

# 控制与决策

Control and Decision

## 指数型犹豫模糊熵在多属性决策中的应用

王拥兵, 苗妙

引用本文:

王拥兵, 苗妙. 指数型犹豫模糊熵在多属性决策中的应用[J]. *控制与决策*, 2022, 37(6): 1460–1468.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1532>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 考虑个体累积共识贡献的犹豫模糊语言自适应共识模型

Adaptive consensus model with hesitant fuzzy linguistic information considering individual cumulative consensus contribution

*控制与决策*. 2021, 36(1): 187–195 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0556>

### 考虑时间序列的动态大群体应急决策方法

Dynamic large group emergency decision-making method considering time series

*控制与决策*. 2020, 35(11): 2609–2618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0088>

### 概率区间值直觉犹豫模糊Maclaurin对称平均算子及决策方法

Probabilistic interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy Maclaurin symmetric mean operators and decision method

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1249–1258 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1370>

### 大群体应急决策中考虑属性关联的偏好信息融合方法

Preference information fusion method of large groups emergency decision-making based on attributes association

*控制与决策*. 2021, 36(10): 2537–2546 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0117>

### 自适应直觉模糊相异直方图裁剪的图像增强算法

Adaptive intuitionistic fuzzy dissimilar histogram clipping image enhancement algorithm

*控制与决策*. 2021, 36(12): 2919–2928 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0845>

# 指数型犹豫模糊熵在多属性决策中的应用

王拥兵<sup>†</sup>, 苗 妙

(安庆师范大学 数理学院, 安徽 安庆 246013)

**摘要:** 提出一种指数型犹豫模糊熵, 并基于熵权法给出犹豫模糊多属性决策模型. 首先, 给出犹豫模糊元熵的公理化定义, 构造犹豫模糊元的指数型犹豫模糊熵测度公式, 并证明指数型犹豫模糊熵测度公式满足犹豫模糊元熵的公理化定义基本准则. 在此基础上, 引入犹豫模糊集的熵定义和熵测度公式, 并证明犹豫模糊集的指数型犹豫模糊熵测度公式同样满足犹豫模糊集熵的公理化定义基本准则. 进一步将指数型犹豫模糊元熵测度公式与现有的犹豫模糊元熵测度公式进行对比分析, 结果表明, 所提出的指数型犹豫模糊元熵测度公式能更完整地确定犹豫模糊元的模糊性. 最后, 将指数型犹豫模糊熵测度公式运用到基于熵权法的犹豫模糊多属性决策模型, 并通过具体案例分析指数型犹豫模糊熵的有效性和实用性.

**关键词:** 模糊集; 犹豫模糊集; 犹豫模糊熵; 熵权法; 熵测度公式; 多属性决策

中图分类号: O159; TP391

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1532

引用格式: 王拥兵, 苗妙. 指数型犹豫模糊熵在多属性决策中的应用[J]. 控制与决策, 2022, 37(6): 1460-1468.

## Application of exponential hesitation fuzzy entropy in multi-attribute decision making

WANG Yong-bing<sup>†</sup>, MIAO Miao

(School of Mathematics and Physics, Anqing Normal University, Anqing 246013, China)

**Abstract:** This paper develops an exponential hesitation fuzzy entropy, and gives a hesitant fuzzy multi-attribute decision-making model based on the entropy weight method. Firstly, an axiomatic definition of exponential hesitant fuzzy element entropy and an exponential hesitation fuzzy element entropy measure formula are proposed. And the exponential hesitation fuzzy element entropy measure formula satisfying the four criteria in the axiomatic definition is proved. Furthermore, the entropy definition and entropy measure formula of hesitant fuzzy sets are derived, and it is proved that the exponential hesitant fuzzy set entropy measure formula also satisfies the four criteria in the axiomatic definition. The exponential hesitation fuzzy entropy is compared with the existing hesitation fuzzy entropy measure formula. The results show that the proposed exponential hesitation fuzzy entropy is more completely determine the fuzziness of hesitation fuzzy value. Finally, the exponential hesitant fuzzy entropy measure formula is applied to the hesitant fuzzy multi-attribute decision-making model, and an example of supplier selection is given to illustrate the effectiveness and practicability of the proposed exponential hesitation fuzzy entropy.

**Keywords:** fuzzy sets; hesitant fuzzy sets; hesitant fuzzy entropy; entropy weight method; entropy measure formula; multiple attribute decision making

## 0 引言

1965年, Zadeh<sup>[1]</sup>首次提出了模糊集合的概念, 随后, 模糊集合广泛应用于各个领域. 随着研究的不断深入, 人们发现模糊信息在实际应用时存在一定的局限性, 于是, 很多学者对模糊集合进行了一系列拓展. 如直觉模糊集<sup>[2]</sup>、2-型模糊集<sup>[3]</sup>、区间模糊集<sup>[4]</sup>等. 为了能够有效地处理不确定信息的决策问题, 2010

年, Torra<sup>[5]</sup>提出了另一种模糊集合的拓展形式——犹豫模糊集. 与模糊集合相比较, 犹豫模糊集能够更有效地解决不确定环境下的多属性决策问题. Xia等<sup>[6]</sup>和 Xu等<sup>[7]</sup>给出了犹豫模糊集的具体数学符号表示, 提出了一系列犹豫模糊集成算子, 讨论了犹豫模糊集的相似度测度和犹豫模糊集之间的距离. Wei等<sup>[8]</sup>讨论了两种犹豫模糊优先级算子, 并将其应用于多

收稿日期: 2020-11-05; 录用日期: 2021-03-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61702012); 安庆师范大学科研发展基金项目(100001104).

责任编辑: 徐泽水.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: wangybing@126.com.

属性决策问题中. Wang等<sup>[9]</sup>在多属性群决策过程中提出了一种新的犹豫模糊几何算子,并探讨了该算子的基本性质. 曾文艺等<sup>[10]</sup>定义了加权犹豫模糊集合,并提出了加权算术平均算子和加权几何平均算子. Qiao<sup>[11]</sup>系统地探讨了犹豫关系的性质以及犹豫关系在三支决策中的应用.

熵是衡量模糊信息不确定性的一个重要概念,关于模糊集和直觉模糊集的熵方法已经有了很多研究<sup>[12-15]</sup>. 近年来,犹豫模糊集的熵测度研究引起了学者们广泛关注. 如:谭吉玉等<sup>[16]</sup>提出了犹豫模糊指数熵的概念,并将其应用于多属性决策问题;Wei等<sup>[17]</sup>提出了一系列基于犹豫模糊元均值和方差的犹豫模糊熵;Hu等<sup>[18]</sup>研究了基于犹豫模糊相似度的犹豫模糊熵;Xu等<sup>[19]</sup>讨论了犹豫模糊环境下的模糊熵和交叉熵,提出了关于犹豫模糊集的几个度量公式,并分析了犹豫模糊熵、交叉熵与相似性度量之间的关系;Liang等<sup>[20]</sup>根据评分函数和最小相对熵原则,构建了基于熵权法的多属性决策模型;刘玉敏等<sup>[21]</sup>提出了3种新的概率犹豫模糊熵公式,给出了这3种熵测度的公理化定义,并有效地运用于多属性决策问题. 实际上,犹豫模糊熵是由模糊熵的概念拓展而来,即犹豫模糊元中每个元素的熵应该都满足模糊熵的定义. 而在实际决策问题中,当犹豫模糊元 $h$ 与其补元 $h^c$ 相同时,即 $h = h^c$ 时,根据现有犹豫模糊熵的一些公式,计算得到犹豫模糊元 $h$ 的熵总为1,以致于属性信息的权重完全相同,这无法体现决策者的偏好. 基于此,本文给出一种新的犹豫模糊熵的公理化定义,构造指数型犹豫模糊熵测度公式,同时还给出犹豫模糊集的熵定义和熵测度公式,并将指数型犹豫模糊熵测度公式运用于基于熵权法的犹豫模糊多属性决策模型.

### 1 预备知识

**定义1**<sup>[5,22]</sup> 设 $X$ 是一个非空集合,则称 $A = \{ \langle x, h_A(x) \rangle | x \in X \}$ 为 $X$ 上的一个犹豫模糊集(hesitant fuzzy set, HFS),其中 $h_A(x)$ 是 $[0, 1]$ 中一些数值的集合,表示元素 $x$ 关于集合 $A$ 的一些可能的隶属程度,并称 $h_A(x) = h(x)$ 为一个犹豫模糊元(hesitant fuzzy element, HFE).

基于定义1, Torra<sup>[5]</sup>给出了HFEs的一些基本运算法则:

$$1) h_1(x) \cup h_2(x) = \{ \gamma \in h_1(x) \cup h_2(x) | \gamma \geq \max(h_1^-(x), h_2^-(x)) \};$$

$$2) h_1(x) \cap h_2(x) = \{ \gamma \in h_1(x) \cap h_2(x) | \gamma \leq \min(h_1^+(x), h_2^+(x)) \};$$

$$3) h^c(x) = \bigcup_{\gamma \in h(x)} \{ 1 - \gamma \}.$$

Xia等<sup>[22]</sup>基于犹豫模糊集和直觉模糊集之间的关系,定义了新的关于HFE的运算法则:

$$1) h(x)^\lambda = \bigcup_{\gamma \in h(x)} \{ \gamma^\lambda \};$$

$$2) \lambda h(x) = \bigcup_{\gamma \in h(x)} \{ 1 - (1 - \gamma)^\lambda \};$$

$$3) h_1(x) \oplus h_2(x) = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1(x), \gamma_2 \in h_2(x)} \{ \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2 \};$$

$$4) h_1(x) \otimes h_2(x) = \bigcup_{\gamma_1 \in h_1(x), \gamma_2 \in h_2(x)} \{ \gamma_1 \gamma_2 \}.$$

若 $h_i(x) (i = 1, 2, \dots, n)$ 为HFE,则Liao等<sup>[23]</sup>给出如下推广:

$$5) \bigoplus_{i=1}^n h_i(x) = \bigcup_{\gamma_i \in h_i(x)} \left\{ 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i) \right\};$$

$$6) \bigotimes_{i=1}^n h_i(x) = \bigcup_{\gamma_i \in h_i(x)} \left\{ \prod_{i=1}^n \gamma_i \right\}.$$

对于两个犹豫模糊元之间的距离,文献<sup>[19]</sup>给出如下公式:

$$d(h_1, h_2) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l |h_1^{\sigma(i)} - h_2^{\sigma(i)}|. \quad (1)$$

其中: $h_1^{\sigma(i)}$ 和 $h_2^{\sigma(i)}$ 分别为 $h_1$ 和 $h_2$ 中第 $i$ 大的数; $l$ 表示HFE $h$ 的长度,且 $l = \max\{l(h_1), l(h_2)\}$ .

**定义2**<sup>[12]</sup> 模糊熵是描述模糊集的不确定性,它满足:

(E1) 若模糊集的隶属度为0或1,则该模糊集的模糊熵为0.

(E2) 若模糊集的隶属度为0.5,则该模糊集的模糊熵最大.

(E3) 模糊集 $A$ 的隶属度越接近0.5,它的模糊熵越大;反之,越远离0.5,它的模糊熵越小.

(E4) 模糊集 $A$ 与它的补集 $A^c$ 的模糊熵相等.

**定义3**<sup>[19]</sup> 设 $X$ 是给定的一个非空集合,而

$$h = \{ \gamma^{\sigma(1)}, \gamma^{\sigma(2)}, \dots, \gamma^{\sigma(n)} \},$$

$$h_1 = \{ \gamma_1^{\sigma(1)}, \gamma_1^{\sigma(2)}, \dots, \gamma_1^{\sigma(n)} \},$$

$$h_2 = \{ \gamma_2^{\sigma(1)}, \gamma_2^{\sigma(2)}, \dots, \gamma_2^{\sigma(n)} \}$$

是集合 $X$ 上的3个HFEs,且 $l = l(h) = l(h_1) = l(h_2)$ . 定义实函数 $E: H \rightarrow [0, 1]$ ,使其满足:(E1) 若 $h = \{0\}$ 或 $h = \{1\}$ ,则 $E(h) = 0$ ;(E2) 若 $\gamma_{\sigma(i)} + \gamma_{\sigma(l-i+1)} = 1$ ,则 $E(h) = 1$ ,其中 $i = 1, 2, \dots, l$ ;(E3)  $E(h) = E(h^c)$ ;(E4) 若 $\gamma_2^{\sigma(i)} + \gamma_2^{\sigma(l-i+1)} \leq 1$ 且 $\gamma_1^{\sigma(i)} \leq \gamma_2^{\sigma(i)}$ 或 $\gamma_2^{\sigma(i)} + \gamma_2^{\sigma(l-i+1)} \geq 1$ 且 $\gamma_1^{\sigma(i)} \geq \gamma_2^{\sigma(i)}$ ,则 $E(h_1) \leq E(h_2)$ ,其中 $i = 1, 2, \dots, l$ . 因此 $E$ 为犹豫模糊熵.

从定义3可以看出,若两个犹豫模糊元的元素个数不相同,则该犹豫模糊熵无法对其进行度量. 为

了解决这个问题,文献[7]中提出了补充犹豫模糊元素的方法:先按从小到大的顺序将犹豫模糊元内的元素进行排序,再将元素少的犹豫模糊元补充额外的元素,直到犹豫模糊元内的元素个数达到  $l = \max\{l(h_1), l(h_2)\}$ . 补充的原则按照乐观原则或悲观原则:乐观原则是补充集合中值最大的元素,而悲观原则是补充集合中值最小的元素. 由定义3可以看出,对于 HFE  $h = \{0.4, 0.5, 0.6\}$ , 它的犹豫模糊熵是 1. 但根据定义2,元素 0.5 的模糊熵是 1, 而元素 0.4 和 0.6 的模糊熵应该是相等且都小于 1, 由此可得犹豫模糊元  $h$  的犹豫模糊熵也应该小于 1. 因此,不难看出定义3中的 (E2) 需要进一步完善,且 (E4) 中对两个 HFEs 中的元素个数必须相等这一条件要求过高,而对于元素个数不相等的两个犹豫模糊元而言,无法判断它们熵值的大小.

### 2 犹豫模糊元的指数型犹豫模糊熵

为了进一步完善上述相关定义,下面给出指数型犹豫模糊熵的概念.

**定义4** 设  $X$  是给定的一个非空集合,  $h, h_1$  和  $h_2$  是  $X$  上的 3 个 HFEs, 且  $l_h = l(h), l_1 = l(h_1), l_2 = l(h_2)$ . 称实函数  $E: H \rightarrow [0, 1]$  为犹豫模糊元的指数型犹豫模糊熵, 需要满足以下性质:

(E1) 当且仅当  $h = \{0\}$  或  $h = \{1\}$ , 或  $h = \{0, 1\}$  时,  $E(h) = 0$ ;

(E2) 当且仅当  $h = \{0.5\}$  时,  $E(h) = 1$ ;

(E3)  $E(h) = E(h^c)$ ;

(E4) 若  $e^{-\frac{2}{l_1} \sum_{\gamma_1 \in h_1} |\gamma_1 - 0.5|} \leq e^{-\frac{2}{l_2} \sum_{\gamma_2 \in h_2} |\gamma_2 - 0.5|}$ , 则  $E(h_1) \leq E(h_2)$ .

**定理1** 设  $X$  是给定的一个非空集合,  $h = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  是  $X$  上的一个 HFE, 令

$$E_{\text{new}}(h) = \frac{e^{-\frac{2}{l} \sum_{\gamma \in h} |\gamma - 0.5|} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}}, \quad (2)$$

则  $E_{\text{new}}(h)$  为 HFE  $h$  的熵.

**证明** 首先证明  $0 \leq E_{\text{new}}(h) \leq 1$ .

已知  $0 \leq \gamma \leq 1$ , 即  $0 \leq |\gamma - 0.5| \leq 0.5$ , 由此可得  $-1 \leq -\frac{2}{l} \sum_{\gamma \in h} |\gamma - 0.5| \leq 0$ , 则  $e^{-\frac{2}{l} \sum_{\gamma \in h} |\gamma - 0.5|} \geq 1/e$ , 且

$$0 \leq e^{-\frac{2}{l} \sum_{\gamma \in h} |\gamma - 0.5|} - \frac{1}{e} \leq 1 - \frac{1}{e}.$$

于是  $0 \leq E_{\text{new}}(h) \leq 1$ .

(E1) 充分性.

若  $h = \{0\}$ , 则

$$E_{\text{new}}(h) = \frac{e^{-\frac{2}{1}|0-0.5|} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 0;$$

若  $h = \{1\}$ , 则

$$E_{\text{new}}(h) = \frac{e^{-\frac{2}{1}|1-0.5|} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 0;$$

若  $h = \{0, 1\}$ , 则

$$E_{\text{new}}(h) = \frac{e^{-\frac{2}{2}(|1-0.5|+|0-0.5|)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 0.$$

必要性. 若

$$E_{\text{new}}(h) = \frac{e^{-\frac{2}{l} \sum_{\gamma \in h} |\gamma - 0.5|} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 0,$$

则  $e^{-\frac{2}{l} \sum_{\gamma \in h} |\gamma - 0.5|} = \frac{1}{e}$ , 从而  $-\frac{2}{l} \sum_{\gamma \in h} |\gamma - 0.5| = -1$ , 即

$\sum_{\gamma \in h} |2\gamma - 1| = l(h)$ . 而  $0 \leq |2\gamma - 1| \leq 1$ , 则  $\forall \gamma \in h$ , 有  $|2\gamma - 1| = 1$ . 于是  $\gamma = 0$  或  $\gamma = 1$ , 或  $\gamma = \{0, 1\}$ .

(E2) 充分性.

当  $h = \{0.5\}$  时, 显然有

$$E_{\text{new}}(h) = \frac{e^{-\frac{2}{1}|0.5-0.5|} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1 - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 1.$$

必要性. 若

$$E_{\text{new}}(h) = \frac{e^{-\frac{2}{l} \sum_{\gamma \in h} |\gamma - 0.5|} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 1,$$

则  $e^{-\frac{2}{l} \sum_{\gamma \in h} |\gamma - 0.5|} = 1$ . 所以  $-\frac{2}{l} \sum_{\gamma \in h} |\gamma - 0.5| = 0$ , 即  $\gamma = 0.5$ .

(E3)  $E(h) = E(h^c)$  显然成立.

(E4) 若  $e^{-\frac{2}{l_1} \sum_{\gamma_1 \in h_1} |\gamma_1 - 0.5|} \leq e^{-\frac{2}{l_2} \sum_{\gamma_2 \in h_2} |\gamma_2 - 0.5|}$ , 则

$$E_{\text{new}1}(h) = \frac{e^{-\frac{2}{l_1} \sum_{\gamma_1 \in h_1} |\gamma_1 - 0.5|} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} \leq$$

$$\frac{e^{-\frac{2}{l_2} \sum_{\gamma_2 \in h_2} |\gamma_2 - 0.5|} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = E_{\text{new}2}(h).$$

因此,  $E_{\text{new}}(h)$  满足定义4中的4条准则, 即  $E_{\text{new}}(h)$  为 HFE  $h$  的犹豫模糊熵.  $\square$

显然, 任意给定一个 HFE  $h$ , 当  $h = h^c$  时,  $h$  的熵未必总为 1. 事实上, 令  $h = \{0.5\}$ , 由定理1知,  $E_{\text{new}}(h) = 1$ ; 但若  $h = \{0.4, 0.5, 0.6\}$ , 则有

$$E_{\text{new}}(h) = \frac{e^{-\frac{2}{3}(|0.4-0.5|+|0.5-0.5|+|0.6-0.5|)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 0.8025.$$

### 3 犹豫模糊集的指数型犹豫模糊熵

**定义5** 设  $X$  是给定的一个非空集合,  $A$  和  $B$  是  $X$  上的两个 HFSs,  $h_i$  和  $h_j$  分别是  $A$  和  $B$  上的犹豫模糊元, 且  $l_i = l(h_i), l_j = l(h_j)$ . 称实函数  $E : H \rightarrow [0, 1]$  为犹豫模糊集的犹豫模糊熵, 需要满足以下性质:

- (E1) 当且仅当  $h_A(x_i) = \{0\}$  或  $h_A(x_i) = \{1\}$ , 或  $h_A(x_i) = \{0, 1\}$  时,  $E(A) = 0$ ;
- (E2) 当且仅当  $h_A(x_i) = \{0.5\}$  时,  $E(A) = 1$ ;
- (E3)  $E(A) = E(A^c)$ ;
- (E4) 若

$$\frac{e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma_{\sigma_i} - 0.5|\right)} \leq \frac{e^{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left(-\frac{2}{l_j} \sum_{\gamma \in h_j} |\gamma_{\sigma_j} - 0.5|\right)}}{e},$$

则  $E(A) \leq E(B)$ .

若每个犹豫模糊集只有一个犹豫模糊元, 则犹豫模糊集的熵退化为犹豫模糊元的熵, 于是定义5退化为定义4.

**定理2** 设  $X$  是给定的一个非空集合,  $A = \{(x_i, h_A(x_i)) | x_i \in X\} (i = 1, 2, \dots, n)$  是  $X$  上的一个 HFS, 令

$$E'_{\text{new}}(A) = \frac{e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma - 0.5|\right)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}}, \quad (3)$$

则  $E'_{\text{new}}(h)$  为 HFSA 的熵.

**证明** 当  $i = 1$  时, 定理2退化为定理1, 下面证明  $i = 1, 2, \dots, n$  的情况.

首先证明  $0 \leq E'_{\text{new}}(h) \leq 1$ .

已知  $0 \leq \gamma \leq 1$ , 即  $0 \leq |\gamma - 0.5| \leq 0.5$ , 得

$$-1 \leq -\frac{2}{l_i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma - 0.5| \leq 0,$$

从而

$$-n \leq \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma - 0.5|\right) \leq 0,$$

即

$$-1 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma - 0.5|\right) \leq 0.$$

则

$$\frac{e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma - 0.5|\right)} \geq \frac{1}{e},$$

且

$$0 \leq e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma - 0.5|\right)} - \frac{1}{e} \leq 1 - \frac{1}{e}.$$

于是  $0 \leq E'_{\text{new}}(h) \leq 1$ .

(E1) 充分性.

若  $h_A(x_i) = \{0\}$ , 则

$$E'_{\text{new}}(h) = \frac{e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} |0 - 0.5|\right)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e^{\frac{1}{n}(-n)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 0;$$

若  $h_A(x_i) = \{1\}$ , 则

$$E'_{\text{new}}(h) = \frac{e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} |1 - 0.5|\right)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e^{\frac{1}{n}(-n)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 0;$$

若  $h_A(x_i) = \{0, 1\}$ , 则

$$E'_{\text{new}}(h) = \frac{e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} |1 - 0.5| + |0 - 0.5|\right)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e^{\frac{1}{n}(-n)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 0.$$

必要性. 若

$$E'_{\text{new}}(h) = \frac{e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma - 0.5|\right)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 0,$$

有

$$e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma - 0.5|\right)} = \frac{1}{e},$$

即

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{2}{l_i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma - 0.5|\right) = -1.$$

从而

$$\sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{l_i} \sum_{\gamma \in h_i} |2\gamma - 1|\right) = -n,$$

因此

$$\sum_{\gamma \in h_i} |2\gamma - 1| = l(h_i).$$

而  $0 \leq |2\gamma - 1| \leq 1$ , 则  $\forall \gamma \in h$ , 有  $|2\gamma - 1| = 1$ . 于是  $\gamma = 0$  或  $\gamma = 1$ , 或  $\gamma = \{0, 1\}$ .

(E2) 充分性.

当  $h_A(x_i) = \{0.5\}$  时, 显然有

$$E'_{\text{new}}(h) = \frac{e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-\frac{2}{i} |0.5-0.5|)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1 - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 1.$$

必要性. 当

$$E'_{\text{new}}(h) = \frac{e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-\frac{2}{i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma-0.5|)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = 1$$

时,即

$$e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-\frac{2}{i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma-0.5|)} = 1,$$

所以

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( -\frac{2}{i} \sum_{\gamma \in h_i} |\gamma - 0.5| \right) = 0,$$

得  $\gamma = 0.5$ .

(E3)  $E(A) = E(A^c)$  显然成立.

(E4) 若

$$e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( -\frac{2}{i} \sum_{\gamma_{\sigma_i} \in h_i} |\gamma_{\sigma_i} - 0.5| \right)} \leq e^{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left( -\frac{2}{j} \sum_{\gamma_{\sigma_j} \in h_j} |\gamma_{\sigma_j} - 0.5| \right)},$$

显然有

$$E'_{\text{new1}}(A) = \frac{e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( -\frac{2}{i} \sum_{\gamma_{\sigma_i} \in h_i} |\gamma_{\sigma_i} - 0.5| \right)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} \leq \frac{e^{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left( -\frac{2}{j} \sum_{\gamma_{\sigma_j} \in h_j} |\gamma_{\sigma_j} - 0.5| \right)} - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = E'_{\text{new2}}(B).$$

因此,  $E'_{\text{new}}(A)$  满足定义4中的4条准则, 即  $E'_{\text{new}}(A)$  为HFS A的犹豫模糊熵.  $\square$

### 4 与现有犹豫模糊元熵的比较

为了说明本文所提出的指数型犹豫模糊熵的合理性, 首先根据文献[24]中的犹豫模糊熵公式  $E_1(h)$  以及文献[19]中的犹豫模糊熵公式  $E_2(h)$  和  $E_3(h)$  分别计算犹豫模糊元, 有

$$h_1 = \{0.5\}, h_2 = \{0.3, 0.7\}, h_3 = \{0.4, 0.6\},$$

$$h_4 = \{0.4, 0.5, 0.6\}, h_5 = \{0.3, 0.5, 0.7\},$$

$$h_6 = \{0.7, 0.8, 0.9\}, h_7 = \{0.7, 0.9, 0.95\}.$$

再将其与指数型犹豫模糊熵的结果进行对比, 有

$$E_1(h) = 1 - \frac{2}{l(h)} \sum_{i=1}^{l(h)} |h^{\sigma(i)} - 0.5|,$$

$$E_2(h) =$$

$$\frac{1}{l(h)(\sqrt{2}-1)} \sum_{i=1}^{l(h)} \left[ \sin \frac{\pi(\gamma_{\sigma(i)} + \gamma_{\sigma(l(h)-i+1)})}{4} + \sin \frac{\pi(2 - \gamma_{\sigma(i)} - \gamma_{\sigma(l(h)-i+1)})}{4} - 1 \right],$$

$$E_3(h) =$$

$$-\frac{1}{l(h) \ln 2} \sum_{j=1}^{l(h)} \left[ \frac{h^{\sigma(j)} + h^{\sigma(l-j+1)}}{2} \times \ln \frac{h^{\sigma(j)} + h^{\sigma(l-h-j+1)}}{2} + \frac{2 - h^{\sigma(j)} - h^{\sigma(l-j+1)}}{2} \ln \frac{2 - h^{\sigma(j)} - h^{\sigma(l-j+1)}}{2} \right].$$

其中各符号的含义与定义4中相同. 计算结果见表1~表3.

表1 4种犹豫模糊熵计算结果(1)

	$h_1 = \{0.5\}$	$h_2 = \{0.3, 0.7\}$	$h_3 = \{0.4, 0.6\}$
$E_{\text{new}}(h)$	1	0.4785	0.7132
$E_1(h)$	1	0.6000	0.8000
$E_2(h)$	1	1	1
$E_3(h)$	1	1	1

表2 4种犹豫模糊熵计算结果(2)

	$h_4 = \{0.4, 0.5, 0.6\}$	$h_5 = \{0.3, 0.5, 0.7\}$
$E_{\text{new}}(h)$	0.8025	0.6297
$E_1(h)$	0.8667	0.7333
$E_2(h)$	1	1
$E_3(h)$	1	1

表3 4种犹豫模糊熵计算结果(3)

	$h_6 = \{0.7, 0.8, 0.9\}$	$h_7 = \{0.7, 0.9, 0.95\}$
$E_{\text{new}}(h)$	0.2862	0.2036
$E_1(h)$	0.4000	0.3000
$E_2(h)$	0.6279	0.4924
$E_3(h)$	0.7219	0.6023

根据犹豫模糊数与熵的关系, 下面对表1~表3的结果进行比较, 分析4个犹豫模糊熵公式所得结果的不同点和相同点.

相同点:

1) 根据模糊熵的基本特性知, 3个犹豫模糊熵公式所计算的犹豫模糊熵值都是分布在  $[0, 1]$  上的数值, 且在  $h_1 = \{0.5\}$  时, 犹豫模糊熵均为1.

2) 当  $h = h^c$  时,  $E_2(h)$  和  $E_3(h)$  计算得到的犹豫模糊熵均为1; 当  $h \neq h^c$  时, 如HFE  $h_6 = \{0.7, 0.8, 0.9\}$  或  $h_7 = \{0.7, 0.9, 0.95\}$  时, 有  $E_i(h_6) > E_i(h_7)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 以及  $E_{\text{new}}(h_6) > E_{\text{new}}(h_7)$ . 这些结果均与实际相符合.

3) 无论犹豫模糊元  $h$  与其补元是否相同,  $E_{\text{new}}(h)$  和  $E_1(h)$  计算得到的结果不再始终为 1.

不同点:

1) 当  $h = h^c$  时, 如 HFEs, 有

$$h_2 = \{0.3, 0.7\}, h_3 = \{0.4, 0.6\},$$

$$h_4 = \{0.4, 0.5, 0.6\}, h_5 = \{0.3, 0.5, 0.7\}.$$

显然,  $h_i = h_i^c (i = 2, 3, 4, 5)$ . 从各犹豫模糊元的隶属度值分布情况来看, 它们的犹豫模糊熵并不相同, 具体分析如下:

① 由定义 2 知, 模糊数  $\{0.4\}$  和  $\{0.6\}$  的模糊熵都应小于 0.5, 由此可知,  $h_3$  的犹豫模糊熵也应小于  $h_1$  的犹豫模糊熵. 根据表 1,  $E_{\text{new}}(h)$  和  $E_1(h)$  的计算结果符合实际情况.

② 在 HFE  $h_4 = \{0.4, 0.5, 0.6\}$  中, 模糊数  $\{0.5\}$  的模糊熵为 1, 但根据犹豫  $h_4$  中的隶属度值情况,  $h_4$  犹豫模糊熵应该大于  $h_3$  的犹豫模糊熵, 根据表 1 和表 2 中的计算结果来看,  $E_{\text{new}}(h)$  的计算结果更符合这一要求.

③ 由定义 2 知,  $h_2 = \{0.3, 0.7\}$  的犹豫模糊熵应小于  $h_3 = \{0.4, 0.6\}$  的犹豫模糊熵, 所以  $h_5 = \{0.3, 0.5, 0.7\}$  的犹豫模糊熵也应小于  $h_4 = \{0.4, 0.5, 0.6\}$  的犹豫模糊熵. 由表 2 中可以看出,  $E_{\text{new}}(h)$  的计算结果更符合这一要求.

2) 对于  $h \neq h^c$  的情况, 如 HFEs  $h_6 = \{0.7, 0.8, 0.9\}, h_7 = \{0.7, 0.9, 0.95\}$ . 显然,  $h_6 \neq h_6^c, h_7 \neq h_7^c$ . 由定义 2 知, 模糊数  $\{0.95\}$  的模糊熵小于模糊数  $\{0.8\}$  的模糊熵, 从而  $h_7$  的犹豫模糊熵也应小于  $h_6$  的犹豫模糊熵. 实际上, 由上述讨论知, 均有  $E_i(h_6) > E_i(h_7) (i = 1, 2, 3), E_{\text{new}}(h_6) > E_{\text{new}}(h_7)$ . 但由于  $h_6, h_7$  中的隶属度值都是模糊性很小的数值, 所以  $h_6, h_7$  犹豫模糊熵应该接近于 0. 由表 3 知,  $E_{\text{new}}(h_6) = 0.2862, E_{\text{new}}(h_7) = 0.2036$ . 此外, HFEs  $h_6$ 、HFEs  $h_7$  中分别含有隶属度 0.8 和 0.95, 而模糊数  $\{0.8\}$  和  $\{0.95\}$  的模糊熵均接近于 0, 因此, HFEs  $h_6$ 、HFEs  $h_7$  的犹豫模糊熵应相差很小. 从表 3 中的计算结果来看,  $E_{\text{new}}(h)$  最符合上述情况.

基于上述分析, 本文提出的指数型犹豫模糊熵  $E_{\text{new}}(h)$  进一步完善了犹豫模糊集的熵理论.

### 5 基于熵权法的多属性决策模型

对于某一多属性决策问题, 设  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  为一组备选方案,  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  为备选方案的属性集合. 决策者根据属性  $G$  对备选方案  $A$  进行评估, 这些评估值就被视为犹豫模糊元素  $h_{ij}$ . 若决策者提供了相同的评估值, 则该评估值仅出现一

次. 下面给出决策模型的具体步骤.

step 1: 决策者根据属性  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  对备选方案  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  进行评估, 给出评估矩阵  $H_{ij} = (h_{ij}) (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$ . 在决策过程中一般会遇到两类属性: 1) 效益型属性, 偏好值越大越好; 2) 成本型属性, 偏好值越小越好.

step 2: 利用式 (2) 计算所有犹豫模糊元的指数型犹豫模糊熵, 再计算各属性的平均熵 (或利用式 (3) 直接计算各属性集合的指数型犹豫模糊熵).

step 3: 根据指数型犹豫模糊熵确定属性权重向量, 计算公式如下:

$$w_j = \frac{1 - E_j}{n - \sum_{j=1}^n E_j}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

step 4: 确定正负理想方案, 利用式 (1) 计算各备选方案与正负理想方案的距离. 正理想方案为  $A^+ = (h_1^+, h_2^+, \dots, h_n^+)$ , 负理想方案为  $A^- = (h_1^-, h_2^-, \dots, h_n^-)$ . 当属性为效益型属性时,  $h_1^+ = 1, h_1^- = 0$ ; 当属性为成本型属性时,  $h_1^+ = 0, h_1^- = 1$ . 将各方案与正负理想方案的距离进行加权, 计算公式如下:

$$d^+(A_i) = \sum_{j=1}^n w_j d_{ij}^+ = \sum_{j=1}^n w_j d(h_{ij}, h_j^+), \quad (5)$$

$$d^-(A_i) = \sum_{j=1}^n w_j d_{ij}^- = \sum_{j=1}^n w_j d(h_{ij}, h_j^-), \quad (6)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, m$ .

step 5: 计算各方案相对于正理想方案的相对贴近度, 计算公式如下:

$$S(A_i) = \frac{d^-(A_i)}{d^+(A_i) + d^-(A_i)}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

最后根据贴近度的大小对各方案进行排序, 贴近度越大, 方案越优.

例 1 某工厂要为工人们订购一批防护口罩, 现有 4 家供应商  $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的口罩可供选择. 根据实际情况, 需要考虑 5 个评估指标: 防护效果 ( $G_1$ ), 过滤效果 ( $G_2$ ), 连接处断裂强力 ( $G_3$ ), 呼吸阻力 ( $G_4$ ), 呼吸阀盖牢度 ( $G_5$ ). 可以看出, 前 3 个属性和最后一个属性是效益型属性, 第 4 个属性是成本型属性.

step 1: 决策者给出的犹豫模糊决策矩阵如表 4 所示.

step 2: 利用式 (2) 计算出所有犹豫模糊元的指数型犹豫模糊熵, 计算结果见表 5.

计算各属性的平均熵, 有

$$E_1 = \frac{1}{4}(0.4785 + 0.6297 + 0.4785 + 0.5516) = 0.5346.$$

同理可得

表4 犹豫模糊决策矩阵(1)

	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$
$A_1$	{0.2, 0.4, 0.7}	{0.1, 0.2, 0.5, 0.7}	{0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 0.8}	{0.1, 0.4, 0.6}	{0.4, 0.5, 0.6}
$A_2$	{0.4, 0.6, 0.7}	{0.1, 0.2, 0.4, 0.6}	{0.3, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9}	{0.1, 0.2, 0.4}	{0.3, 0.5, 0.7}
$A_3$	{0.2, 0.3, 0.6}	{0.3, 0.4, 0.5, 0.9}	{0.2, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8}	{0.3, 0.4, 0.8}	{0.1, 0.5, 0.9}
$A_4$	{0.2, 0.3, 0.5}	{0.2, 0.3, 0.5, 0.7}	{0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9}	{0.1, 0.2, 0.7}	{0.2, 0.5, 0.8}

表5 犹豫模糊决策矩阵(2)

	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$
$A_1$	0.4785	0.4267	0.4785	0.4785	0.8025
$A_2$	0.6297	0.4267	0.4369	0.3461	0.6297
$A_3$	0.4785	0.5328	0.4785	0.4785	0.3461
$A_4$	0.5516	0.5328	0.4369	0.2862	0.4785

$E_2 = 0.4798, E_3 = 0.4577,$

$E_4 = 0.3973, E_5 = 0.5642.$

step 3: 利用式(4)确定属性权重, 可得

$$w_1 = \frac{1 - E_1}{5 - (E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5)} = 0.1813.$$

同理可得

表6 犹豫模糊决策矩阵(3)

	$d_{i1}^+$	$d_{i2}^+$	$d_{i3}^+$	$d_{i4}^+$	$d_{i5}^+$	$d_{i1}^-$	$d_{i2}^-$	$d_{i3}^-$	$d_{i4}^-$	$d_{i5}^-$
$A_1$	0.5667	0.6250	0.5000	0.3667	0.5000	0.4333	0.3750	0.5000	0.6333	0.5000
$A_2$	0.4333	0.6750	0.4000	0.2333	0.5000	0.5667	0.3250	0.6000	0.7667	0.5000
$A_3$	0.6333	0.4750	0.4600	0.5000	0.5000	0.3667	0.5250	0.5400	0.5000	0.5000
$A_4$	0.6667	0.5750	0.3200	0.3333	0.5000	0.3333	0.4250	0.6800	0.6667	0.5000

利用式(5)和(6)计算各方案与正负理想方案的加权距离, 有

$$d^+(A_1) = 0.1813 \times 0.5667 + 0.2027 \times 0.6250 + 0.2113 \times 0.5000 + 0.2348 \times 0.3667 + 0.1698 \times 0.5000 = 0.5061.$$

同理可得

$d^+(A_2) = 0.4396, d^+(A_3) = 0.5106,$

$d^+(A_4) = 0.4682;$

$d^-(A_1) = 0.4938, d^-(A_2) = 0.5603,$

$d^-(A_3) = 0.4893, d^-(A_4) = 0.5317.$

step 5: 利用式(7)计算各方案相对于正理想方案的相对贴近度, 有

$$S(A_1) = \frac{d^-(A_1)}{d^+(A_1) + d^-(A_1)} = 0.4938.$$

同理可得

$S(A_2) = 0.5603, S(A_3) = 0.4893, S(A_4) = 0.5317.$

$w_2 = 0.2027, w_3 = 0.2113,$

$w_4 = 0.2348, w_5 = 0.1698.$

step 4: 确定正负理想方案. 已知前3个属性和最后一个为效益型属性, 第4个属性为成本型属性, 因此, 得到正负理想方案为

$A^+ = (\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\},$

$\{0, 0, 0\}, \{1, 1, 1\}),$

$A^- = (\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\},$

$\{1, 1, 1\}, \{0, 0, 0\}).$

利用式(1)计算各备选方案与正负理想方案的距离, 结果见表6.

根据贴近度的大小得到以下排序:

$S(A_2) \geq S(A_4) \geq S(A_1) \geq S(A_3),$

于是最终的方案排序结果为  $A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$ , 即最佳选择方案是  $A_2$ .

若利用式(3)直接计算各属性的指数型犹豫模糊熵, 则计算过程更加简便. 上述步骤从step 2发生改变.

step 2': 利用式(3)直接计算各属性的指数型犹豫模糊熵, 则计算结果为

$E'_{new}(G_1) = 0.5328, E'_{new}(G_2) = 0.4785,$

$E'_{new}(G_3) = 0.4575, E'_{new}(G_4) = 0.3937,$

$E'_{new}(G_5) = 0.5516.$

step 3': 利用式(4)确定属性权重

$$w_1 = \frac{1 - E'_{new}(G_1)}{5 - \sum_{i=1}^5 E'_{new}(G_i)} = 0.1807.$$

同理可得

$$w_2 = 0.2017, w_3 = 0.2098,$$

$$w_4 = 0.2345, w_5 = 0.1734.$$

step4': 确定正负理想方案. 已知前3个属性和最后一个为效益型属性, 第4个属性为成本型属性, 因此, 得到正负理想方案为

$$A^+ = (\{1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1\}, \{0, 0, 0\}, \{1, 1, 1\}),$$

$$A^- = (\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0\}, \{1, 1, 1\}, \{0, 0, 0\}).$$

利用式(1)计算各备选方案与正负理想方案的距离, 结果见表6.

利用式(5)和(6)计算各方案与正负理想方案的加权距离

$$d^+(A_1) = 0.1807 \times 0.5667 + 0.2017 \times 0.6250 + 0.2098 \times 0.5000 + 0.2345 \times 0.3667 + 0.1734 \times 0.5000 = 0.5061.$$

同理可得

$$d^+(A_2) = 0.4398, d^+(A_3) = 0.5107,$$

$$d^+(A_4) = 0.4684;$$

$$d^-(A_1) = 0.4940, d^-(A_2) = 0.5603,$$

$$d^-(A_3) = 0.4894, d^-(A_4) = 0.5317.$$

step5': 利用式(7)计算各方案相对于正理想方案的相对贴程度

$$S(A_1) = \frac{d^-(A_1)}{d^+(A_1) + d^-(A_1)} = 0.4962.$$

同理可得

$$S(A_2) = 0.5602, S(A_3) = 0.4894, S(A_4) = 0.5316.$$

根据贴程度的大小得到以下排序:

$$S(A_2) \geq S(A_4) \geq S(A_1) \geq S(A_3),$$

于是最终的方案排序结果仍为  $A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$ , 即最佳选择方案还是  $A_2$ .

比较分析: 若仍采用文献[16]中的犹豫模糊熵公式  $E(h)^{[16]}$  和文献[25]中的犹豫模糊熵公式  $E_F(h)$  来计算, 则对比结果如表7所示.

表7 利用不同熵公式计算得到的排序结果

	方案排序
$E_{new}(h)$	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$
$E(h)^{[16]}$	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$
$E_F(h)$	$A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$

分析上述4家供应商的产品优劣顺序和综合性能最高的产品可以发现, 运用3种不同的熵公式计算得到的综合性能最合适的产品相同, 即综合性能最高的产品都是  $A_2$ , 这说明本文所提出的指数型犹豫模糊熵公式是合理的. 然而,  $E(h)^{[16]}$  的计算结果虽与本文方法计算结果一致, 但计算过程过于复杂, 不便于实际操作. 而  $E_F(h)$  计算的结果略有不同, 这是因为  $E_F(h)$  在计算犹豫模糊元的熵值时, 只是简单选取每个犹豫模糊元中的最大值或最小值, 这会影响数据的原始信息, 使得计算结果发生改变. 此外, 若利用文献[19]中的  $E_2(h)$  和  $E_3(h)$  来计算, 则属性  $G_5$  所对应的犹豫模糊元的犹豫模糊熵均为1, 使得在该决策过程中, 属性  $G_5$  的权重始终为0, 致使在决策过程中该属性完全被忽略, 也会影响综合评价结果.

### 6 结论

本文针对现有的一些犹豫模糊元的熵公式存在的问题, 提出了新的犹豫模糊熵公理化定义, 构造了指数型犹豫模糊熵测度公式; 然后引出关于犹豫模糊集的熵定义和熵测度公式, 并将指数型犹豫模糊熵与现有的犹豫模糊元熵测度公式通过具体犹豫模糊数进行了对比分析. 从分析结果可以看出, 指数型犹豫模糊熵既满足了现有的模糊熵的公理化定义基本准则, 又能处理一些特殊的犹豫模糊元的模糊熵问题. 因此, 本文所提出的指数型犹豫模糊熵能更完整地确定犹豫模糊元的模糊性, 从而完善了犹豫模糊集熵理论. 最后, 通过具体案例分析了指数型犹豫模糊熵的有效性和实用性.

### 参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.
- [3] Dubois D, Prade H. Fuzzy sets and systems: Theory and applications[M]. New York: Academic Press, 1980: 1-411.
- [4] Turksen I B. Interval valued fuzzy sets based on normal forms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(2): 191-210.
- [5] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.
- [6] Xia M M, Xu Z S. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2011, 52(3): 395-407.
- [7] Xu Z S, Xia M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.

- [8] Wei G W. Hesitant fuzzy prioritized operators and their application to multiple attribute decision making[J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 31: 176-182.
- [9] Wang W Z, Liu X W. Some hesitant fuzzy geometric operators and their application to multiple attribute group decision making[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2014, 20(3): 371-390.
- [10] 曾文艺, 李德清, 尹乾. 加权犹豫模糊集的群决策方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(3): 527-534.  
(Zeng W Y, Li D Q, Yin Q. Group decision making approach of weighted hesitant fuzzy sets[J]. Control and Decision, 2019, 34(3): 527-534.)
- [11] Qiao J S. Hesitant relations: Novel properties and applications in three-way decisions[J]. Information Sciences, 2019, 497: 165-188.
- [12] De Luca A, Termini S. A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory[J]. Information and Control, 1972, 20(4): 301-312.
- [13] Pal N R, Bustince H, Pagola M, et al. Uncertainties with Atanassov's intuitionistic fuzzy sets: Fuzziness and lack of knowledge[J]. Information Sciences, 2013, 228: 61-74.
- [14] 邓廷权, 王占江, 汪培培, 等. 二型模糊集的模糊熵研究[J]. 控制与决策, 2012, 27(3): 408-412.  
(Deng T Q, Wang Z J, Wang P P, et al. Study on fuzzy entropy of type-2 fuzzy sets[J]. Control and Decision, 2012, 27(3): 408-412.)
- [15] 高明美, 孙涛, 朱建军. 一种改进的直觉模糊熵公理化定义和构造公式[J]. 控制与决策, 2014, 29(3): 470-474.  
(Gao M M, Sun T, Zhu J J. Revised axiomatic definition and structural formula of intuitionistic fuzzy entropy[J]. Control and Decision, 2014, 29(3): 470-474.)
- [16] 谭吉玉, 刘高常. 犹豫模糊指数熵及其应用[J]. 统计与决策, 2017(24): 66-69.  
(Tan J Y, Liu G C. Hesitant fuzzy exponential entropy and its application[J]. Statistics & Decision, 2017(24): 66-69.)
- [17] Wei C P, Yan F F, Rodríguez R M. Entropy measures for hesitant fuzzy sets and their application in multi-criteria decision-making[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2016, 31(1): 673-685.
- [18] Hu J H, Zhang X L, Chen X H, et al. Hesitant fuzzy information measures and their applications in multi-criteria decision making[J]. International Journal of Systems Science, 2016, 47(1): 62-76.
- [19] Xu Z S, Xia M M. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multiattribute decision-making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2012, 27(9): 799-822.
- [20] Liang W, Goh M, Wang Y M. Multi-attribute group decision making method based on prospect theory under hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. Computers & Industrial Engineering, 2020, 149: 106804.
- [21] 刘玉敏, 朱峰, 靳琳琳. 基于概率犹豫模糊熵的多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(4): 861-870.  
(Liu Y M, Zhu F, Jin L L. Multi-attribute decision method based on probabilistic hesitant fuzzy entropy[J]. Control and Decision, 2019, 34(4): 861-870.)
- [22] Xia M M, Xu Z S. Hesitant fuzzy information aggregation in decision making[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2011, 52(3): 395-407.
- [23] Liao H C, Xu Z S, Xia M M. Multiplicative consistency of hesitant fuzzy preference relation and its application in group decision making[J]. International Journal of Information Technology & Decision Making, 2014, 13(1): 47-76.
- [24] 秦娟, 陈振颂, 李延来. 基于改进犹豫模糊熵的群体 MULTMOORA 决策方法[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(12): 2375-2392.  
(Qin J, Chen Z S, Li Y L. An approach for group MULTMOORA decision making based upon the improved hesitant fuzzy entropy[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2016, 36(12): 2375-2392.)
- [25] Wan S P, Zou W C, Zhong L G, et al. Some new information measures for hesitant fuzzy PROMETHEE method and application to green supplier selection[J]. Soft Computing, 2020, 24(12): 9179-9203.

### 作者简介

王拥兵(1980—), 男, 副教授, 博士, 从事决策理论与应用、不确定性量化理论等研究, E-mail: wangybng@126.com;

苗妙(1995—), 女, 讲师, 硕士, 从事决策理论与应用的研究, E-mail: 18269709110@163.com.

(责任编辑: 李君玲)