

# 控制与决策

Control and Decision

两个具有耦合时滞的分数阶复杂网络的延迟投影同步与参数辨识

杨心, 张广军, 李学仁, 王栋

引用本文:

杨心,张广军,李学仁,王栋. 两个具有耦合时滞的分数阶复杂网络的延迟投影同步与参数辨识[J]. 控制与决策, 2022, 37(6): 1479–1488.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1182>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 \$H\_\infty\$ 控制](#)

Non-fragile  $H_\infty$  control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model

控制与决策. 2021, 36(5): 1087–1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

[基于偏态深度分类的高炉硅含量及波动预测](#)

Prediction of blast furnace silicon content and fluctuation based on skewness depth classification

控制与决策. 2021, 36(2): 491–497 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1116>

[基于移动传感器/执行器网络的时滞分布参数系统镇定控制](#)

Stabilization control for a class of distributed parameter systems with time-delay based on mobile sensor and actuator networks

控制与决策. 2021, 36(8): 1955–1962 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1309>

[并网逆变器分数阶虚拟惯性的虚拟同步发电机控制技术](#)

Virtual synchronous generator control technology with fractional virtual inertia for grid-connected inverters

控制与决策. 2021, 36(2): 463–468 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0391>

[时滞累积TDAGM\( \$\beta, N, t\$ \)模型及其在粮食生产中的应用](#)

Time-delayed accumulative TDAGM( $\beta, N, t$ ) model and its application in food production

控制与决策. 2021, 36(8): 2002–2012 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1630>

# 两个具有耦合时滞的分数阶复杂网络的 延迟投影同步与参数辨识

杨心<sup>1</sup>, 张广军<sup>2†</sup>, 李学仁<sup>1</sup>, 王栋<sup>1</sup>

(1. 空军工程大学航空工程学院, 西安 710038; 2. 空军工程大学基础部, 西安 710051)

**摘要:** 研究两个具有耦合时滞的分数阶复杂网络的延迟投影同步与参数辨识的问题. 首先, 建立具有耦合时滞以及模型参数不确定分数阶复杂网络模型, 并给出驱动网络与响应网络的延迟投影同步误差模型; 其次, 设计有效的控制器以及参数自适应律以实现两个网络之间的延迟投影同步与参数辨识, 给出了实现延迟投影同步与参数辨识的充分条件, 对该充分条件给出了严格的数学证明, 并通过一个数值仿真实例验证了所提出方法的有效性和可行性; 然后, 对 3 种特例进行讨论, 并得到实现同步的充分条件, 这 3 种情况分别为具有耦合时滞的延迟同步、具有耦合时滞的投影同步和没有耦合时滞的延迟投影同步; 最后, 对模型中耦合强度、时滞因素以及投影比例对同步的影响进行了讨论.

**关键词:** 分数阶; 复杂网络; 延迟投影同步; 时滞; 参数辨识

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1182

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 杨心, 张广军, 李学仁, 等. 两个具有耦合时滞的分数阶复杂网络的延迟投影同步与参数辨识[J]. 控制与决策, 2022, 37(6): 1479-1488.

## Lag projective synchronization and parameter identification of two fractional-order complex networks with coupling delay

YANG Xin<sup>1</sup>, ZHANG Guang-jun<sup>2†</sup>, LI Xue-ren<sup>1</sup>, WANG Dong<sup>1</sup>

(1. Aeronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China; 2. Department of Basic Sciences, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

**Abstract:** In this paper, the problem of lag projection synchronization and parameter identification for two fractional-order complex networks with coupling delay is investigated. Firstly, the fractional-order complex network model with coupling delay and uncertain parameters is established, and the lag projection synchronization error model of the driving network and the response network is given. Secondly, the effective controller and the parameter adaptive law are designed to realize lag projection synchronization and parameter identification between the two networks. A sufficient condition for realizing lag projection synchronization and parameter identification is given, and a strict mathematical proof is given for this sufficient condition. The validity and feasibility of the proposed method are verified by a numerical simulation example. Then, three special cases are discussed and sufficient conditions are obtained to realize synchronization, which are lag synchronization with coupling time delay, projection synchronization with coupling time delay and lag projection synchronization without coupling time delay. Finally, the effects of coupling strength, time-delay, and projection ratio are discussed.

**Keywords:** fractional-order; complex network; lag projective synchronization; coupling delay; parameter identification

## 0 引言

在 Watts 等<sup>[1]</sup> 提出小世界网络, Barabási 等<sup>[2]</sup> 提出无标度网络等网络模型后, 复杂网络的相关问题成为研究的热点问题. 复杂网络广泛存在于众多领域, 如计算机网络<sup>[3]</sup>、电话网络<sup>[4]</sup>、电力网络<sup>[5]</sup>、生物网络<sup>[6-7]</sup> 等. 复杂网络是由很多节点相互耦合而成, 每

一个节点通常都会有复杂的动力学行为, 整个网络的动力学行为会由于各个节点的相互耦合而变得更加复杂. 复杂网络的相关动力学特性(如稳定性、传播特性、同步特性等<sup>[8-10]</sup>) 成为研究的热点. 如文献[8] 对有限和有噪声的观测数据条件下网络结构识别的问题进行了研究, 并提出了新的方法; 文献[9] 针对具

收稿日期: 2020-08-24; 录用日期: 2021-03-29.

†通讯作者. E-mail: zhanggj@126.com.

有半马尔可夫跳跃参数和混合时滞的随机中立型神经网络的指数无源滤波问题,通过设计Luenberger型观测器来估计滤波器的状态,并得到了相应的充分条件。

同步现象作为复杂网络的重要动力学特征,引起了学者们的广泛关注,并取得了许多重要结果<sup>[11-13]</sup>。这些文献对复杂网络同步的不同方面进行了研究并取得了开创性的结论,如文献[11]提出一种自适应控制器,并且用牵制控制的方法实现了复杂网络的反同步;文献[12]研究了复杂网络在延迟时间未知条件下的延迟同步,通过正确的控制器设计,复杂网络实现了同步并且能够辨识出相应的延迟时间。

上述文献研究的是复杂网络的同步问题,其中的节点模型都是整数阶模型。相对于整数阶模型,分数阶模型能够更完整更全面地描述自然界和实际中的现象,并且已经应用到很多领域,如金融系统<sup>[14]</sup>,生物医学<sup>[7,15-16]</sup>和传染病的传播<sup>[17]</sup>等。分数阶动力系统比整数阶动力系统的动力学特性更加复杂<sup>[16-18]</sup>,文献[16]研究了单个分数阶神经元系统的动力学特性,并发现不同的分数阶次会导致动力系统产生不同的动力学行为。对于单个动力系统来说分数阶次会改变其动力学特性,那么对于两个耦合的分数阶动力系统之间的动力学特性也会随着阶次的改变而改变,与整数阶模型相比会有所区别。文献[19]研究了两个分数阶动力系统之间的同步特性。由多个分数阶动力系统耦合而成的复杂网络的特性将会比两个分数阶动力系统的特性更复杂,相对于整数阶网络会呈现出更为丰富的动力学行为,所以研究分数阶复杂网络是很有必要的<sup>[20-25]</sup>。由于整数阶的相关定理无法直接用到分数阶中,分数阶复杂网络的相关研究相对于整数阶来说较少,文献[26-27]提出了分数阶稳定性定理为分数阶复杂网络同步的研究提供了理论依据。相关学者主要从同步类型(如投影同步、延迟同步等)<sup>[21-24]</sup>、同步控制方法(如牵制控制、自适应控制等)<sup>[22-24]</sup>、内部耦合矩阵和外部耦合矩阵的变化<sup>[23-25]</sup>等方面来研究分数阶复杂网络同步。对于不同的同步类型来说,文献[21]研究了两个不同拓扑结构的分数阶网络的投影同步,设计了自适应控制器实现了投影同步;文献[24]则研究了分数阶复杂网络的延迟同步。此外,自然界和工程实际中,存在各种各样的复杂现象,为了认识这些现象的机理并且模拟出这些现象,需要研究更为复杂的网络动力学模型、更为复杂的同步类型以及更难以实现同步的分数阶网络模型。通过以上分析可以得到,对于分数阶复杂网络

的同步类型还可以进行拓展,将投影同步与延迟同步相结合提出分数阶网络的延迟投影同步,并且设计出控制器实现网络的同步控制。虽然关于延迟投影同步的研究已有文献报道,但是关于分数阶网络的延迟投影同步目前还没有相关文献对这一问题进行研究。

复杂网络节点与节点之间耦合时存在时滞,时滞不仅会影响单个动力系统和两个动力系统之间的运动特性,还会使多个系统耦合而成的复杂网络的动力学行为更为丰富。具有耦合时滞的分数阶网络模型的同步问题相应的控制器设计会比不存在耦合时滞更加复杂,相关同步条件的证明也会更加复杂。不论是具有时滞的整数阶复杂网络还是具有时滞的分数阶复杂网络,都有学者进行研究,如文献[28]对具有随机耦合时滞的整数阶复杂网络同步进行了研究;文献[29]对具有耦合时滞分数阶复杂网络的聚类投影同步进行了研究。这些研究的结果表明,考虑网络时滞后的网络特性呈现出了更为丰富的网络动力学行为。另外,网络中存在的不确定性,如节点参数的不确定性<sup>[29]</sup>、耦合矩阵的不确定性<sup>[30]</sup>以及延迟同步中延迟时间的不确定性<sup>[12]</sup>等都会增加网络同步控制的难度。为此,本文将在网络节点模型中参数不确定的情况下研究实现两个分数阶网络的延迟投影同步的控制问题,并实现不确定参数的辨识。

通过上面的分析可以发现,还设有关于两个有耦合时滞的分数阶复杂网络参数辨识和延迟投影同步的相关文献报道。而这个问题可能出现更为丰富的同步特性,实现同步的控制器及条件较为复杂,对该问题的研究既具有理论意义,又具有潜在应用价值。如在生物系统的结构与稳定性研究;在通信领域中通过同步控制技术实现相干调节从而实现保密通信;在实际网络中也可通过网络的同步技术解决各个节点之间的通信问题以免发生网络拥塞。由于分数阶系统相对于整数阶系统有着更加完整描述自然界现象的优势,且分数阶次的较小改变可能会使系统的整个运动状态发生较大的变化,所以,研究分数阶复杂网络的同步问题显得更加必要。而且,对于同步技术在保密通信的应用,同步形式越复杂,越有利于安全性<sup>[19]</sup>,所以需要分数阶复杂网络同步形式进行拓展。

为了实现更为复杂的同步类型,且考虑到分数阶、时滞以及节点参数不确定的影响,本文初步研究了具有耦合时滞的不确定分数阶复杂网络的延迟投影同步现象与参数辨识,具体工作如下:1)建立了具有耦合时滞参数不确定分数阶复杂网络模型;2)设

计了相应的控制器和参数自适应律以实现两个网络的延迟投影同步与参数辨识,给出了实现相应网络达到延迟投影同步和参数辨识的充分条件,并运用分数阶稳定性定理证明了所提出条件的正确性;3)通过具体的数值仿真实例验证了该方法的有效性;4)对具有耦合时滞的延迟同步、具有耦合时滞的投影同步和没有耦合时滞的延迟投影同步的3种特例进行了讨论.

## 1 模型建立

### 1.1 符号说明

本文用到的相关符号如表1所示.

表1 符号说明

| 符号                   | 相关说明           |
|----------------------|----------------|
| $D^q$                | 分数阶微分算子        |
| $\Theta$             | 节点参数向量         |
| $x(t)_i$             | 驱动网络节点状态向量     |
| $y(t)_i$             | 响应网络节点状态向量     |
| $\alpha$             | 投影比例           |
| $e(t)_i$             | 误差向量           |
| $u(t)_i$             | 控制器            |
| $A, B$               | 网络配置耦合矩阵       |
| $\Gamma_1, \Gamma_2$ | 节点内部耦合矩阵(对称矩阵) |

### 1.2 分数阶微积分概述

分数阶的积分和微分含有多种定义,在实际应用中最常用的有Grunwald-Letnikov定义、Riemann-Liouville定义和Caputo定义.根据相关文献[31],在某些条件下上述3种分数阶微积分运算的定义是等价的,可以互相转化.Riemann-Liouville定义和Caputo定义是Grunwald-Letnikov定义的扩充与改进.Caputo定义使得分数阶系统的Laplace变换更加简洁,在工程应用中求解相对于其他两种更加容易,所以本文与其他大多数文献一样采用Caputo定义.

Caputo定义如下:

一元函数 $f(x)$ 的 $q$ 阶微分的Caputo定义为

$${}_0^c D_t^q = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau.$$

其中: $n-1 < q < n$ ,  $f(\tau)$ 为在 $[0, t]$ 上有 $n+1$ 阶导数的连续有界函数,  $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数,定义为

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

特别地,当 $0 < q < 1$ 时,有

$${}_0^c D_t^q = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau.$$

### 1.3 模型描述

考虑以下的动力学系统作为每个节点的运动状态方程:

$$D^q z(t) = F(z(t), \Theta) = f(z(t)) + g(z(t))\Theta. \quad (1)$$

其中: $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是连续向量值函数, $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$ 是连续矩阵函数, $\Theta \in \mathbf{R}^n$ 为节点参数, $z(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量.

具有耦合时滞的分数阶驱动复杂网络可以描述为如下形式:

$$\begin{aligned} D^q x_i(t) = & \\ & F(x_i(t), \Theta) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 x_j(t) + \\ & c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 x_j(t - \tau), \quad t \in [0, +\infty); \\ x_i(t) = & \varphi_i(t), \quad t \in [-\tau - \tau', 0). \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $0 < q < 1$ 是分数阶导数的阶次; $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T \in \mathbf{R}^{N \times n}$ ,  $x_i(t)$ 是第 $i$ 个节点在时间 $t$ 时刻的状态向量; $\tau$ 是网络内部的延迟时间, $\tau'$ 是网络之间信息交换时的延迟时间; $c_1, c_2$ 是节点之间的耦合强度,是正整数常数; $\Gamma_1: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是网络的内部耦合矩阵; $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是连续的向量值函数; $A = (a_{ij})_{(N \times N)}$ 、 $B = (b_{ij})_{(N \times N)}$ 是配置耦合矩阵,如果节点 $i$ 和节点 $j$ 之间连接( $i \neq j$ ),则 $a_{ij} > 0, b_{ij} > 0$ ,否则 $a_{ij} = 0, b_{ij} = 0$ ,矩阵的对角元素( $i = j$ )定义为

$$a_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}, \quad b_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ij}.$$

这里的配置耦合矩阵并不要求为对称阵,且对于一般有向网络也成立.

响应网络定义为

$$\begin{aligned} D^q y_i(t) = & \\ & F(y_i(t), \hat{\Theta}) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 y_j(t) + \\ & c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 y_j(t - \tau) + u_i(t), \quad t \in [0, +\infty); \\ y_i(t) = & \varphi'_i(t), \quad t \in [-\tau, 0); \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $u_i(t)$ 是相应的控制器.

将驱动网络与响应网络的延迟投影同步误差向量定义为 $e_i(t) = y_i(t) - \alpha x_i(t - \tau')$ .由式(2)和(3)可以得到

$$\begin{aligned} D^q e_i(t) = & \\ & F(y_i(t), \hat{\Theta}) - \alpha F(x_i(t - \tau'), \Theta) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) + \\ & c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 e_j(t - \tau) + u_i(t), \quad t \in [0, +\infty); \end{aligned}$$

$$e_i(t) = \varphi'_i(t) - \varphi_i(t - \tau'), t \in [-\tau, 0), i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

进一步,误差向量可以表示为如下形式:

$$D^q e_i(t) = F(y_i(t), \Theta) - \alpha F(x_i(t - \tau'), \Theta) + g(y_i(t))(\hat{\Theta}(t) - \Theta) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 e_j(t - \tau) + u_i(t), t \in [0, +\infty); e_i(t) = \varphi'_i(t) - \varphi_i(t - \tau'), t \in [-\tau, 0), i = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

具体的网络模型将在第4节数值仿真中给出.

**定义1** 对于驱动网络(2)与响应网络(3)之间的同步误差  $e_i(t) = y_i(t) - \alpha x_i(t - \tau')$  与参数误差  $\Theta - \hat{\Theta}$  满足如下条件:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e_i(t)\|_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Theta - \hat{\Theta}\|_1 = 0, i = 1, 2, \dots, N,$$

则称两个网络达到延迟投影同步且实现参数辨识.

## 2 控制器与参数更新律设计及同步证明

本文将得到相应的控制器和参数更新率,以及实现具有耦合时滞复杂网络延迟投影同步及参数辨识的充分条件. 本文将用到以下引理.

**引理1**<sup>[32]</sup> 如果  $h(t) \in C^1([-\tau, 0])$ , 则对于任意  $0 < q < 1$ , 有

$$D^q |h(t)| \leq \text{sng}(h(t)) D^q h(t).$$

**引理2**<sup>[30]</sup> 如果  $V(t) \in R^1$  是连续可微非负函数, 满足如下条件 ( $a > b > 0$ ):

$$\begin{cases} D^q V(t) \leq -aV(t) + bV(t - \tau), t \in [0, +\infty); \\ V(t) \geq \varphi(t) \geq 0, t \in [-\tau, 0); \end{cases}$$

则对于任意  $\varphi(t) \geq 0, \tau > 0$ , 有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$ .

**假设1** 假设存在一个常数  $L (L > 0)$  满足如下条件:

$$|F(t, x(t)) - F(t, s(t))| \leq L|x(t) - s(t)|.$$

为使系统达到延迟投影同步, 可将控制率设计为

$$u_i(t) = -k e_i(t) - F(y_i(t), \Theta) + \alpha F(x_i(t - \tau'), \Theta). \quad (6)$$

将  $\hat{\Theta}$  的更新率设计为

$$D^q \hat{\Theta} = -(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \sum_{i=1}^N \|g(y_i(t))\|_1 - m(\hat{\Theta}(t) - \Theta). \quad (7)$$

**定理1** 根据假设1、控制率(6)、参数更新率(7), 假设存在  $k > 0$  或者  $m > 0$  使得  $\lambda > \mu$ , 则系统(1)和系统(2)可以达到延迟投影同步. 其中  $\lambda = \min \left( \min_i \left( k - c_1 r_1 \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right), m \right), \mu = c_2 r_2 \sum_{j=1}^N |b_{ij}|$ .

**证明** 构造Lyapunov函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^N \|e_i(t)\|_1 + \|\hat{\Theta}(t) - \Theta\|_1.$$

通过引理1可以得到

$$\begin{aligned} D^q V(t) &= D^q \left( \sum_{i=1}^N \|e_i(t)\|_1 + \|\hat{\Theta}(t) - \Theta\|_1 \right) \leq \sum_{i=1}^N (\text{sign}(e_i(t)))^T D^q e_i(t) + \text{sign}(\hat{\Theta}(t) - \Theta)^T D^q \hat{\Theta}(t) = \sum_{i=1}^N (\text{sign}(e_i(t)))^T \left[ F(y_i(t), \hat{\Theta}) - \alpha F(x_i(t - \tau'), \Theta) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 e_j(t - \tau) + u_i(t) \right] + \text{sign}(\hat{\Theta}(t) - \Theta)^T \left[ -(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \sum_{i=1}^N \|g(y_i(t))\|_1 - m(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \right] = \sum_{i=1}^N (\text{sign}(e_i(t)))^T \left[ g(y_i(t))(\hat{\Theta}(t) - \Theta) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 e_j(t) - k e_i(t) + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 e_j(t - \tau) \right] + \text{sign}(\hat{\Theta}(t) - \Theta)^T \left[ -(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \sum_{i=1}^N \|g(y_i(t))\|_1 - m(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \right] \leq \|\hat{\Theta}(t) - \Theta\|_1 \sum_{i=1}^N \|g(y_i(t))\|_1 + c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (\text{sign}(e_i(t)))^T \Gamma_1 e_j(t) + c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} (\text{sign}(e_i(t)))^T \Gamma_2 e_j(t - \tau) + \text{sign}(\hat{\Theta}(t) - \Theta)^T \left[ -(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \sum_{i=1}^N \|g(y_i(t))\|_1 - m(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \right] - \sum_{i=1}^N (\text{sign}(e_i(t)))^T k e_i(t) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m\|\hat{\Theta}(t) - \Theta\|_1 + c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |b_{ij}|r_2\|e_i(t - \tau)\|_1 + \\
& c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}|r_1\|e_i(t)\|_1 - \sum_{i=1}^N k\|e_i(t)\|_1 = \\
& \sum_{i=1}^N \left( c_1r_1 \sum_{j=1}^N |a_{ij}| - k \right) \|e_i(t)\|_1 - m\|\hat{\Theta}(t) - \Theta\|_1 + \\
& \sum_{i=1}^N \left( c_2r_2 \sum_{j=1}^N |b_{ij}| \right) \|e_i(t - \tau)\|_1.
\end{aligned}$$

令

$$\lambda = \min_i \min_i \left( k - c_1r_1 \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right), \mu = c_2r_2 \sum_{j=1}^N |b_{ij}|,$$

有

$$D^q V(t) \leq -aV(t) + bV(t - \tau).$$

因为  $t \in [-\tau, 0]$ , 所以有

$$\begin{aligned}
V(t) &= \\
& \sum_{i=1}^N (\varphi'(t) - \varphi(t - \tau'))^T (\varphi'(t) - \varphi(t - \tau')) \geq 0.
\end{aligned}$$

根据引理2, 当  $\lambda > \mu > 0$  时, 有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$ , 所以驱动网络与响应网络能达到同步.  $\square$

定理1给出了在假设1条件下,  $\lambda > u$  是两个具有耦合时滞的复杂网络达到延迟投影同步的充分条件, 在这个条件中需要复杂网络的配置耦合矩阵的相关信息以及耦合强度, 但不再需要一些文献中所要求的网络耦合矩阵为对称阵的条件. 本文为了与文献[33]进行对比, 采取响应网络参数未知为驱动网络参数已知情况进行研究.

**推论1** 若投影比例  $\alpha = 1$ , 则延迟投影变为延迟同步, 误差系统可以表示为

$$\begin{aligned}
D^q e_i(t) &= \\
& \mathbf{F}(\mathbf{y}_i(t), \Theta) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t - \tau'), \Theta) + \\
& \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t), \Theta)(\hat{\Theta}(t) - \Theta) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 \mathbf{e}_j(t) + \\
& c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 \mathbf{e}_j(t - \tau) + \mathbf{u}_i(t), \quad t \in [0, +\infty); \\
e_i(t) &= \\
& \varphi'_i(t) - \varphi_i(t - \tau'), \quad t \in [-\tau, 0), \quad i = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

令控制器(6)中  $\alpha = 1$  得到的控制器也可以使两个网络达到延迟同步, 但需将控制器简化为

$$\mathbf{u}_i(t) = -k\mathbf{e}_i(t).$$

未知参数的自适应律为

$$\begin{aligned}
D^q \hat{\Theta} &= -(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \sum_{i=1}^N \|\mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t))\|_1 - \\
& m(\hat{\Theta}(t) - \Theta).
\end{aligned}$$

假设存在  $k > 0$  或者  $m > 0$ , 使得  $\lambda > \mu$ . 其中  $\lambda = \min_i \min_i \left( \left( k - L - c_1r_1 \sum_{j=1}^N |a_{ij}| \right), m \right), \mu = c_2r_2 \sum_{j=1}^N |b_{ij}|.$

**证明** 构造Lyapunov函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^N \|e_i(t)\|_1 + \|\hat{\Theta}(t) - \Theta\|_1.$$

通过引理1可以得到

$$\begin{aligned}
D^q V(t) &= \\
& D^q \left( \sum_{i=1}^N \|e_i(t)\|_1 + \|\hat{\Theta}(t) - \Theta\|_1 \right) \leq \\
& \sum_{i=1}^N (\text{sign}(e_i(t)))^T D^q e_i(t) + \\
& \text{sign}(\hat{\Theta}(t) - \Theta)^T D^q \hat{\Theta}(t) = \\
& \sum_{i=1}^N (\text{sign}(e_i(t)))^T \left[ \mathbf{F}(\mathbf{y}_i(t), \hat{\Theta}) - \right. \\
& \left. \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t - \tau'), \Theta) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma_1 \mathbf{e}_j(t) + \right. \\
& \left. c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij} \Gamma_2 \mathbf{e}_j(t - \tau) + \mathbf{u}_i(t) \right] + \\
& \text{sign}(\hat{\Theta}(t) - \Theta)^T \left[ -(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \sum_{i=1}^N \|\mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t))\|_1 - \right. \\
& \left. m(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \right] \leq \\
& \sum_{i=1}^N (\text{sign}(e_i(t)))^T [\alpha \mathbf{F}(\mathbf{y}_i(t), \Theta) - \\
& \alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t - \tau'), \Theta)] + \\
& \|\hat{\Theta}(t) - \Theta\|_1 \sum_{i=1}^N \|\mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t))\|_1 + \\
& c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (\text{sign}(e_i(t)))^T \Gamma_1 \mathbf{e}_j(t) + \\
& c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} (\text{sign}(e_i(t)))^T \Gamma_1 \mathbf{e}_j(t - \tau) + \\
& \text{sign}(\hat{\Theta}(t) - \Theta)^T \left[ -(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \sum_{i=1}^N \|\mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t))\|_1 - \right.
\end{aligned}$$

$$m(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \Big] - \sum_{i=1}^N (\text{sign}(e_i(t)))^T k e_i(t). \quad (8)$$

根据假设1,可以得到

$$\begin{aligned} D^q V(t) \leq & \alpha \sum_{i=1}^N L \|e_i(t - \tau)\|_1 - m \|\hat{\Theta}(t) - \Theta\|_1 + \\ & c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |b_{ij}| r_2 \|e_i(t - \tau)\|_1 + \\ & c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{ij}| r_1 \|e_i(t)\|_1 - \sum_{i=1}^N k \|e_i(t)\|_1. \end{aligned}$$

接下来的证明同定理1,此略. □

**推论2** 若分数阶驱动网络与响应网络耦合时滞  $\tau' = 0$ , 则当满足以下条件时, 可达到延迟投影同步并且实现参数辨识.

控制器为

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -k e_i(t) - F(y_i(t), \Theta) + \\ & \alpha F(x_i(t - \tau'), \Theta), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

未知参数的自适应律为

$$\begin{aligned} D^q \hat{\Theta} = & -(\hat{\Theta}(t) - \Theta) \sum_{i=1}^N \|g(y_i(t))\|_1 - \\ & m(\hat{\Theta}(t) - \Theta). \end{aligned}$$

假设存在  $k > 0$  或者  $m > 0$ , 使得  $\lambda > 0$ , 其中  $\lambda = \min_i \left( (k - L - c_1 r_1 \sum_{j=1}^N |a_{ij}|), m \right) > 0$ .

证明同定理1,此略.

**推论3** 若延迟时间为0, 则延迟投影同步转变为投影同步; 若满足定理1的条件, 则可以达到投影同步并且实现参数辨识.

控制器为

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -k e_i(t) - F(y_i(t), \Theta) + \\ & \alpha F(x_i(t - \tau'), \Theta), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

参数更新率设计为

$$\begin{aligned} D^q \hat{\Theta} = & -(\hat{\Theta}(t) - \hat{\Theta}) \sum_{i=1}^N \|g(y_i(t))\|_1 - \\ & m(\hat{\Theta}(t) - \Theta). \end{aligned}$$

证明同定理1,此略.

### 3 保密通信的应用分析

通过对具有耦合时滞和参数不确定的分数阶复杂网的控制, 实现延迟投影同步, 将其应用到保密通信中主要有以下优势:

1) 相对于以往研究的两个系统之间的保密通信策略, 由多个节点组成复杂网络能够实现多节点之间的通信;

2) 驱动网络与响应网络之间同步的延迟, 以及网络中的时滞现象更加贴近实际, 使其更具有实用性;

3) 参数的不确定以及投影同步中投影比例选择的灵活性, 可以进一步增加破译的难度;

4) 通过分数阶系统还可以进一步增强系统运动的不可预测性, 使得通信更具有保密性.

### 4 数值仿真

本节将用一个实例来说明所得到结论的正确性, 用到的数值计算方法是文献[34]所提出的预估-校正法, 在文献[34]中将预估-校正进行了改进, 使之可以用到含有时滞的系统中. 考虑一个具有12个节点的网络, 网络中每个节点的运动方程为分数阶的Lorenz系统, 即

$$\begin{aligned} D^q x_i(t) = F(x_i(t), \Theta) = & \begin{bmatrix} a(x_{i1} - x_{i2}) \\ cx_{i1} - x_{i2} - x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} - bx_{i3} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ -x_{i2} - x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{i1} - x_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{i1} \\ 0 & x_{i3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

其中:  $q = 0.99$ ,  $\Theta = (a, b, c)^T = (10, 8/3, 28)^T$ . 此时Lorenz系统处于混沌状态, 取耦合强度  $c_1 = 1, c_2 = 1$ ,

$$\tau = \tau' = 0.3, \text{ 内部耦合矩阵 } \Gamma_1 = \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

( $\Gamma_1, \Gamma_2$  也可以取其他三阶矩阵), 取  $\alpha = 0.5$ , 参考文献[27]可以取  $L = 45$ . 不失一般性, 取配置耦合矩阵为(若配置耦合矩阵改变, 则网络结构亦改变)

$$A = B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$



态成投影比例关系;图4表示的是网络中每个节点的3个状态的误差,可以看到,经历一定的时间后误差变为0,所以网络达到了延迟投影同步;图5表示的是网络中参数的辨识,在响应的控制器及参数自适应律下,网络节点的参数可以被有效辨识.

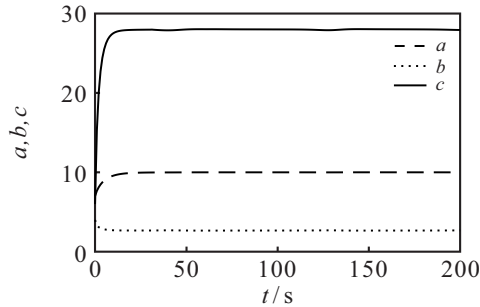


图5 未知参数  $a, b, c$  的识别

### 5 参数对复杂网络延迟投影同步的影响

为研究模型各个参数对复杂网络延迟投影同步的影响,定义系统总误差

$$E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{12} e_1^2\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{12} e_2^2\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{12} e_3^2\right)^2}. \quad (9)$$

图6是系统总误差在不同的耦合时滞系数下,随时间的变化图,图7是在不同的耦合时滞系数下系统误差达到0时所需要的时间  $t_s$ . 由图6和图7可以发现,随着耦合时滞系数的增加,复杂网络达到同步所需要的时间将增加.

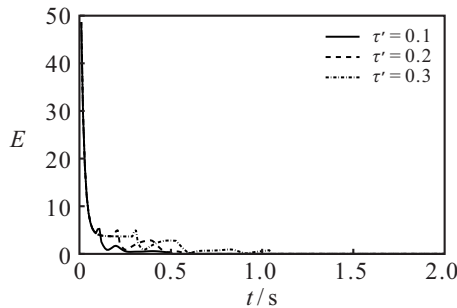


图6 不同时滞系数下总误差随时间变化曲线

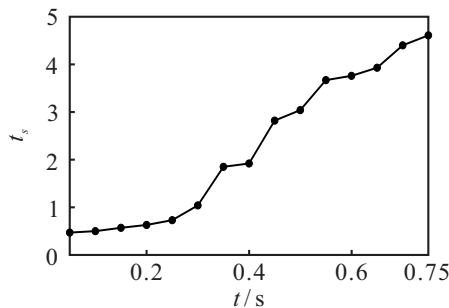
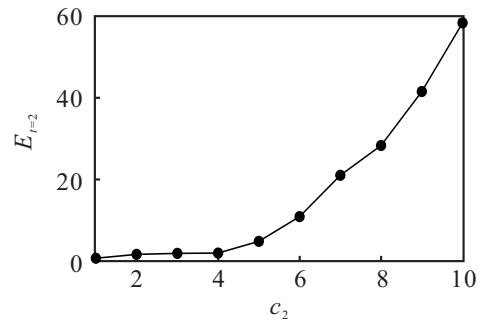


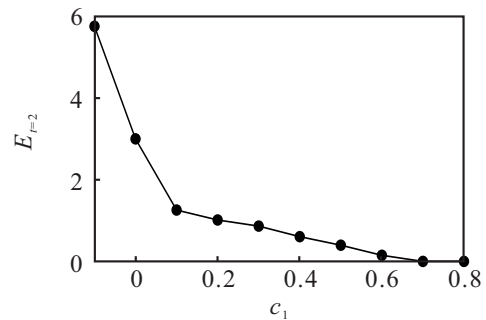
图7 临界时间  $t_s$  随时滞系数变化曲线

在原有的参数选定下,为了研究耦合强度  $c_1$  和  $c_2$  分别对复杂网络同步的影响,本文做出在  $t = 2$  时,系统总误差随耦合强度的变化图. 图8(a)是在  $c_1 = 1$  时

系统总误差随  $c_2$  增大的变化曲线,可以看出,在  $c_2$  较小时,系统总误差为0,但增大  $c_2$  后,系统总误差变大,所以  $c_2$  的增大会导致复杂网络同步程度的减弱;图8(b)是在  $c_2 = 1$  时系统总误差随  $c_1$  增大的变化曲线,与  $c_2$  变化时的情况相反,  $c_1$  的增大会加强复杂网络的同步程度.



(a)  $E_{t=2}$  随  $c_2$  增大变化曲线



(b)  $E_{t=2}$  随  $c_1$  增大变化曲线

图8 临界时间  $t_s$  随时滞系数变化曲线

图9是在不同的投影比例下系统达到延迟投影同步所需要的时间. 可以看出,投影比例  $\alpha$  对复杂网络的延迟投影同步影响较小.

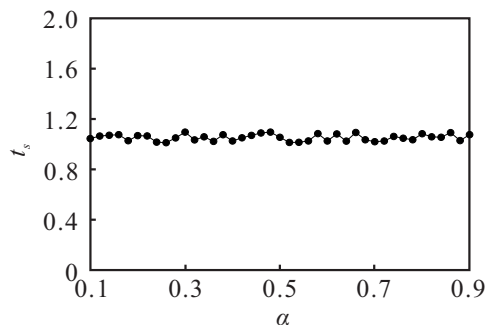


图9 临界时间  $t_s$  随投影比例变化曲线

### 6 结论

通过研究,本文建立了具有耦合时滞以及模型参数不确定的分数阶网络模型,并给出了驱动网络与响应网络之间的延迟投影同步误差系统. 设计了合适的控制器和参数自适应律,建立了 Lyapunov 函数,应用时滞分数阶系统稳定性定理和分数阶数学的相关知识,对所提出的延迟投影同步充分条件进行了数学

证明. 并以一个具体实例对上述实现延迟投影同步的控制器和参数自适应律进行了仿真, 从仿真结果可以看出, 本文提出的实现具有耦合时滞参数不确定的分数阶复杂网络的延迟投影同步的控制方法、参数自适应律是有效的、可行的, 通过选取合适的参数  $k$ 、 $m$  可使同步误差较快地收敛到零, 并且能辨识出响应网络节点模型中的未知参数. 另外, 本文对具有耦合时滞延迟投影同步的3种特殊情况(具有耦合时滞的延迟同步、具有耦合时滞的投影同步和没有耦合时滞的延迟投影同步)进行了讨论并得到其充分条件. 最后, 研究了时滞系数、耦合强度和投影比例对系统同步的影响, 发现时滞系数会延长系统达到延迟投影同步的时间, 增大耦合强度  $c_1$  会使系统同步增强, 而  $c_2$  的影响相反, 投影比例的大小对系统同步的影响较小. 本文并未对控制方法进行优化改进, 在实际应用中控制方式的选取会对控制成本产生较大的影响, 所以在接下来的研究中会对控制方法进行改进, 如脉冲控制、量化控制等; 对于复杂同步模式以及分数阶模型在保密通信、图像处理等方面的实际应用也值得下一步研究.

#### 参考文献(References)

- [1] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. *Nature*, 1998, 393(6684): 440-442.
- [2] Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509-512.
- [3] 袁坚, 任勇, 刘锋, 等. 复杂计算机网络中的相变和整体关联行为[J]. *物理学报*, 2001, 50(7): 1221-1225.  
(Yuan J, Ren Y, Liu F, et al. Phase transition and collective correlation behavior in the complex computer network[J]. *Acta Physica Sinica*, 2001, 50(7): 1221-1225.)
- [4] Xia Y X, Tse C K, Lau F C M, et al. Analysis of telephone network traffic based on a complex user network[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2006, 368(2): 583-594.
- [5] Arianos S, Bompard E, Carbone A, et al. Power grid vulnerability: A complex network approach[J]. *Chaos: Woodbury, N Y*, 2009, 19(1): 013119.
- [6] Lohr D, Venkov P, Zlatanova J. Transcriptional regulation in the yeast GAL gene family: A complex genetic network[J]. *The FASEB Journal*, 1995, 9(9): 777-787.
- [7] Fu Y, Kang Y, Chen G. Stochastic resonance based visual perception using spiking neural networks[J]. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 2020, 14: 24.
- [8] Huang K K, Wang Z, Jusup M. Incorporating latent constraints to enhance inference of network structure[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2020, 7(1): 466-475.
- [9] Shi P, Li F B, Wu L G, et al. Neural network-based passive filtering for delayed neutral-type semi-Markovian jump systems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, 28(9): 2101-2114.
- [10] Huang K K, Li S, Dai P L, et al. SDARE: A stacked denoising autoencoder method for game dynamics network structure reconstruction[J]. *Neural Networks*, 2020, 126: 143-152.
- [11] Wu Y Q, Li C P, Yang A L, et al. Pinning adaptive anti-synchronization between two general complex dynamical networks with non-delayed and delayed coupling[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(14): 7445-7452.
- [12] Yang H L, Shu L, Zhong S M. Pinning lag synchronization of complex dynamical networks with known state time-delay and unknown channel time-delay[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89(3): 1793-1802.
- [13] 王燕锋, 李祖欣, 全立地, 等. 具有不确定转移概率的马尔科夫复杂网络的聚类同步[J]. *控制与决策*, 2018, 33(4): 741-748.  
(Wang Y F, Li Z X, Quan L D, et al. Cluster synchronization of Markovian complex networks with uncertain transition probabilities[J]. *Control and Decision*, 2018, 33(4): 741-748.)
- [14] Wang Z, Huang X, Shi G D. Analysis of nonlinear dynamics and chaos in a fractional order financial system with time delay[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2011, 62(3): 1531-1539.
- [15] Anastasio T J. The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons[J]. *Biological Cybernetics*, 1994, 72(1): 69-79.
- [16] Dong J, Zhang G J, Xie Y, et al. Dynamic behavior analysis of fractional-order Hindmarsh-Rose neuronal model[J]. *Cognitive Neurodynamics*, 2014, 8(2): 167-175.
- [17] Rajagopal K, Hasanzadeh N, Parastesh F, et al. A fractional-order model for the novel coronavirus (COVID-19) outbreak[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 101(1): 711-718.
- [18] Kang Y M, Xie Y, Lu J C, et al. On the nonexistence of non-constant exact periodic solutions in a class of the Caputo fractional-order dynamical systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 82(3): 1259-1267.
- [19] 李睿, 张广军, 姚宏, 等. 参数不确定的分数阶混沌系统广义错位延时投影同步[J]. *物理学报*, 2014, 63(23): 91-97.  
(Li R, Zhang G J, Yao H, et al. Generalized dislocated lag projective synchronization of fractional chaotic systems

- with fully uncertain parameters[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(23): 91-97.)
- [20] 毛海杰, 李炜, 蒋栋年. 基于复杂网络的多电机同步控制系统故障诊断与切换容错研究[J]. *控制与决策*, 2020, 35(4): 843-851.  
(Mao H J, Li W, Jiang D N. Fault diagnosis and switching tolerance for multi-motor synchronous control based on complex dynamical network[J]. *Control and Decision*, 2020, 35(4): 843-851.)
- [21] Ma T D, Zhang J, Zhou Y C, et al. Adaptive hybrid projective synchronization of two coupled fractional-order complex networks with different sizes[J]. *Neurocomputing*, 2015, 164: 182-189.
- [22] Zhou J Y, Yan J Y, Wu Z Y. Synchronization of fractional-order dynamical network via aperiodically intermittent pinning control[J]. *Advances in Difference Equations*, 2019, 2019(1): 1-11.
- [23] Ding X S, Cao J D, Alsaadi F E. Pinning synchronization of fractional-order complex networks with adaptive coupling weights[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2019, 33(10): 1478-1490.
- [24] Huang X, Fan Y J, Jia J, et al. Quasi-synchronisation of fractional-order memristor-based neural networks with parameter mismatches[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2017, 11(14): 2317-2327.
- [25] Jia Y, Wu H Q. Global synchronization in finite time for fractional-order coupling complex dynamical networks with discontinuous dynamic nodes[J]. *Neurocomputing*, 2019, 358: 20-32.
- [26] Li Y, Chen Y Q, Podlubny I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, 59(5): 1810-1821.
- [27] Duarte-Mermoud M A, Aguila-Camacho N, Gallegos J A, et al. Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, 22(1/2/3): 650-659.
- [28] Wu Y B, Li Y C, Li W X. Synchronization of random coupling delayed complex networks with random and adaptive coupling strength[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 96(4): 2393-2412.
- [29] Wang F, Yang Y Q, Hu M F, et al. Projective cluster synchronization of fractional-order coupled-delay complex network via adaptive pinning control[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2015, 434: 134-143.
- [30] Liang S, Wu R C, Chen L P. Adaptive pinning synchronization in fractional-order uncertain complex dynamical networks with delay[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2016, 444: 49-62.
- [31] 徐全. 分数阶复杂动力学网络同步的自适应控制若干问题研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2016: 17-20.  
(Xu Q. Some problems of study on adaptive control of synchronization in fractional-order complex dynamical networks[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2016: 17-20.)
- [32] Zhang S, Yu Y G, Wang H. Mittag-Leffler stability of fractional-order Hopfield neural networks[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2015, 16: 104-121.
- [33] Li H L, Ji D C, Jiang H J, et al. Finite-time synchronization and parameter identification of uncertain fractional-order complex networks[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 533: 122027.
- [34] Diethelm K, Ford N J, Freed A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 29(1/2/3/4): 3-22.
- [35] Bhalekar S, Daftardar-Gejji V, Baleanu D, et al. Fractional Bloch equation with delay[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2011, 61(5): 1355-1365.

### 作者简介

杨心(1996—), 男, 硕士生, 从事复杂网络理论及其应用的研究, E-mail: y\_angx\_in@163.com;

张广军(1967—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性动力系统理论及应用等研究, E-mail: zhanggj@126.com;

李学仁(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事装备模拟训练与训练评估等研究, E-mail: lxr387625@sohu.com;

王栋(1978—), 男, 副教授, 硕士, 从事装备模拟训练与训练评估等研究, E-mail: wangdong0120@126.com.

(责任编辑: 孙艺红)