基于区间二型模糊决策粗糙集的三支决策方法

汤国林, 杨文栋, 刘培德

引用本文:
汤国林,杨文栋,刘培德. 基于区间二型模糊决策粗糙集的三支决策方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(5): 1347-1356.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1536

基于区间二型模糊决策粗糙集的三支决策方法

汤国林[1,2†], 杨文栋[1,2], 刘培德[2]

(1. 山东财经大学 海洋经济与管理研究院，济南 250014；2. 山东财经大学 管理科学与工程学院，济南 250014)

摘 要: 考虑到区间二型模糊数在描述高度不确定性信息方面的优势,将区间二型模糊数拓展到决策粗糙集中,提出两种区间二型模糊三支决策方法. 在没有类标签的区间二型模糊信息系统中,解释损失函数与确定条件概率是需要解决的两个关键问题. 首先,根据区间二型模糊数的性质,将其引入决策粗糙集中,为损失函数提供一种新的解释. 其次,基于贝叶斯决策过程,构造区间二型模糊决策粗糙集的基础模型. 然后,选取区间二型模糊数的组合排序与可能度排序,设计两种策略来推导区间二型模糊决策粗糙集的决策规则. 对于条件概率,利用灰色关联分析方法对其评估. 在此基础上,给出两种在区间二型模糊信息系统下的基于区间二型模糊决策粗糙集的三支决策方法. 这两种方法不仅考虑了决策风险,而且给出了方案的排序结果和客观分类结果,补充完善了灰色关联分析的决策结果. 最后,通过算例分析佐证所提出方法的有效性.

关键词: 区间二型模糊数；决策粗糙集；三支决策；灰色关联分析

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1536

引用格式: 汤国林, 杨文栋, 刘培德. 基于区间二型模糊决策粗糙集的三支决策方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(5): 1347-1356.

Three-way decisions based on decision-theoretic rough sets with interval type-2 fuzzy information

TANG Guo-lin[1,2†], *YANG Wen-dong*[1,2], *LIU Pei-de*[2]

(1. Institute of Marine Economy and Management，Shandong University of Finance and Economics，Ji'nan 250014，China；2. School of Management Science and Engineering，Shandong University of Finance and Economics，Ji'nan 250014，China)

Abstract: Considering the advantage of interval type-2 fuzzy sets (IT2FSs) in describing highly uncertain information, this paper extends IT2FSs to decision-theoretic rough sets (DTRSs), and proposes two interval type-2 fuzzy (IT2F) decision-making approaches for deriving three-way decisions. In the IT2F information system without class labels, the interpretation of loss function and the determination of conditional probability are two fundamental issues to be addressed. Based on the properties of IT2FSs, IT2FSs are firstly introduced into DTRSs, which offers a novel illustration for the loss function. Then, in light of the Bayesian decision procedure, an IT2F DTRS (IT2FDTRS) model is established. In addition, two methods are designed for deriving three-way decisions with the aid of two IT2F ranking techniques, namely, the combined ranking method and the possibility degree. Meanwhile, IT2F grey relational analysis is used to determine the conditional probability. Furthermore, two three-way decision methods are proposed based on the IT2FDTRS in the IT2F information system. The proposed approaches not only consider the decision risk, but also tell us the ranking results and objective classification results of alternatives, which can replenish the decision results of grey relational analysis. Finally, a practical example is provided to demonstrate the validity of the proposed three-way decision methods.

Keywords: interval type-2 fuzzy sets；decision-theoretic rough sets；three-way decisions；grey relational analysis

0 引 言

决策粗糙集是由Yao等[1]提出的用于处理不完整、不确定以及不精确信息与知识的有力工具,它把贝叶斯最小风险决策理论拓展到粗糙集模型中,通过两两比较各种决策的期望损失,获得最小风险代价的分类决策,以此作为将对象划分到正域、边界域以及负域的依据,最终形成三支决策,即接受决策、延迟决策和拒绝决策. 基于决策粗糙集的三支决策优于

收稿日期: 2020-11-07；**录用日期:** 2021-03-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71771140).

责任编委: 李登峰.

†通讯作者. E-mail: guolin_tang@163.com.

传统的二支决策,将延迟决策看作一种可行的决策形式,更加符合人类智能处理复杂决策问题的模式,适合在决策信息不明确、可用信息不充分的背景下作出最小风险损失的评估决策[2]. 鉴于决策粗糙集的优势,其衍生的三支决策被广泛应用到风险评估[3]、股票投资[4]、资源配置[5]及医疗分析[6]等领域.

损失函数与条件概率是决策粗糙集模型的两个基本要素. 因此,如何准确地评估损失函数与合理地确定条件概率是决策粗糙集模型中需要解决的两个关键问题. 在损失函数的评估方面,文献[2]根据决策者的风险偏好类型,提出一种评估损失函数的方法;文献[7]根据成本与收益函数,给出一种测度损失函数的方法;文献[8]指出可以直接根据金钱、精力以及时间等准则来估算损失函数,亦可依据调查问卷或者行为实验来判决损失函数;文献[9]运用相对损失与逆损失函数,将属性值转换成损失函数;文献[10]基于样本的显著性与概率,提出一种确定损失函数的方法. 然而,上述模型中的损失函数均以精确值的形式给出,无法有效描述模糊信息. 为此,文献[11]运用非一致性测度与粒子群优化算法,求取以三角模糊数形式表示的损失函数值;文献[12]根据决策专家意见的大多数原则与重要性原则,利用粒计算,求取以区间信息形式表示的损失函数值. 另外,文献[4-6,13-16]分别利用广义梯形模糊数、直觉模糊数、犹豫模糊数、对偶犹豫模糊数、毕达哥拉斯模糊数以及正交模糊数来评估损失函数矩阵.

在条件概率的确定方面,文献[4,16-17]根据决策专家的主观经验,提前给定条件概率;文献[18]运用多属性决策与粒子群优化算法,求解条件概率. 然而,上述方法皆属于主观确定条件概率的方法,缺乏透明性与可解释性. 为客观确定条件概率,文献[19]提出一种基于贝叶斯定理与朴素概率独立性假设的方法,但是该方法无法处理连续数据. 为同时处理离散和连续数据,文献[20-21]利用逻辑回归评估三支决策的条件概率. 不难发现,文献[19-21]的方法需要明确指定信息系统的类别标签或者决策属性,而在现实生活中的一些信息系统并不包含类标签和决策属性[22-24]. 为求解此种情形下的条件概率,文献[25]基于损失函数矩阵,利用对偶犹豫模糊集的熵与交叉熵,客观确定条件概率;文献[15]基于决策矩阵,选取TOPSIS方法来确定条件概率.

二型模糊集[26]是用于描述高阶不确定信息的数学方法,它的基本思想是将隶属度进行模糊化,增强了对不确定信息的表达能力. 区间二型模糊数[27]作为二型模糊数的特例,能够较好地描述不确定性且计算简单,而被广泛应用于实际决策问题中. 现有的关于区间二型模糊多属性决策的研究可以粗略地分成两类: 一是经典决策方法在区间二型模糊环境下的拓展,如拓展DEMATEL[28]、拓展VIKOR[29]、拓展TODIM[30];二是区间二型模糊信息集成算子,如TIT2FWA算子[31]、BIT2FAC算子[22]、IT2FWPBM算子[32]. 第1类方法仅对各个方案进行排序,而第2类方法还可以获得各个方案的综合值,为决策专家提供更多的决策信息. 因此,在处理决策问题方面,第2类方法更具优势.

尽管基于决策粗糙集的三支决策与区间二型模糊多属性决策的研究已取得较为丰硕的研究成果,但是仍然存在如下问题尚待进一步深入研究:

1) 现有研究已将三角模糊集、直觉模糊集以及犹豫模糊集等引入决策粗糙集中,并用它们来表示损失函数矩阵,仍然无法准确地描述出复杂情形下的损失函数所包含的不确定性. 区间二型模糊数的隶属度函数是三维的,可以更加灵活和清晰地刻画客观事物的不确定性本质,为准确评估损失函数矩阵提供了新的思路.

2) 现有研究已利用TOPSIS方法来确定条件概率,但是TOPSIS仅仅从数据曲线之间的位置关系描述各方案与理想方案之间的差异[33-34],即方案与理想方案的距离越近且离负理想方案的距离越远,则条件概率越大. 而灰色关联分析很好地阐明了数据曲线的态势变化,是曲线形状相似性的衡量尺度[33],即方案与理想方案的关联度越大且与负理想方案的关联度越小,方案越优,为客观确定条件概率提供了新的途经.

3) 现有的区间二型模糊多属性决策方法能够提供方案的排序结果,但需要决策者根据排序结果主观确定最优方案的个数,仅考虑接受或者拒绝两种选择用于处理二支决策问题,无法满足复杂多属性决策态势和不确定性信息处理的要求. 基于决策粗糙集的三支决策是一种符合人类认知的“三分而治”模型,为处理不确定与风险环境下需要考虑延迟策略的决策问题提供了工具支持.

鉴于以上分析,结合实际需要,本文基于区间二型模糊数、灰色关联分析、决策粗糙集等,对损失函数信息高度不确定、条件概率未知的三支决策问题展开相关的研究与讨论,为区间二型模糊决策问题提供新的决策方法与思路,丰富与发展不确定信息环境下的决策理论与方法,以满足实际决策需求.

1 区间二型模糊数

1.1 区间二型模糊数的概念

定理1[27] 设 A^u 和 A^l 是两个广义梯形模糊数, $h(A^u)$ 与 $h(A^l)$ 分别是 A^u 和 A^l 的高度,则定义在论域 X 上的梯形区间二型模糊数 A 表示为

$$A=(A^u,A^l)=\\((a_1^u,a_2^u,a_3^u,a_4^u;h(A^u)),(a_1^l,a_2^l,a_3^l,a_4^l;h(A^l))). \quad (1)$$

其中: $a_1^u,a_2^u,a_3^u,a_4^u,a_1^l,a_2^l,a_3^l,a_4^l,h(A^u),h(A^l)$ 均是实数,且满足条件 $a_1^u\leqslant a_2^u\leqslant a_3^u\leqslant a_4^u,a_1^l\leqslant a_2^l\leqslant a_3^l\leqslant a_4^l,0\leqslant h(A^l)\leqslant h(A^u)\leqslant 1$.

1.2 区间二型模糊数的运算规则

若 A_1 和 A_2 是两个梯形区间二型模糊数,则其运算规则[35]如下:

$$A_1\oplus A_2=\\((a_{11}^u+a_{21}^u,a_{12}^u+a_{22}^u,a_{13}^u+a_{23}^u,a_{14}^u+a_{24}^u;\\ \min(h(A_1^u),h(A_2^u))),(a_{11}^l+a_{21}^l,a_{12}^l+a_{22}^l,\\ a_{13}^l+a_{23}^l,a_{14}^l+a_{24}^l;\min(h(A_1^l),h(A_2^l)))), \quad (2)$$

$$kA_1=\\((ka_{11}^u,ka_{12}^u,ka_{13}^u,ka_{14}^u;h(A_1^u)),\\(ka_{11}^l,ka_{12}^l,ka_{13}^l,ka_{14}^l;h(A_1^l))),\ k\geqslant 0. \quad (3)$$

1.3 区间二型模糊数大小的比较

下面介绍两种区间二型模糊数排序方法,分别为组合排序法[36]与可能度排序法[37].

定理2[36] 设 A 是一个梯形区间二型模糊数,则 A 的算数平均排序函数 $R_1(A)$、几何平均排序函数 $R_2(A)$ 以及调和平均排序函数 $R_3(A)$ 分别为

$$R_1(A)=\Big(\frac{a_1^u+a_4^u}{2}+\frac{h(A^u)+h(A^l)}{2}\Big)\frac{\sum\limits_{k=1}^{4}(a_k^u+a_k^l)}{8}, \quad (4)$$

$$R_2(A)=(\sqrt{a_1^ua_4^u}+\sqrt{h(A^u)h(A^l)})\sqrt[8]{\prod_{k=1}^{4}a_k^ua_k^l}, \quad (5)$$

$$R_3(A)=\Big(\frac{2a_1^ua_4^u}{a_1^u+a_4^u}+\frac{2h(A^u)h(A^l)}{h(A^u)+h(A^l)}\Big)\frac{8}{\sum\limits_{k=1}^{4}\Big(\frac{1}{a_k^u}+\frac{1}{a_k^l}\Big)}. \quad (6)$$

定理3[36] 设 A 是一个梯形区间二型模糊数, $R_1(A)$、$R_2(A)$ 和 $R_3(A)$ 分别为 A 的算数平均排序函数、几何平均排序函数和调和平均排序函数,则 A 的组合排序函数为

$$R(A)=\xi_1R_1(A)+\xi_2R_2(A)+\xi_3R_3(A). \quad (7)$$

其中: $\xi_j=q^{j-1}\Big/\sum\limits_{k=0}^{2}q^k$, $j=1,2,3$,且参数 q 满足等式 $2\delta q^2+\sum\limits_{j=2}^{3}(2\delta-j+1)q^{3-j}=0$.

定理4[36] 设 A_1 和 A_2 是两个梯形区间二型模糊数, $R(A_1)$ 和 $R(A_2)$ 分别是 A_1 和 A_2 的组合排序函数,则:若 $R(A_1)>R(A_2)$,则 $A_1>A_2$;若 $R(A_1)=R(A_2)$,则 $A_1=A_2$;若 $R(A_1)<R(A_2)$,则 $A_1<A_2$.

定理5[37] 设 A_1 和 A_2 为两个梯形区间二型模糊数,则 $A_1\geqslant A_2$ 的可能度定义为

$$p(A_1\geqslant A_2)=\min(\max(Y,0),1). \quad (8)$$

其中

$$Y=\\((a_{13}^u+a_{14}^u-a_{21}^u-a_{22}^u)+\\(a_{13}^l+a_{14}^l-a_{21}^l-a_{22}^l)+\\2\max(h(A_1^u)-h(A_2^u),0)+\\2\max(h(A_1^l)-h(A_2^l),0))\times\\ \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{4}l(v_k)+2|h(A_1^u)-h(A_2^u)|+2|h(A_1^l)-h(A_2^l)|},$$

$$l(v_1)=a_{13}^u+a_{14}^u-a_{11}^u-a_{12}^u,\\ l(v_2)=a_{13}^l+a_{14}^l-a_{11}^l-a_{12}^l,\\ l(v_3)=a_{23}^u+a_{24}^u-a_{21}^u-a_{22}^u,\\ l(v_4)=a_{23}^l+a_{24}^l-a_{21}^l-a_{22}^l.$$

定理6[37] 设 $A_i(i=1,2,\dots,n)$ 是一组梯形区间二型模糊数,根据定义5,通过比较任意两个梯形区间二型模糊数,可以得到 p_{ij},据此构建矩阵 $M=[p_{ij}]_{n\times n}$,则每个方案的排序值为

$$\mathrm{Rank}_i=\frac{1}{n(n-1)}\Big(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}-\frac{1}{2}\Big). \quad (9)$$

方案 $A_1\geqslant A_2$ 当且仅当 $\mathrm{Rank}_1\geqslant \mathrm{Rank}_2$ 成立.

1.4 区间二型模糊数的距离

定理7[38] 设 A_1 和 A_2 为两个梯形区间二型模糊数,则 A_1 和 A_2 之间的符号距离为

$$d_s(A_1,A_2)=\\ \frac{1}{8}\Big|(a_{21}^l-a_{11}^l+a_{22}^l-a_{12}^l+a_{23}^l-a_{13}^l+\\ a_{24}^l-a_{14}^l)+4(a_{11}^u-a_{21}^u)+2(a_{12}^u-a_{22}^u)+\\ 2(a_{13}^u-a_{23}^u)+4(a_{14}^u-a_{24}^u)+\\ 3(a_{12}^u+a_{13}^u-a_{11}^u-a_{14}^u)\frac{h^l(A_1^l)}{h^u(A_1^u)}-\\ 3(a_{22}^u+a_{23}^u-a_{21}^u-a_{24}^u)\frac{h^l(A_2^l)}{h^u(A_2^u)}\Big|. \quad (10)$$

2 区间二型模糊决策粗糙集的基础模型

考虑决策粗糙集中损失值以区间二型模糊数表示的情形,下面构建区间二型模糊决策粗糙集的基础模型. 依据决策粗糙集的决策过程,区间二型模糊决策粗糙集模型的构造包括3个步骤: 1) 利用区间二型模糊数构建损失函数矩阵并求解期望损失值; 2) 比较期望损失值的大小; 3) 运用期望损失值的比较结果,形成决策规则.

按照以上步骤,本节依次展开研究. 根据贝叶斯决策过程,区间二型模糊决策粗糙集模型由2个状态和3种行动组成. 状态集为$\Omega = \{D, \neg D\}$,分别是对象属于D与不属于D. 行动集为$R = \{\gamma_P, \gamma_B, \gamma_N\}$,其中$\gamma_P$、$\gamma_B$和$\gamma_N$表示在对一个对象$z$分类时所采取的3种行动,依次表示: 决定$z \in \mathrm{Pos}(D)$,决定$z \in \mathrm{Bou}(D)$以及决定$z \in \mathrm{Neg}(D)$. 在不同状态下采取不同行动所对应的区间二型模糊损失函数矩阵,如表1所示.

表1中,A_{PP}、A_{BP}、A_{NP}为当对象属于D时,分别采取行动γ_P、γ_B、γ_N所对应的损失值. A_{PN}、A_{BN}、A_{NN}为当对象属于$\neg D$时,分别采取行动γ_P、γ_B、γ_N所对应的损失值. 各损失值之间的关系为

$$A_{PP} \leqslant A_{BP} < A_{NP}, \tag{11}$$

$$A_{NN} \leqslant A_{BN} < A_{PN}. \tag{12}$$

表1 区间二型模糊损失函数矩阵

	D	$\neg D$
γ_P	A_{PP}	A_{PN}
γ_B	A_{BP}	A_{BN}
γ_N	A_{NP}	A_{NN}

式(11)表示若对象z属于D,则将z判入$\mathrm{Pos}(D)$中所带来的损失要小于等于将其判入$\mathrm{Bou}(D)$所带来的损失,同时两者的损失又都小于将其判入$\mathrm{Neg}(D)$所带来的损失. 类似地,式(12)表示若z属于$\neg D$,则将其判入$\mathrm{Neg}(D)$所带来的损失要小于等于将其判入$\mathrm{Bou}(D)$所带来的损失,同时两者的损失又都小于将其判入$\mathrm{Pos}(D)$所带来的损失.

条件概率是贝叶斯决策过程中基本组成要素. 若$\mathrm{Pro}(D|[z])$与$\mathrm{Pro}(\neg D|[z])$分别表示对象z属于D与不属于D的条件概率,其中z在这里采用它在信息系统中的等价类$[z]$来表述,则$\mathrm{Pro}(D|[z])$与$\mathrm{Pro}(\neg D|[z])$满足$\mathrm{Pro}(D|[z])+\mathrm{Pro}(\neg D|[z])= 1$.

对于一个对象z,采取各种行动所对应的期望损失值$\mathrm{EL}(A_\bullet|[z])(\bullet = P, B, N)$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{EL}(A_P|[z]) = A_{PP}\mathrm{Pro}(D|[z]) \oplus A_{PN}\mathrm{Pro}(\neg D|[z]) = \\
&((\mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{PP1} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{PN1}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{PP2} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{PN2}, \\
&\mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{PP3} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{PN3}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{PP4} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{PN4}; \\
&\min(h(A^u_{PP}), h(A^u_{PN}))), (\mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{PP1} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{PN1}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{PP2} + \\
&(1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{PN2}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{PP3} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{PN3}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{PP4} + \\
&(1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{PN4}; \min(h(A^l_{PP}), h(A^l_{PN}))));
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{EL}(A_B|[z]) = A_{BP}\mathrm{Pro}(D|[z]) \oplus A_{BN}\mathrm{Pro}(\neg D|[z]) = \\
&((\mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{BP1} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{BN1}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{BP2} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{BN2}, \\
&\mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{BP3} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{BN3}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{BP4} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{BN4}; \\
&\min(h(A^u_{BP}), h(A^u_{BN}))), (\mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{BP1} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{BN1}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{BP2} + \\
&(1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{BN2}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{BP3} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{BN3}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{BP4} + \\
&(1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{BN4}; \min(h(A^l_{BP}), h(A^l_{BN}))));
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{EL}(A_N|[z]) = A_{NP}\mathrm{Pro}(D|[z]) \oplus A_{NN}\mathrm{Pro}(\neg D|[z]) = \\
&((\mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{NP1} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{NN1}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{NP2} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{NN2}, \\
&\mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{NP3} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{NN3}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^u_{NP4} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^u_{NN4}; \\
&\min(h(A^u_{NP}), h(A^u_{NN}))), (\mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{NP1} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{NN1}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{NP2} + \\
&(1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{NN2}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{NP3} + (1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{NN3}, \mathrm{Pro}(D|[z])a^l_{NP4} + \\
&(1-\mathrm{Pro}(D|[z]))a^l_{NN4}; \min(h(A^l_{NP}), h(A^l_{NN})))).
\end{aligned} \tag{15}$$

由式(13)～(15)易知,期望损失值$\mathrm{EL}(A_{\bullet}|[z])(\bullet = P, B, N)$仍是梯形区间二型模糊数. 进一步,根据贝叶斯最小风险原则,得到如下决策规则:

P: 若$\mathrm{EL}(A_P|[z]) \leqslant \mathrm{EL}(A_B|[z])$和$\mathrm{EL}(A_P|[z]) \leqslant \mathrm{EL}(A_N|[z])$成立,则$z \in \mathrm{Pos}(D)$;

B: 若$\mathrm{EL}(A_B|[z]) \leqslant \mathrm{EL}(A_P|[z])$和$\mathrm{EL}(A_B|[z]) \leqslant \mathrm{EL}(A_N|[z])$成立,则$z \in \mathrm{Bou}(D)$;

N: 若$\mathrm{EL}(A_N|[z]) \leqslant \mathrm{EL}(A_P|[z])$和$\mathrm{EL}(A_N|[z]) \leqslant \mathrm{EL}(A_B|[z])$成立,则$z \in \mathrm{Neg}(D)$.

决策规则P, B, N称为三支决策,具体包括3个区域,分别为:接受域$\mathrm{Pos}(D)$、延迟域$\mathrm{Bou}(D)$和拒绝域$\mathrm{Neg}(D)$. 值得注意的是,这些规则判别结果取决于期望损失值$\mathrm{EL}(A_{\bullet}|[z])(\bullet = P, B, N)$之间的大小比较,而$\mathrm{EL}(A_{\bullet}|[z])(\bullet = P, B, N)$是区间二型模糊数,故选择合适的区间二型模糊排序方法辅助比较是重要环节.

3　基于灰色关联分析与区间二型模糊决策粗糙集的三支决策

在区间二型模糊信息系统中,解释损失函数与确定条件概率是三支决策过程中需要解决的两个关键问题. 上一节已对区间二型模糊损失函数给出了具体解释,并构造了区间二型模糊决策粗糙集的基础模型,但未具体比较期望损失值$\mathrm{EL}(A_{\bullet}|[z])(\bullet = P, B, N)$间的大小,本节将运用组合排序和可能度排序探索区间二型模糊决策粗糙集的决策机制. 另外,在没有类标签或者决策属性的区间二型模糊信息系统中,决策者往往无法直接给出条件概率,为了解决该问题,本节将基于区间二型模糊信息系统与灰色关联分析提出一种求解条件概率的方法.

3.1　基于灰色关联分析的条件概率确定方法

为了确定条件概率,首先定义区间二型模糊信息系统. 区间二型模糊信息系统是一个四元组$\mathrm{IS} = (U, \mathrm{AT}, V, f)$. 其中: U是一个非空有限个对象的集合,被称为域; AT是非空有限个属性的集合; $V = \bigcup_{c \in \mathrm{AT}} V_c$并且$V_c$是属性$c$的值域; $f: U \times \mathrm{AT} \to V$是一个函数,对于任意的$c \in \mathrm{AT}, z \in U$均有$f(z, c) \in V_c$,其中$f(z, c)$是一个区间二型模糊数. 假设$U = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$是具有$m$个可行方案的离散集, $\mathrm{AT} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$是区间二型模糊信息系统的属性集, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$是属性的权重向量,满足$0 \leqslant \omega_j \leqslant 1$与$\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$. 方案$z_i$关于属性$c_j$的评估值为$f(z_i, c_j) = A_{ij} = ((a_{ij1}^u, a_{ij2}^u, a_{ij3}^u, a_{ij4}^u; h(A_{ij}^u)), (a_{ij1}^l, a_{ij2}^l, a_{ij3}^l, a_{ij4}^l; h(A_{ij}^l)))(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$,构成决策矩阵$A = [A_{ij}]_{m \times n}$.

灰色关联分析[39]选择的方案与正、负理想方案分别有最大、最小的灰色关联度. 结合三支决策,正、负理想方案分别对应于状态D与$\neg D$. 通过计算各方案和状态D与$\neg D$的灰色关联度,可以客观确定条件概率. 基于灰色关联分析求解条件概率的步骤如下.

设权重$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$,规范化的决策矩阵为

$$A' = [A'_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \cdots & A'_{1n} \\ A'_{21} & A'_{22} & \ldots & A'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A'_{m1} & A'_{m2} & \cdots & A'_{mn} \end{bmatrix}.$$

1) 根据区间二型模糊数的组合排序或者可能度排序,构造评价对象的正、负理想解

$$\begin{cases} A_j^+ = \max\limits_i (A'_{ij}), \\ A_j^- = \min\limits_i (A'_{ij}), \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

2) 求解第i个方案与理想解关于第j个准则的灰色关联系数

$$A_{ij}^+ = \frac{m + \tau M}{\Delta_{ij}^+ + \tau M}, \ \tau \in (0, 1). \tag{17}$$

其中: Δ_{ij}^+为A_j^+与A'_{ij}之间的符号距离$d_s(A_j^+, A'_{ij})$, $m = \underbrace{\min}_{i}\underbrace{\min}_{j} \Delta_{ij}^+, M = \underbrace{\max}_{i}\underbrace{\max}_{j} \Delta_{ij}^+$, τ为分辨系数,默认值为0.5, 则各方案与正理想解的灰色关联系数矩阵为

$$A^+ = \begin{bmatrix} A_{11}^+ & A_{12}^+ & \cdots & A_{1n}^+ \\ A_{21}^+ & A_{22}^+ & \cdots & A_{2n}^+ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}^+ & A_{m2}^+ & \cdots & A_{mn}^+ \end{bmatrix}.$$

3) 第i个方案与正理想解的灰色关联度为

$$A_i^+ = \sum_{j=1}^{n} \omega_j A_{ij}^+, \ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{18}$$

4) 第i个方案与负理想解关于第j个准则的灰色关联系数为

$$A_{ij}^- = \frac{m + \tau M}{\Delta_{ij}^- + \tau M}, \ \tau \in (0, 1). \tag{19}$$

其中: Δ_{ij}^-为A_j^-与A'_{ij}之间的符号距离$d_s(A_j^-, A'_{ij})$, $m = \underbrace{\min}_{i}\underbrace{\min}_{j} \Delta_{ij}^-, M = \underbrace{\max}_{i}\underbrace{\max}_{j} \Delta_{ij}^-$, τ为分辨系数,默认值为0.5. 则各个方案和负理想解的灰色关联系数矩阵为

$$A'^- = \begin{bmatrix} A_{11}^- & A_{12}^- & \cdots & A_{1n}^- \\ A_{21}^- & A_{22}^- & \cdots & A_{2n}^- \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}^- & A_{m2}^- & \cdots & A_{mn}^- \end{bmatrix}.$$

5) 第i个方案与负理想解的灰色关联度为

$$A_i^- = \sum_{j=1}^{n} \omega_j A_{ij}^-,\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{20}$$

6) 求解各方案的灰色关联相对贴近度

$$\mathrm{CR}_i = \frac{A_i^+}{A_i^+ + A_i^-},\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{21}$$

由灰色关联公理[39]得知, 灰色关联相对贴近度$0 < \mathrm{CR}_i \leqslant 1$. 显然, CR_i为方案z_i属于状态D的概率, 故可以采用CR_i评估方案z_i的条件概率, 即$\mathrm{Pro}(D|z_i) = \mathrm{CR}_i$.

3.2 区间二型模糊决策粗糙集的决策机制

目前, 文献[35, 40, 36-37]都研究了区间二型模糊排序方法. 其中文献[35]的方法具有较高的复杂性, 在实际应用中可操作性较差. 文献[40]的方法在参数的转换、变换过程中会导致信息损失; 文献[36]的方法几何含义明确, 考虑了决策者的风险偏好, 而且反映了区间二型模糊数之间的相对差异, 但当区间二型模糊数中存在0元素时, 排序方法中的几何平均排序与调和平均排序均为0, 无法真实反映区间二型模糊数的大小; 文献[37]给出了基于可能度的排序方法, 该方法同时考虑上下隶属度函数, 能够有效区分区间二型模糊数的大小. 考虑到文献[36-37]方法的优势, 利用这两种方法, 设计两种策略来研究区间二型模糊决策粗糙集的决策机制.

策略1 基于组合排序的区间二型模糊决策粗糙集的决策机制.

根据式(13)～(15)与区间二型模糊数的组合排序, 各期望损失值的组合排序可以分别表示为$R(\mathrm{EL}(A_P|[z]))$、$R(\mathrm{EL}(A_B|[z]))$和$R(\mathrm{EL}(A_N|[z]))$.

结合区间二型模糊组合排序方法, 决策规则P, B, N进一步描述为:

$P1$: 若$R(\mathrm{EL}(A_P|[z])) \leqslant R(\mathrm{EL}(A_B|[z]))$和$R(\mathrm{EL}(A_P|[z])) \leqslant R(\mathrm{EL}(A_N|[z]))$成立, 则有$z \in \mathrm{Pos}(D)$;

$B1$: 若$R(\mathrm{EL}(A_B|[z])) \leqslant R(\mathrm{EL}(A_P|[z]))$和$R(\mathrm{EL}(A_B|[z])) \leqslant R(\mathrm{EL}(A_N|[z]))$成立, 则有$z \in \mathrm{Bou}(D)$;

$N1$: 若$R(\mathrm{EL}(A_N|[z])) \leqslant R(\mathrm{EL}(A_P|[z]))$和$R(\mathrm{EL}(A_N|[z])) \leqslant R(\mathrm{EL}(A_B|[z]))$成立, 则有$z \in \mathrm{Neg}(D)$.

参数ξ_1、ξ_2和ξ_3是区间二型模糊组合排序的重要元素, 能够影响期望损失组合排序值的大小以及反映决策者的风险态度, 当$\xi_1 = 1$且$\xi_2 = \xi_3 = 0$时, 决策者为风险偏好类型; 当$\xi_1 = \xi_3 = 0$且$\xi_2 = 1$时, 决策者为风险中性类型; 当$\xi_1 = \xi_2 = 0$且$\xi_3 = 1$时, 决策者为风险厌恶类型.

策略2 基于可能度排序的区间二型模糊决策粗糙集的决策机制.

本节使用文献[37]提出的可能度排序方法来研究区间二型模糊决策粗糙集的决策机制.

为了比较区间二型模糊数的大小, 文献[37]首先定义了区间二型模糊数的可能度, 接着构建了偏好互补矩阵, 然后对每行元素进行汇总, 并据此进行排序. 在此思想的指导下, 首先, 基于决策规则P, B, N中的期望损失值$\mathrm{EL}(A_\bullet|[x])(\bullet = P, B, N)$构建偏好互补矩阵; 接着, 在区间二型模糊决策粗糙集的背景下进行大小比较并形成决策规则. 本节构建的互补矩阵如表2所示.

由表2所示的互补矩阵, 得到如下的期望损失值间的互补矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}.$$

不难发现, 区间二型模糊可能度满足如下性质: $0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1, p_{ij} + p_{ji} = 1, p_{ii} = 1/2,\ i, j = 1, 2, 3$. 进而, 互补矩阵$M$可简化为

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & p_{12} & p_{13} \\ 1 - p_{12} & \frac{1}{2} & p_{23} \\ 1 - p_{13} & 1 - p_{23} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

接着, 对互补矩阵M中每行元素求排序值, 得

$$\mathrm{Rank}_P = \frac{1}{6}(p_{12} + p_{13}), \tag{23}$$

$$\mathrm{Rank}_B = \frac{1}{6}(1 - p_{12} + p_{23}), \tag{24}$$

$$\mathrm{Rank}_N = \frac{1}{6}(2 - p_{13} - p_{23}). \tag{25}$$

表 2 期望损失值之间的互补矩阵

M	$\mathrm{EL}(A_P\|[z])$	$\mathrm{EL}(A_B\|[z])$	$\mathrm{EL}(A_N\|[z])$
$\mathrm{EL}(A_P\|[z])$	$p_{11} = p(\mathrm{EL}(A_P\|[z]) \geqslant \mathrm{EL}(A_P\|[z]))$	$p_{12} = p(\mathrm{EL}(A_P\|[z]) \geqslant \mathrm{EL}(A_B\|[z]))$	$p_{13} = p(\mathrm{EL}(A_P\|[z]) \geqslant \mathrm{EL}(A_N\|[z]))$
$\mathrm{EL}(A_B\|[z])$	$p_{21} = p(\mathrm{EL}(A_P\|[z]) \geqslant \mathrm{EL}(A_P\|[z]))$	$p_{22} = p(\mathrm{EL}(A_B\|[z]) \geqslant \mathrm{EL}(A_B\|[z]))$	$p_{23} = p(\mathrm{EL}(A_B\|[z]) \geqslant \mathrm{EL}(A_N\|[z]))$
$\mathrm{EL}(A_N\|[z])$	$p_{31} = p(\mathrm{EL}(A_N\|[z]) \geqslant \mathrm{EL}(A_P\|[z]))$	$p_{32} = p(\mathrm{EL}(A_N\|[z]) \geqslant \mathrm{EL}(A_B\|[z]))$	$p_{33} = p(\mathrm{EL}(A_N\|[z]) \geqslant \mathrm{EL}(A_N\|[z]))$

其中: $\mathrm{Rank}_\bullet(\bullet = P, B, N)$ 为 $\mathrm{EL}(A_\bullet|[z])$ 的总排序值. 由式(23)～(25)得知, Rank_P、Rank_B 与 Rank_N 的值是由 p_{12}、p_{13} 与 p_{23} 决定的. 根据文献[37]的排序方法, 区间二型模糊数的大小比较是由 $\mathrm{Rank}_\bullet(\bullet = P, B, N)$ 决定的, 故决策规则 P, B, N 进一步描述为:

$P\,2$: 若 $\mathrm{Rank}_P \leqslant \mathrm{Rank}_B$ 与 $\mathrm{Rank}_P \leqslant \mathrm{Rank}_N$ 成立, 则 $z \in \mathrm{Pos}(D)$;

$B\,2$: 若 $\mathrm{Rank}_B \leqslant \mathrm{Rank}_P$ 与 $\mathrm{Rank}_B \leqslant \mathrm{Rank}_N$ 成立, 则 $z \in \mathrm{Bou}(D)$;

$N\,2$: 若 $\mathrm{Rank}_N \leqslant \mathrm{Rank}_P$ 与 $\mathrm{Rank}_N \leqslant \mathrm{Rank}_B$ 成立, 则 $z \in \mathrm{Neg}(D)$.

此时, 决策规则 $P\,2, B\,2, N\,2$ 对应了一种三支决策.

3.3 算法步骤

本文提出的方法主要包括如下步骤.

step 1: 建立区间二型模糊信息系统. 根据实际决策情形, 确定区间二型模糊信息系统 $\mathrm{IS} = (U, \mathrm{AT}, V, f)$, 包括方案集与属性集. 然后, 搜集信息系统IS的评估结果, 得到决策矩阵 $A = [A_{ij}]_{m\times n}$, 并根据表3对决策矩阵 $A = [A_{ij}]_{m\times n}$ 进行标准化处理. 假设 $A' = [A'_{ij}]_{m\times n}$ 为标准化的决策矩阵, 其中

$$A'_{ij} = \begin{cases} A_{ij},\ j \in N_b; \\ (A_{ij})^c,\ j \in N_c. \end{cases} \tag{26}$$

N_b 与 N_c 分别为效益型准则与成本型准则的下标集合, 且满足 $N_b \bigcup N_c = N (N = \{1, 2, \dots, n\})$ 与 $N_b \bigcap N_c = \phi$; $(A'_{ij})^c$ 为 A'_{ij} 的互补项.

表3 互补关系

语言项	VL	L	ML	M	MH	H	VH
互补项	VH	H	MH	M	ML	L	VL

step 2: 构造损失函数矩阵. 根据式(11)和(12), 确定区间二型模糊损失函数矩阵.

step 3: 确定条件概率. 根据区间二型模糊灰色关联分析, 确定每个方案的灰色关联相对贴近度 CR_i $(i = 1, 2, \dots, m)$, 进而用 CR_i 评估方案 z_i 属于 D 的条件概率, 即 $\mathrm{Pro}(D|z_i) = \mathrm{CR}_i$.

step 4: 计算期望损失值. 根据式(13)～(15), 集成step 2所示的损失函数矩阵与step 3所得到的条件概率, 获得采取各种行动所对应的期望损失值 $\mathrm{EL}(A_\bullet|z_i)(\bullet = P, B, N;\ i = 1, 2, \dots, m)$.

step 5: 获取排序值. 当采用策略1时, 根据区间二型模糊组合排序, 计算每个方案的期望损失值的组合排序值; 当采用策略2时, 根据区间二型模糊可能度排序, 计算每个方案的期望损失值所对应的总排序值.

step 6: 判决决策规则. 若step 5采用区间二型模糊组合排序方法确定方案的排序值, 则根据决策规则 $P\,1, B\,1, N\,1$ 判决每个方案所属的区域; 若step 5采用区间二型模糊可能度排序方法确定方案的排序值, 则根据决策规则 $P\,2, B\,2, N\,2$ 判决每个方案所属的区域.

4 算例分析

4.1 算例计算

例1 假设开发商目前有5个工程项目可供备选, 分别为 z_1、z_2、z_3、z_4 和 z_5. 对于工程项目的评价, 需要考虑5个准则, 分别为盈利能力 c_1, 清偿能力 c_2, 风险与不确定性评价 c_3, 社会贡献能力 c_4, 环境贡献能力 c_5. 一般来说, 如果开发商拒绝一个好的项目, 他们会错过一些发展机会; 如果接受一个差的项目, 则会给他们带来一些损失. 对于一些项目, 开发商可以采取延迟行动. 此时, 开发商需要搜集更多信息, 才能进一步作出决策. 通过以上分析, 可以把工程项目投资看作三支决策问题. 在区间二型模糊环境下, 决策专家根据上述5个准则利用表4所示的梯形区间二型模糊数对每个项目进行评估, 构造了如表5所示的区间二型模糊信息系统. 由表5得知, $U = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$, $\mathrm{AT} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$, 每个属性的域是梯形区间二型模糊数. 表5的属性权重向量信息为 $\omega = (0.2, 0.25, 0.2, 0.2, 0.15)$. 在工程项目投资的评估中, 这里有两种状态 $\Omega = \{D, \neg D\}$, 其中 D 表示该项目为好项目, $\neg D$ 表示该项目为差项目. 项目 $z_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 的行动集记为 $\Lambda = \{A_P, A_B, A_N\}$, 其中 A_P 表示项目值得投资, A_B 表示项目需要进一步研究, A_N 表示项目不值得投资. 区间二型模糊决策理论粗糙集有6种损失函数, 分别为 A_{PP}、A_{BP}、A_{NP}、A_{PN}、A_{BN} 和 A_{NN}. 其中: A_{PP}、A_{BP} 和 A_{NP} 表示项目为好的项目时, 分别采取行动投资、延迟以及不投资时所带来的损失价值; A_{PN}、A_{BN} 和 A_{NN} 表示项目为差的项目时, 分别采取行动投资、延迟以及不投资时所带来的损失价值. 对于工程投资项目, 专家通过自身经验用表4所示的梯形区间二型模糊数来评价这5个项目的损失值, 给出的语言损失值矩阵 $[A_{\bullet\circ}]_{1\times 6}(\bullet = P, B, N;\ \circ = P, N)$ 如表6所示.

表4 语言标度及其对应的梯形区间二型模糊数

语言标度	梯形区间二型模糊数
非常低(VL)	((0, 0, 0, 0.1; 1), (0, 0, 0, 0.05; 0.9))
低(L)	((0, 0.1, 0.15, 0.3; 1), (0.05, 0.1, 0.1, 0.2; 0.9))
中下(ML)	((0.15, 0.3, 0.35, 0.5; 1), (0.2, 0.25, 0.3, 0.4; 0.9))
中(M)	((0.3, 0.5, 0.55, 0.7; 1), (0.4, 0.45, 0.5, 0.6; 0.9))
中上(MH)	((0.5, 0.7, 0.75, 0.9; 1), (0.6, 0.65, 0.7, 0.85; 0.9))
高(H)	((0.7, 0.9, 0.95, 1; 1), (0.8, 0.85, 0.9, 0.95; 0.9))
非常高(VH)	((0.9, 1, 1, 1; 1),(0.95, 1, 1, 1; 0.9))

表5 语言决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
z_1	VH	M	H	MH	H
z_2	H	MH	ML	M	M
z_3	H	M	H	H	L
z_4	VH	VH	ML	MH	ML
z_5	VH	H	MH	MH	MH

表6 损失值矩阵

	A_{PP}	A_{BP}	A_{NP}	A_{PN}	A_{BN}	A_{NN}
损失值	L	M	MH	MH	M	ML

根据本文提出的方法求解例1,基于组合排序的区间二型模糊三支决策方法(当$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.3333$时)与基于可能度排序的区间二型模糊三支决策方法得到了相同的决策规则,即:方案z_4属于$\mathrm{Pos}(D)$;方案z_2与z_5属于$\mathrm{Bou}(D)$;方案z_1与z_3属于$\mathrm{Neg}(D)$.

4.2 对比分析

为验证本文所提出方法的可行性与有效性,利用文献[13, 28-29]的方法解决算例1. 为便于比较,在利用文献[13]的方法确定决策规则前,分别假设条件概率与本文方法所得到的条件概率以及文献[15]方法确定的条件概率相同.不同方法的决策结果如表7所示.

表7 不同方法的决策结果

方法	参数	决策规则与排序
基于组合排序的区间二型模糊三支决策方法	$\xi_1=\xi_2=\xi_3=0.3333$	$z_4\in\mathrm{Pos}(D), z_2, z_5\in\mathrm{Bou}(D), z_1, z_3\in\mathrm{Neg}(D)$ $z_4>z_5>z_2>z_1>z_3$
基于可能度排序的区间二型模糊三支决策方法	无	$z_4\in\mathrm{Pos}(D), z_2, z_5\in\mathrm{Bou}(D), z_1, z_3\in\mathrm{Neg}(D)$ $z_4>z_5>z_2>z_1>z_3$
文献[13]的方法(设条件概率与本文相同)	$\rho=1$ (偏好) $\rho=0.5$ (中性) $\rho=0$ (厌恶)	$z_2, z_4, z_5\in\mathrm{Pos}(D), z_1, z_3\in\mathrm{Neg}(D)$. $z_4\in\mathrm{Pos}(D), z_2, z_5\in\mathrm{Bou}(D), z_1, z_3\in\mathrm{Neg}(D)$ $z_2, z_4, z_5\in\mathrm{Bou}(D), z_1, z_3\in\mathrm{Neg}(D)$
文献[13]的方法(借鉴文献[15]的模型求条件概率)	$\rho=1$(偏好) $\rho=0.5$(中性) $\rho=0$(厌恶)	$z_4, z_5\in\mathrm{Pos}(D), z_1, z_2, z_3\in\mathrm{Neg}(D)$ $z_4\in\mathrm{Pos}(D), z_2, z_5\in\mathrm{Bou}(D), z_1, z_3\in\mathrm{Neg}(D)$ $z_2, z_4, z_5\in\mathrm{Bou}(D), z_1, z_3\in\mathrm{Neg}(D)$
文献[28]的方法 文献[29]的方法	无 无	$z_4>z_5>z_2>z_1>z_3$ $z_4=z_5>z_2>z_1>z_3$

由上述分析和表7可以看出:本文的基于组合排序方法(风险偏好、中性以及运用组合排序方法时),本文的基于可能度排序方法以及文献[13]的方法(风险中性时)得到了相同的决策规则;本文的基于组合排序方法(风险厌恶时)和文献[13]的方法(风险厌恶时)得到了相同的决策规则;本文的两种决策方法与文献[28]的方法得到了相同的排序结果;本文的两种决策方法与文献[29]的方法得到了几乎相同的排序结果. 因此,本文提出的方法是有效的. 另外,与文献[13, 28-29]的方法相比,本文提出的方法具有以下优势:

1) 文献[28-29]的方法需要决策者主观确定择优方案的个数. 文献[13]的方法无法提供方案排序结果. 本文方法可以同时提供方案的排序与分类结果.

2) 文献[29]的方法利用VIKOR对方案进行排序,无法区分方案z_4与方案z_5的优劣. 本文方法利用灰色关联分析确定方案的排序结果,能够区分方案z_4与方案z_5的优劣,有效解决了文献[29]方法的问题.

3) 文献[13]的方法基于条件概率已知的假设,缺乏透明性与可解释性. 本文方法利用灰色关联分析客观确定条件概率,有效克服了条件概率人为给定的主观性影响.

4) 文献[13]在梯形模糊排序基础上提出的方法不能反映相邻元素之间的相对差异. 区间二型模糊组合排序能够表示相邻元素之间的相对差异,故可以为决策者提供更多的决策信息.

5 结 论

本文将决策粗糙集与区间二型模糊数相结合,提出了两种基于区间二型模糊决策粗糙集的三支决策方法. 以决策粗糙集中损失值为区间二型模糊数的情况为突破口,根据区间二型模糊数的运算法则,建立了区间二型模糊决策粗糙集的基础模型. 然后,在区间二型模糊决策粗糙集模型的框架下,详细探讨了现有代表性的区间二型模糊大小比较方法,选取区间二型模糊组合排序方法和可能度排序方法这两种排序方法,依次探索各自的决策机制并推导出相应的决策规则. 进一步,借助区间二型模糊决策矩阵,利用区间二型模糊灰色关联分析,提出客观确定条件概率的评估方法. 在此基础上,给出两种基于区间二型模糊决策粗糙集的三支决策方法,这两种方法不仅概念明

确,易于理解,而且较好地克服了条件概率人为给定的主观性影响,有效地解决了损失值为区间二型模糊数、条件概率信息完全未知的区间二型模糊三支决策问题,是对区间二型模糊决策领域的丰富与发展,为研究决策粗糙集提供了新的方向. 在未来的研究中,考虑将所提出的三支决策模型应用到产品质量信用评价[41]、农村电商评估[42-43]以及在线酒店选择[44]等领域.

参考文献(References)

[1] Yao Y Y, Wong S K M, Lingras P. A decision-theoretic rough set model[C]. Methodologies for Intelligent Systems. New York, 1990, 5: 17-24.

[2] Li H X, Zhou X Z. Risk decision making based on decision-theoretic rough set: A three-way view decision model[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2011, 4(1): 1-11.

[3] 刘久兵, 周献中, 李华雄, 等. 基于直觉模糊相似度的直觉模糊三支决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(6): 1550-1564.
(Liu J B, Zhou X Z, Li H X, et al. An intuitionistic fuzzy three-way decision method based on intuitionistic fuzzy similarity degrees[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(6): 1550-1564.)

[4] Tang G L, Chiclana F, de Liu P. A decision-theoretic rough set model with q-rung orthopair fuzzy information and its application in stock investment evaluation[J]. Applied Soft Computing, 2020, 91: 106212.

[5] Liang D C, Liu D. A novel risk decision making based on decision-theoretic rough sets under hesitant fuzzy information[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(2): 237-247.

[6] Liang D C, Xu Z S, Liu D. Three-way decisions based on decision-theoretic rough sets with dual hesitant fuzzy information[J]. Information Sciences, 2017, 396: 127-143.

[7] Liu D, Yao Y Y, Li T R. Three-way investment decisions with decision-theoretic rough sets[J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2011, 4(1): 66-74.

[8] Liu D, Li T R, Ruan D. Probabilistic model criteria with decision-theoretic rough sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(17): 3709-3722.

[9] Jia F, de Liu P. A novel three-way decision model under multiple-criteria environment[J]. Information Sciences, 2019, 471: 29-51.

[10] Suo M L, Tao L F, Zhu B L, et al. Single-parameter decision-theoretic rough set[J]. Information Sciences, 2020, 539: 49-80.

[11] Liang D C, Liu D, Pedrycz W, et al. Triangular fuzzy decision-theoretic rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(8): 1087-1106.

[12] Liang D C, Liu D, Kobina A. Three-way group decisions with decision-theoretic rough sets[J]. Information Sciences, 2016, 345: 46-64.

[13] 钟映竑, 张培新. 广义梯形模糊数决策粗糙集[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(6): 82-88.
(Zhong Y H, Zhang P X. Generalized trapezoidal decision-theoretic rough sets[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2015, 45(6): 82-88.)

[14] Liang D C, Liu D. Deriving three-way decisions from intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets[J]. Information Sciences, 2015, 300: 28-48.

[15] Liang D C, Xu Z S, Liu D, et al. Method for three-way decisions using ideal TOPSIS solutions at Pythagorean fuzzy information[J]. Information Sciences, 2018, 435: 282-295.

[16] Liang D C, Cao W. Q-Rung orthopair fuzzy sets-based decision-theoretic rough sets for three-way decisions under group decision making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2019, 34(12): 3139-3167.

[17] Liu P D, Yang H Y. Three-way decisions with intuitionistic uncertain linguistic decision-theoretic rough sets based on generalized maclaurin symmetric mean operators[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2020, 22(2): 653-667.

[18] Liang D C, Pedrycz W, Liu D, et al. Three-way decisions based on decision-theoretic rough sets under linguistic assessment with the aid of group decision making[J]. Applied Soft Computing, 2015, 29: 256-269.

[19] Yao Y Y, Zhou B. Naive Bayesian rough sets[M]. Berlin, Heidelberg: Springer , 2010: 719-726.

[20] Liu D, Li T R, Liang D C. A new discriminant analysis approach under decision-theoretic rough sets[C]. Rough Sets and Knowledge Technology, DOI: 10.1007/978-3-642-24425-4_62.

[21] Liu D, Li T R, Liang D C. Incorporating logistic regression to decision-theoretic rough sets for classifications[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1): 197-210.

[22] Tang G L, Chiclana F, Lin X C, et al. Interval type-2 fuzzy multi-attribute decision-making approaches for evaluating the service quality of Chinese commercial banks[J]. Knowledge-Based Systems, 2020, 193: 105438.

[23] 刘小弟, 朱建军, 张世涛, 等. 一种新犹豫模糊符号距离及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2019, 39(2): 442-450.
(Liu X D, Zhu J J, Zhang S T, et al. A novel hesitant fuzzy signed distance and its application[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2019, 39(2): 442-450.)

[24] 刘卫锋, 杜迎雪, 刘万里. 毕达哥拉斯模糊还原性BM算子及其决策应用[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(2): 499-509.
(Liu W F, Du Y X, Liu W L. Pythagorean fuzzy BM operators with reducibility and applications in decision making[J]. Systems Engineering — Theory & Practice,

2020, 40(2): 499-509.)

[25] Liang D C, Wang M W, Xu Z S, et al. Risk appetite dual hesitant fuzzy three-way decisions with TODIM[J]. Information Sciences, 2020, 507: 585-605.

[26] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning — I[J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249.

[27] Mendel J M, John R I, Liu F L. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2006, 14(6): 808-821.

[28] Baykasolu A, Gölcük İ. Development of an interval type-2 fuzzy sets based hierarchical MADM model by combining DEMATEL and TOPSIS[J]. Expert Systems with Applications, 2017, 70: 37-51.

[29] Wu Q, Zhou L G, Chen Y, et al. An integrated approach to green supplier selection based on the interval type-2 fuzzy best-worst and extended VIKOR methods[J]. Information Sciences, 2019, 502: 394-417.

[30] Qin J D, Liu X W, Pedrycz W. An extended TODIM multi-criteria group decision making method for green supplier selection in interval type-2 fuzzy environment[J]. European Journal of Operational Research, 2017, 258(2): 626-638.

[31] Zhang Z M. Trapezoidal interval type-2 fuzzy aggregation operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. Neural Computing and Applications, 2018, 29(4): 1039-1054.

[32] de Liu P, Gao H, Ma J H. Novel green supplier selection method by combining quality function deployment with partitioned Bonferroni mean operator in interval type-2 fuzzy environment[J]. Information Sciences, 2019, 490: 292-316.

[33] Opricovic S, Tzeng G H. Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS[J]. European Journal of Operational Research, 2004, 156(2): 445-455.

[34] 费巍, 余高锋, 李登峰. 乡村旅游开发适宜性等级评价TOPSIS方法[J]. 控制与决策, 2020, 35(11): 2619-2625.
(Fei W, Yu G F, Li D F. TOPSIS method of suitability grade assessment for rural tourism development[J]. Control and Decision, 2020, 35(11): 2619-2625.)

[35] Lee L W, Chen S M. A new method for fuzzy multiple attributes group decision-making based on the arithmetic operations of interval type-2 fuzzy sets[C]. 2008 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Kunming, 2008: 3084-3089.

[36] Qin J D, Liu X W. Multi-attribute group decision making using combined ranking value under interval type-2 fuzzy environment[J]. Information Sciences, 2015, 297: 293-315.

[37] Hu J H, Zhang Y, Chen X H, et al. Multi-criteria decision making method based on possibility degree of interval type-2 fuzzy number[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 43: 21-29.

[38] Chen T Y. An interactive method for multiple criteria group decision analysis based on interval type-2 fuzzy sets and its application to medical decision making[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2013, 12(3): 323-356.

[39] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国. 灰色系统理论及其应用[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 1999: 49-97.
(Liu S F, Guo T B, Dang Y G. Grey system theory and its application[M]. The 2nd edition. Beijing: Science Press, 1999: 49-97.)

[40] Chen S M, Yang M W, Lee L W, et al. Fuzzy multiple attributes group decision-making based on ranking interval type-2 fuzzy sets[J]. Expert Systems with Applications, 2012, 39(5): 5295-5308.

[41] 余高锋, 李登峰, 刘文奇. 考虑决策者心理行为特征的激励型变权决策方法研究[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(5): 1304-1312.
(Yu G F, Li D F, Liu W Q. Method for incentive type variable weight decision making considering decision maker’s psychological behavioral character[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2017, 37(5): 1304-1312.)

[42] 余高锋, 费巍, 叶银芳. 基于前景理论的农村电子商务发展水平多维偏好决策方法[J]. 控制与决策, 2020, 35(9): 2182-2188.
(Yu G F, Fei W, Ye Y F. Development level of rural E-commerce multi-dimensional preference decision making method based on prospect theory[J]. Control and Decision, 2020, 35(9): 2182-2188.)

[43] 关洪军, 赵爱武, 石贵泉. 电子商务精准扶贫研究[M]. 北京: 经济科学出版社, 2019: 37-78.
(Guan H J, Zhao A W, Shi G Q. Research on e-commerce precision poverty alleviation[M]. Beijing: Economic Science Press, 2019: 37-78.)

[44] Liang X, Liu P D, Wang Z H. Hotel selection utilizing online reviews: A novel decision support model based on sentiment analysis and dl-vikor method[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2019, 25(6): 1139-1161.

作者简介

汤国林 (1989−), 男, 副教授, 博士, 从事决策理论与优化等研究, Email: guolin_tang@163.com;

杨文栋 (1991−), 男, 副教授, 博士, 从事预测理论与方法等研究, Email: hshwendong@hotmail.com;

刘培德 (1966−), 男, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与优化等研究, Email: peide.liu@gmail.com.

(责任编辑：孙艺红)