表明, 选择 X 向4块方式和 Y 向4块方式中价值较大的一个作为最优4块方式.

3 排样算法

假设板材和矩形件的尺寸均为整数, 矩形件不可转向. 此假设并不影响算法的通用性, 这是因为: 1) 如果板材和矩形件的尺寸不为整数, 则可以按照比例尺将其放大到整数; 2) 对于允许转向 90° 的矩形件, 可将其看成两种矩形件, 新矩形件的长度为原矩形件的

宽度, 新矩形件的宽度为原矩形件的长度.

3.1 规范长度和规范宽度

在研究二维板材排样问题时经常使用规范尺寸概念^[2,8,15]. 规范长度为矩形件长度的线性组合, 规范宽度为矩形件宽度的线性组合. 设 S_L 为规范长度集合, S_W 为规范宽度集合, 则有如下公式:

$$S_L = \left\{ x \in N \mid x = \sum_{i=1}^m a_i l_i, a_i \in N, i = 1, 2, \dots, m \right\}, \quad (10)$$

$$S_W = \left\{ x \in N \mid x = \sum_{i=1}^m b_i w_i, b_i \in N, i = 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (11)$$

文献[2]证明了如下结论: 假设 $S_L(x)$ 为不大于 x 的最大规范长度, $S_W(y)$ 为不大于 y 的最大规范宽度, 则在二维板材剪切排样时, 对于任意尺寸的板材 $x \times y (0 < x \leq L, 0 < y \leq W)$, 其包含的矩形件最大价值等于规范尺寸板材 $S_L(x) \times S_W(y)$ 所包含的矩形件的最大价值.

3.2 递归块的生成算法

对于尺寸为 $x \times y (0 < x \leq L, 0 < y \leq W)$ 的块, 用 $Q(x, y)$ 记录块左下角排放的那行矩形件的序号(在 $1 \sim m$ 之间); $T(x, y)$ 记录块左下角排放的矩形件的个数; $E(x, y) = 1$ 表示用水平剪切线划分块剩余部分, $E(x, y) = 2$ 表示用竖直剪切线划分块剩余部分. 算法步骤如下.

step 1: 初始化, 令 $F(x, y) = Q(x, y) = T(x, y) = E(x, y) = 0, 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq W$.

step 2: 令 $x = 1$.

step 3: 令 $y = 1$.

step 4: 若 $F(x - 1, y) > F(x, y - 1)$, 则令 $F(x, y) = F(x - 1, y), Q(x, y) = Q(x - 1, y), T(x, y) = T(x - 1, y), E(x, y) = E(x - 1, y)$; 否则令 $F(x, y) = F(x, y - 1), Q(x, y) = Q(x, y - 1), T(x, y) = T(x, y - 1), E(x, y) = E(x, y - 1)$.

step 5: 令 $i = 1$.

step 6: 若 $x < l_i$ 或 $y < w_i$, 则转 step 13.

step 7: 令 $t = 1$.

step 8: 令 $x_1 = x, y_1 = y - w_i, x_2 = x - tl_i, y_2 = w_i$.

step 9: 若 $F(x, y) < tv_i + F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)$, 则 $F(x, y) < tv_i + F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2), T(x, y) = t, Q(x, y) = i, E(x, y) = 1$.

step 10: 令 $x_1 = tl_i, y_1 = y - w_i, x_2 = x - tl_i, y_2 = y$.

step 11: 若 $F(x, y) < tv_i + F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)$, 则 $F(x, y) < tv_i + F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)$, $T(x, y) = t$, $Q(x, y) = i$, $E(x, y) = 2$.

step 12: 令 $t = t + 1$, 若 $t \leq \alpha$, 则转 step 8.

step 13: 令 $i = i + 1$, 若 $i \leq m$, 则转 step 6.

step 14: 令 $y = y + 1$, 若 $y \leq W$, 则转 step 4.

step 15: 令 $x = x + 1$, 若 $x \leq L$, 则转 step 3.

step 16: 算法结束.

step 1 初始化所有尺寸的块的价值为0, 排样信息数组 Q 、 T 、 E 取值为0. step 4 表示, 初始化块 $x \times y$ 的价值为块 $(x-1) \times y$ 和块 $x \times (y-1)$ 的价值较大者, 且排样信息与价值较大的块相同. step 6 表示, 如果当前考察的矩形件尺寸过大无法放入块中, 则跳过该种矩形件, 继续考虑下一种矩形件. step 8 表示, 用水平剪切线划分块剩余部分, $x_1 \times y_1$ 、 $x_2 \times y_2$ 分别为上下两个子块的尺寸. step 9 表示, 若对块进行矩形件占角排放和剩余部分划分后, 块现在的价值大于块原先的价值, 则采纳当前排样操作. step 10 和 step 11 与 step 8 和 step 9 类似, 区别在于用垂直剪切线划分块剩余部分.

3.3 4块方式的生成算法

本节仅考虑 Y 向4块方式的生成算法. 对于 X 向4块方式, 可通过互换板材的长度和宽度由 Y 向4块方式生成算法得到. 通过枚举父剪切线和两条子剪切线的方程, 逐个考察所有可能的4块方式, 选择价值最大的一个作为最终解. 如图2(b)所示, 令 $x_A \times y_A$ 、 $x_B \times y_B$ 、 $x_C \times y_C$ 、 $x_D \times y_D$ 分别为块 A 、 B 、 C 、 D 的尺寸; V_A 、 V_B 分别为块 A 和块 B 的价值、 V_{AB} 为块 A 与块 B 的价值之和; V_C 、 V_D 分别为块 C 和块 D 的价值、 V_{CD} 为块 C 与块 D 的价值之和. Y 向4块方式的生成算法步骤如下.

step 1: 令 $V_Y = 0$;

step 2: 令 $x_1 = 0$;

step 3: 令 $V_{AB} = 0$, $V_{CD} = 0$;

step 4: 令 $y_1 = 0$;

step 5: 令 $x_A = x_1$, $y_A = y_1$, $x_B = x_1$, $y_B = W - y_1$;

step 6: 若 $V_{AB} < F(x_A, y_A) + F(x_B, y_B)$, 则令 $V_{AB} = F(x_A, y_A) + F(x_B, y_B)$, $y'_1 = y_1$;

step 7: $y_1 = y_1 + 1$;

step 8: 若 $y_1 \leq W$, 则转 step 5;

step 9: 令 $y_2 = 0$;

step 10: 令 $x_C = L - x_1$, $y_C = y_2$, $x_D = L - x_1$, $y_D = W - y_2$;

step 11: 若 $V_{CD} < F(x_C, y_C) + F(x_D, y_D)$, 则令 $V_{CD} = F(x_C, y_C) + F(x_D, y_D)$, $y'_2 = y_2$;

step 12: $y_2 = y_2 + 1$;

step 13: 若 $y_2 \leq W$, 则转 step 10;

step 14: 若 $V_Y < V_{AB} + V_{CD}$, 则令 $V_Y = V_{AB} + V_{CD}$, $x'_1 = x_1$, $y'_1 = y_1$, $y'_2 = y_2$;

step 15: $x_1 = x_1 + 1$;

step 16: 若 $x_1 \leq L$, 则转 step 3;

step 17: 算法结束.

step 1 表示, 初始化4块方式的价值为0. step 3 表示, 初始化块 A 与块 B 价值之和为0. step 5 表示, 确定块 A 与块 B 的尺寸. step 6 表示, 如果块 A 与块 B 的价值之和比之前大, 则块 A 与块 B 的价值之和取当前值, 且记录下此时子剪切线的方程. step 10 和 step 11 与 step 5 和 step 6 相同. step 14 表示, 如果当前4块方式价值比原先的大, 则令4块方式价值等于当前值, 且记录下此时父剪切线的方程.

3.4 算法的时空复杂度分析

最优递归块4块方式的生成算法步骤如下.

step 1: 根据3.1节求出板材的规范长度集合 S_L 和规范宽度集合 S_W .

step 2: 根据3.2节求出所有规范尺寸板块 $x \times y$ 的递归块排样方式, 其中 $x \in S_L$, $y \in S_W$.

step 3: 调用3.3节 Y 向4块方式生成算法生成最优 X 向4块方式, 并得到其价值 V_X . 其中: x_1 只在规范长度集合 S_L 中取值, y_1 、 y_2 只在规范宽度集合 S_W 中取值.

step 4: 互换板材的长度和宽度, 调用3.3节 Y 向4块方式生成算法得到板材 $W \times L$ 的最优 Y 向4块方式, 从而得到板材 $L \times W$ 的最优 X 向4块方式, 并得到其价值 V_X . 其中: y_1 只在规范宽度集合 S_W 中取值, x_1 、 x_2 只在规范长度集合 S_L 中取值.

step 5: 选择 X 向4块方式和 Y 向4块方式中价值较大者作为最优4块方式, 并得到其价值 $V = \max\{V_X, V_Y\}$.

step 1 计算板材规范长度集合和规范宽度集合, 时间复杂度为 $O(mL + mW)$, 空间复杂度为 $O(mL + mW)$. step 2 确定所有规范尺寸递归块的时间复杂度为 $O(m|L||W|)$, 这里 $|L|$ 为板材 $L \times W$ 的规范长度个数, $|W|$ 为规范宽度个数; 空间复杂度为 $O(|L||W|)$. step 3 和 step 4 的时间复杂度均为 $O(|L||W|)$, 空间复杂度为 $O(|L||W|)$. step 5 的时间复杂度和空间复杂度均为 $O(1)$. 由于 $mL + mW \ll |L||W|$, 本文算法总的时间复杂度为 $O(m|L||W|)$, 空

间复杂度为 $O(L|W|)$.

4 实验结果

采用基准例题、随机例题和实际生产实例将本文算法与文献精确算法和8种启发式算法进行比较.用C#实现本文算法,在Visual Studio2010开发平台进行实验,所用计算机硬件配置为CPU 2.7 GHz,内存2 GB.

4.1 第1组基准例题测试

采用文献[18]给出的20道大规模例题,这组例题目前已经成为二维排样国际通用Benchmark基准例题.例题具有如下特征:矩形件种数在区间[30, 60]取值,板材长度和宽度在区间[1 500, 3 000]取值,矩形件的长度和宽度分别在区间 $[0.05 L, 0.4 L]$ 和区间 $[0.05 W, 0.4 W]$ 取值.前10道例题(APT10~APT19)为无权重排样问题,即矩形件的价值等于矩形件的面积;后10道例题(APT20~APT29)为有权重排样问题,矩形件价值 $v_i = \rho l_i w_i$,其中 ρ 在区间[0.25, 0.75]取值.文献[3]精确算法分别求解了矩形件可转向 90° 情形和不可转向情形.文献[8]、文献[15]求解了矩形件可转向 90° 情形;文献[9]、文献[10]、文献[13]求解了矩形件不可转向情形.

对于矩形件可转向 90° 情形,将本文算法分别与文献[3]精确算法、文献[8]算法和文献[15]算法进行对比.精确算法、文献[8]算法、文献[15]算法和本文算法时间复杂度分别为 $O(L^2W^2)$ 、 $O(LW(m + L + W))$ 、 $O(mL^2W^2/(l_{\min}w_{\min}))$ 和 $O(mLW)$.可见本文算法时间复杂度最低.本文算法求解20道例题共耗时3.39 s,平均每道例题耗时0.17 s.精确算法、文献[8]算法和文献[15]算法平均每道例题分别耗时92.08 s、2.18 s和1.93 s.

表1为本文算法与这3种文献算法排样价值的统计结果,其中符号“ Δ ”表示对应排样价值与精确算法相同.由表1可以看出,对于20道例题,本文算法均求得了精确解.文献[8]有15道例题没有得到精确解.文献[15]有1道例题(APT16)没有得到精确解.可见本文算法在解的质量方面优于文献[8]和文献[15]算法,且与精确算法相同.图3为本文算法求得的例题APT16的排样方式,图中数字表示矩形件的编号,其中“'”表示该种矩形件转向了 90° .

对于矩形件不可转向情形,将本文算法与文献[3]精确算法、文献[9]算法、文献[10]算法、文献[13]算法进行对比.

在计算时间方面,精确算法、文献[9]算法、文献[10]算法、文献[13]算法和本文算法时间复杂度分别

表1 矩形件可转向 90° 情形ATP10~ATP29的排样价值

题号	精确算法	文献[8]	文献[15]	本文算法
APT10	3 591 980	3 591 813	Δ	Δ
APT11	4 190 481	4 189 730	Δ	Δ
APT12	5 162 097	5 157 858	Δ	Δ
APT13	3 498 302	3 498 240	Δ	Δ
APT14	4 466 844	4 466 098	Δ	Δ
APT15	6 054 955	6 054 230	Δ	Δ
APT16	7 573 596	7 573 404	7 573 404	Δ
APT17	4 537 842	Δ	Δ	Δ
APT18	5 835 996	Δ	Δ	Δ
APT19	6 833 281	6 832 852	Δ	Δ
APT20	5 717 092	Δ	Δ	Δ
APT21	3 582 310	3 578 150	Δ	Δ
APT22	4 190 116	4 185 891	Δ	Δ
APT23	3 568 354	3 567 248	Δ	Δ
APT24	4 078 132	Δ	Δ	Δ
APT25	3 546 813	3 538 507	Δ	Δ
APT26	2 723 840	2 723 248	Δ	Δ
APT27	2 458 038	Δ	Δ	Δ
APT28	4 113 349	4 112 224	Δ	Δ
APT29	3 688 965	Δ	Δ	Δ

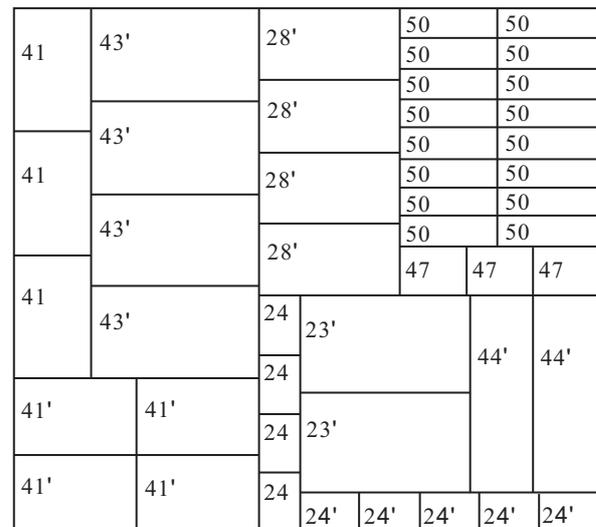


图3 本文算法求得的例题ATP16矩形件方向可转向 90° 情形的排样方式(价值7 573 596)

为 $O(L^2W^2)$ 、 $O(LW(L + W))$ 、 $O(mLW(L + W))$ 、 $O(mLW)$ 和 $O(mLW)$.可见本文算法时间复杂度不高于上述4种文献算法.本文算法求解20道例题共耗时1.78 s,平均每道例题耗时0.089 s,计算时间可以满足实际应用需要.精确算法、文献[9]算法、文献[10]算法和文献[13]算法平均每道例题分别耗时47.63 s、0.39 s、1.57 s和0.023 s.

表2为本文算法与这4种文献算法排样价值的统计结果,符号“-”表示对应值缺省.可以看出,对于20道例题,本文算法有19道例题求得了精确解,剩

表2 矩形件方向固定情形 APT10~APT29的排样价值

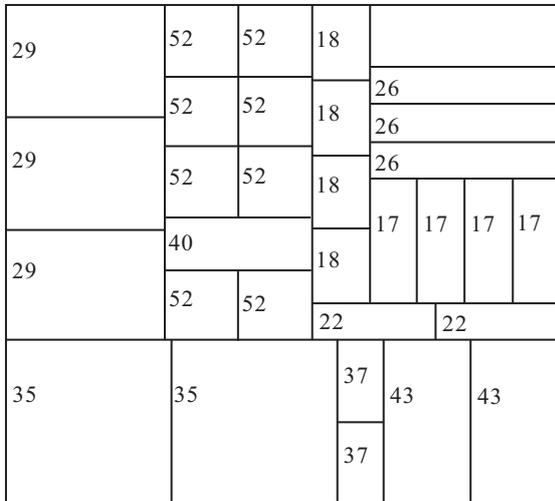
题号	精确算法	文献[9]算法	文献[10]算法	文献[13]算法	本文算法
APT10	3 589 703	3 589 455	3 588 188	3 587 427	△
APT11	4 188 915	4 187 668	4 182 728	4 183 718	△
APT12	5 156 065	5 153 818	5 150 208	5 153 572	△
APT13	3 498 302	3 495 944	3 493 526	3 495 824	△
APT14	4 463 550	△	4 457 710	4 458 984	△
APT15	6 047 188	6 044 283	6 034 933	6 044 200	△
APT16	7 566 719	7 559 660	7 557 769	7 559 453	△
APT17	4 535 302	4 534 815	4 534 815	4 532 015	4 535 262
APT18	5 825 956	5 816 829	5 807 988	5 816 829	△
APT19	6 826 674	6 825 808	6 816 414	6 820 818	△
APT20	5 545 818	5 532 197	5 532 197	5 532 197	△
APT21	3 484 406	△	△	△	△
APT22	4 145 317	4 123 868	4 119 238	4 123 868	△
APT23	3 546 535	3 538 135	-	3 538 135	△
APT24	3 948 037	3 896 332	-	3 896 332	△
APT25	3 507 615	△	-	△	△
APT26	2 683 689	2 656 729	-	2 656 729	△
APT27	2 438 174	2 429 052	-	2 429 052	△
APT28	4 065 011	△	-	△	△
APT29	3 652 858	△	-	△	△

余1道例题未得到精确解,但排样价值比文献[9]算法、文献[10]算法和文献[13]算法高;文献[9]算法和文献[13]算法分别只有5道和4道例题得到了精确解.对于13道例题,文献[10]算法只有1道例题得到了精确解.可见本文算法在解的质量方面优于文献[9]、文献[10]和文献[13]算法,且与精确算法接近.图4为本文算法和文献[9]算法的排样方式.

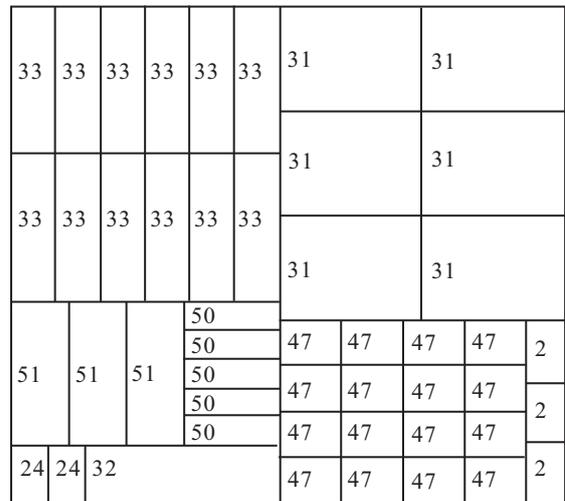
4.2 第2组基准例题测试

采用文献[8]的4.1节的41道Benchmark基准例题,将本文算法与文献[3]精确算法、文献[8]、文献[14]、文献[15]和文献[19]中算法进行对比.对于41道例题,本文算法和文献[15]算法均得到了所有例题的精确解;文献[8]算法有36道例题得到了精确解;文献[14]算法和文献[19]算法分别求解了其中20道例题,分别有5道和16道例题得到了精确解.

文献[14]算法和文献[19]算法时间复杂度与本文算法相同,都为 $O(mLW)$.本文算法、精确算法、文献[8]算法、文献[14]算法和文献[15]算法平均每道例题的计算时间分别为0.062 s、41.67 s、0.51 s、0.53 s和0.48 s.文献[19]未报道算法具体的计算时间.可见本文算法在解的质量和计算时间两方面均有效.



(a) 本文算法的排样(7 566 719)



(b) 文献[9]算法的排样(价值7 559 660)

图4 两种算法分别求出的例题 APT16在矩形件方向固定情形的解

4.3 随机例题测试

采用文献[7]的15道随机例题,参数在如下范围内均匀分布:板材的长度和宽度在区间[2 000, 3 000],矩形件的长度和宽度在区间[50, 1 000],例题1~例题5矩形件种数为50,例题6~例题10矩形件种数为100,例题11~例题15矩形件种数为200.例题的板材尺寸和矩形件尺寸与实际生产实例相当,矩形件可转向90°.

将本文算法与文献[3]精确算法和文献[7]算法进行比较.文献[7]算法时间复杂度与本文算法相同,都为 $O(mLW)$.本文算法、精确算法和文献[7]算法平均每道例题的计算时间分别为0.13 s、127.09 s和0.045 s.

表3给出了本文算法、精确算法、文献[7]算法求出的各例题的排样价值,其中符号“△”表示对应排样价值与精确算法相同.可以看出,本文算法15道例

题的排样价值均与精确算法相同,有13道例题排样价值高于文献[7]算法,剩余2道例题排样价值等于文献[7]算法.

表3 15道随机例题(矩形件可转向90°)的排样价值

题号	精确算法	文献[7]算法	本文算法
1	3 703 951	△	△
2	3 469 500	3 452 692	△
3	4 962 200	4 952 780	△
4	4 745 140	4 735 220	△
5	4 643 644	4 634 949	△
6	3 386 984	3 373 149	△
7	4 241 480	4 230 796	△
8	4 017 851	4 012 501	△
9	4 619 518	4 581 399	△
10	3 800 881	3 783 936	△
11	5 147 322	5 145 146	△
12	5 734 141	△	△
13	4 259 051	4 251 452	△
14	4 270 381	4 269 567	△
15	5 346 324	5 341 661	△

4.4 实际生产实例

某板材切割车间需要采用剪切工艺将尺寸为2 600 mm×2 100 mm的板材切割出35种矩形件,每种矩形件的价值等于其面积,矩形件的尺寸数据如表4所示,例如“420×570”表示该种矩形件的长度为420 mm,宽度为570 mm,对每种矩形件允许切割的数量无约束,矩形件不可转向.要求寻找一个排样方式,使得板材切割出的矩形件总价值最大.文献[3]精确算法求解该实例耗时528.90 s,求得的排样价值为5 449 693.本文算法求解该实例耗时0.26 s.图5为本文算法生成的递归块4块排样方式,排样价值与精确算法相同,板材利用率为99.76%.

表4 35种矩形件的尺寸数据 单位: mm×mm

编号	尺寸	编号	尺寸	编号	尺寸
1	420×570	13	140×360	25	1 000×644
2	875×585	14	494×514	26	808×709
3	400×323	15	423×593	27	860×619
4	504×644	16	442×631	28	577×498
5	706×99	17	689×613	29	399×407
6	487×602	18	154×534	30	641×563
7	1 061×577	19	280×413	31	859×423
8	604×385	20	972×631	32	834×366
9	314×365	21	797×556	33	962×569
10	946×676	22	586×583	34	358×162
11	704×241	23	821×145	35	713×743
12	188×589	24	382×189		

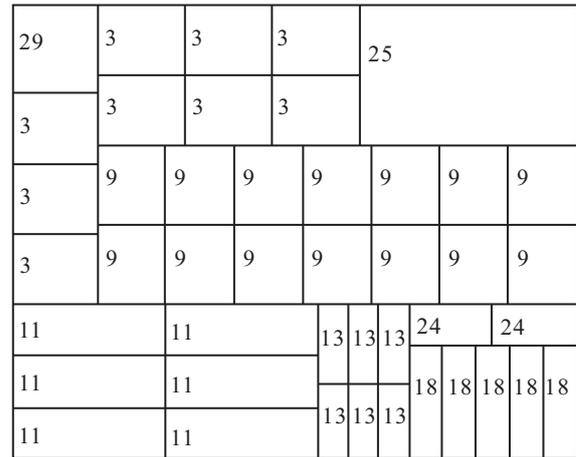


图5 实例的解

5 结论

本文针对矩形件无约束二维板材剪切排样问题,设计了一种新的排样方式——递归块4块排样方式.首先将板材分成4个块,然后按照递归块排样方式将块剪切成所需的矩形件,构造了递归块的动态规划生成算法,设计了隐式枚举算法用以确定板材的最优4块划分.实验结果表明,与文献相关算法相比本文算法时间复杂度较低,排样价值较高.将本文算法与列生成算法相结合,设计矩形件二维板材下料算法可作为今后的研究内容.

参考文献(References)

- [1] Wäscher G, Haussner H, Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 183(3): 1109-1130.
- [2] Beasley J E. Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting[J]. Journal of the Operational Research Society, 1985, 36(4): 297-306.
- [3] Cui Y, Wang Z, Li J. Exact and heuristic algorithms for staged cutting problems[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture, 2005, 219(2): 201-207.
- [4] Hifi M. Exact algorithms for large-scale unconstrained two and three staged cutting problems[J]. Computational Optimization and Applications, 2001, 18(1): 63-88.
- [5] 崔耀东. 生成矩形毛坯最优T形排样方式的递归算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(1): 125-127.
(Cui Y D. Recursive algorithm for generating optimal T-shape cutting patterns of rectangular blanks[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2006, 18(1): 125-127.)
- [6] Cui Y D, He D L, Song X X. Generating optimal two-section cutting patterns for rectangular blanks[J].

- Computers & Operations Research, 2006, 33(6): 1505-1520.
- [7] Cui Y D. A new dynamic programming procedure for three-staged cutting patterns[J]. Journal of Global Optimization, 2013, 55(2): 349-357.
- [8] 季君, 陆一平, 查建中, 等. 生成矩形毛坯最优两段排样方式的确定型算法[J]. 计算机学报, 2012, 35(1): 183-191.
(Ji J, Lu Y P, Zha J Z, et al. A deterministic algorithm for optimal two-segment cutting patterns of rectangular blanks[J]. Chinese Journal of Computers, 2012, 35(1): 183-191.)
- [9] 李华, 崔耀东, 王严欣. 双排多段排样方式及其生成算法[J]. 图学学报, 2016, 37(3): 285-289.
(Li H, Cui Y D, Wang Y X. An algorithm for generating patterns of double-rows and multi segments[J]. Journal of Graphics, 2016, 37(3): 285-289.)
- [10] 季君, 张文增, 邢斐斐, 等. 生成最优同质条带两阶段布局方式的精确算法[J]. 现代制造工程, 2018(7): 17-22.
(Ji J, Zhang W Z, Xing F F, et al. An exact algorithm for generating optimal two stage homogeneous strip layouts[J]. Modern Manufacturing Engineering, 2018(7): 17-22.)
- [11] 杨传民, 王树人, 王心宇. 基于4块结构的斩断切割布局启发性算法[J]. 机械设计, 2007, 24(2): 25-26.
(Yang C M, Wang S R, Wang X Y. Heuristic algorithm on layout of chopped cutting based on 4 pieces of structure[J]. Journal of Machine Design, 2007, 24(2): 25-26.)
- [12] 杨玉丽, 崔耀东, 许道云. 矩形毛坯四块排样方式及其算法[J]. 微电子学与计算机, 2009, 26(4): 156-158.
(Yang Y L, Cui Y D, Xu D Y. An algorithm for generating four-block patterns of rectangular items[J]. Microelectronics & Computer, 2009, 26(4): 156-158.)
- [13] 潘卫平, 陈秋莲, 崔耀东, 等. 基于匀质条带的矩形件最优三块布局算法[J]. 图学学报, 2015, 36(1): 7-11.
(Pan W P, Chen Q L, Cui Y D, et al. An algorithm for generating optimal homogeneous strips three block patterns of rectangular blanks[J]. Journal of Graphics, 2015, 36(1): 7-11.)
- [14] 刘小可, 扈少华, 邓国斌. 基于普通块的四块排样方式及其生成算法[J]. 锻压技术, 2019, 44(11): 51-55.
(Liu X K, Hu S H, Deng G B. Four-ordinary-block cutting pattern and its generation algorithm[J]. Forging & Stamping Technology, 2019, 44(11): 51-55.)
- [15] 潘卫平, 张瑞友. 矩形件简单块占角排样方式的动态规划[J]. 中国图象图形学报, 2019, 24(6): 934-945.
(Pan W P, Zhang R Y. Dynamic programming algorithm for simple block corner-occupying pattern of rectangular blanks[J]. Journal of Image and Graphics, 2019, 24(6): 934-945.)
- [16] Yanasse H H, Morabito R. A note on linear models for two-group and three-group two-dimension guillotine cutting problems[J]. International Journal of Production Research, 2008, 46(21): 6189-6206.
- [17] Birgin E G, Lobato R D, Morabito R. Generating unconstrained two-dimensional non-guillotine cutting patterns by a recursive partitioning algorithm[J]. Journal of the Operational Research Society, 2012, 63(2): 183-200.
- [18] Alvarez-Valdés R, Parajón A, Tamarit J M. A tabu search algorithm for large-scale guillotine (un)constrained two-dimensional cutting problems[J]. Computers & Operations Research, 2002, 29(7): 925-947.
- [19] 薛焕堂, 董海芳, 管卫利. 复合条带两段排样方式的生成算法[J]. 机械设计与制造, 2017(7): 124-127.
(Xue H T, Dong H F, Guan W L. An algorithm for generating composite strip two-segment cutting patterns[J]. Machinery Design & Manufacture, 2017(7): 124-127.)

作者简介

潘卫平 (1989—), 男, 讲师, 博士, 从事系统建模与优化、人工智能等研究, E-mail: weiping209@126.com;

樊治平 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 从事管理决策分析、运作管理等研究, E-mail: zpfan@mail.neu.edu.cn;

黄敏 (1968—), 女, 教授, 博士生导师, 从事物流与供应链管理、生产计划等研究, E-mail: mhuang@mail.neu.edu.cn.

(责任编辑: 孙艺红)