

控制与决策

Control and Decision

离散输入受限系统的增益调度事件触发和自触发控制

张凯, 周彬

引用本文:

张凯,周彬. 离散输入受限系统的增益调度事件触发和自触发控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(6): 1489–1496.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1807>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于周期动态事件触发的网络化切换系统的分析与控制

The analysis and control for networked switched systems based on periodic event-trigger

控制与决策. 2021, 36(10): 2467–2474 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0281>

事件触发机制下分布时滞网络化控制系统 H_∞ 故障检测

Event-triggered H_∞ fault detection for networked control systems with distributed delays

控制与决策. 2020, 35(12): 3059–3065 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0456>

自适应事件触发的马尔科夫跳变多智能体系统一致性

Adaptive event-triggered consensus for Markovian jumping multi-agent systems

控制与决策. 2020, 35(11): 2780–2786 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1507>

带输入饱和的不确定非线性系统自适应模糊触发式补偿控制

Adaptive fuzzy trigger compensation control for uncertain nonlinear system with input saturation

控制与决策. 2021, 36(12): 3007–3014 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0907>

航天器输入受限的鲁棒自适应姿态跟踪控制

Robust adaptive attitude tracking control of spacecraft with constrained inputs

控制与决策. 2021, 36(9): 2297–2304 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0013>

离散输入受限系统的增益调度事件触发和自触发控制

张 凯, 周 彬[†]

(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘 要: 针对离散输入受限系统, 分别设计静态和动态的增益调度事件触发和自触发控制算法. 首先设计一种基于离散参量 Lyapunov 方程的静态增益调度事件触发控制算法, 该算法通过事件触发机制更新控制增益, 使得在增大闭环系统收敛速率的同时节约通讯资源. 为了避免对采样状态和测量误差的连续监测, 设计了相应的静态增益调度自触发控制算法; 同时, 为进一步增大触发间隔, 分别设计相关的动态增益调度事件触发和自触发控制算法. 不仅建立设计参数与最小触发间隔之间的关系, 还给出可以避免 trivality 现象发生的条件; 最后, 将所提出算法应用于航天器交会系统控制器的设计, 并直接在原始非线性模型上进行仿真, 仿真结果验证了所设计算法的有效性.

关键词: 离散输入受限系统; 事件触发控制; 自触发控制; 增益调度控制; 动态事件触发机制; 离散参量 Lyapunov 方程; 航天器交会

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1807

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 张凯, 周彬. 离散输入受限系统的增益调度事件触发和自触发控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(6): 1489-1496.

Gain scheduled event-triggered and self-triggered control of discrete-time input constrained systems

ZHANG Kai, ZHOU Bin[†]

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: This article proposes static/dynamic gain scheduled event-triggered and self-triggered control algorithms for discrete-time input constrained systems. Firstly, a static event-triggered gain scheduled control (GSETC) algorithm based on the discrete-time parametric Lyapunov equation, where the parameter in the control gain is updated using a static event-triggered mechanism, is proposed such that the convergence rate of the closed-loop systems is increased and the communication resources are saved simultaneously. In order to avoid monitoring all sampling states and the measurement errors, the static self-triggered gain scheduled control (GSSTC) algorithm is also designed. Moreover, in order to further increase the inter-event times, the corresponding dynamic GSETC and GSSTC are designed. An explicit relationship between the design parameter and the minimal inter-event time and a condition for avoiding the trivality phenomenon are given. Finally, the designed algorithms are used to stabilize the spacecraft rendezvous system, and numerical simulations on the original nonlinear model show the effectiveness of the proposed algorithms.

Keywords: discrete-time input constrained systems; event-triggered control; self-triggered control; gain scheduled control; dynamic event-triggered mechanism; discrete parametric Lyapunov equation; spacecraft rendezvous

0 引言

随着控制理论、通讯和计算机技术的发展和融合, 网络控制系统(NCSs)已广泛应用于工业领域^[1]. 由于传统的采样控制需要占用大量通讯资源不断地传输信号和更新控制任务, 已经不适合在如NCSs这样通讯资源有限的系统中使用^[2]. 为了节约通讯资源, 事件触发这一根据预先设计的事件触发机制

(ETM)来决定是否传输信号的控制算法引起了许多学者的关注^[3-6]. 一般的事件触发控制均需要特殊的硬件(事件触发器)对信号进行连续监测, 往往会造成额外的计算负载. 为了解决这一问题, 文献[7]首次提出了自触发控制思想. 相比于事件触发控制, 自触发控制避免了事件触发器对系统状态的连续监测. 因此, 自触发控制算法自提出以来便得到了广泛关注

收稿日期: 2020-12-25; 录用日期: 2021-03-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61773140).

责任编委: 关新平.

[†]通讯作者. E-mail: binzhou@hit.edu.cn.

并取得了一系列成果^[8-9]. 为了进一步增大触发间隔, 文献[10]创造性地提出了动态ETM思想. 该思想很快就被应用到不同系统的事件触发控制算法的设计之中^[11-12]. 对于连续系统而言, 如何避免Zeno现象的发生^[3]是设计事件触发或者自触发控制算法需要解决的核心问题之一. 对于离散系统的事件触发或者自触发控制算法而言, 需要防止triviality现象的发生^[13]. 尽管已经存在很多分析Zeno现象的方法, 但对triviality现象进行系统性分析的成果还相对较少.

与此同时, 由于输入受限几乎存在于每个实际物理系统中, 对输入受限系统事件触发和自触发控制算法的研究得到了广泛关注. 文献[14]针对输入受限系统, 设计了基于Riccati方程的事件触发和自触发控制算法, 在保证系统稳定性的同时避免了Zeno现象的发生; 文献[15-16]分别设计了事件触发控制器解决特殊输入受限线性系统(中立稳定系统、双积分系统)的半全局和全局镇定问题; 文献[17]对输入受限系统进行了基于输出反馈动态事件触发控制器的设计, 并通过引入一个额外的动态变量避免了Zeno现象的发生; 文献[18]通过静态/动态触发和自触发控制器, 实现了输入受限连续系统的半全局镇定. 然而, 很少有文献针对输入受限离散系统进行事件触发控制算法的设计^[19-21]. 尽管文献[19-21]提出了输入受限离散线性系统的事件触发控制算法, 但是这些工作并没有对triviality现象进行具体的分析.

本文针对输入受限离散线性系统的半全局镇定问题, 以离散参量Lyapunov方程(DPLE)为基础, 分别设计静态/动态增益调度触发控制(GSETC)和增益调度自触发控制(GSSTC)算法. 同时给出最小触发间隔并讨论其与设计参数之间的关系, 并给出避免triviality现象发生的条件. 最后将所提出算法应用于航天器交会系统的控制器设计, 仿真结果验证了所提出算法的有效性.

符号说明: 令 \mathbf{R}^p 和 $\mathbf{R}^{n \times m}$ 为 p 维和 $n \times m$ 维Euclidean空间, N 为非负整数集合, I 为具有适当维数的单位矩阵, A^T 和 $\text{tr}(A)$ 分别为方阵 A 的转置和迹, $\lambda_{\max}(P)$ 、 $\lambda_{\min}(P)$ 和 $\|P\|$ 分别为对称矩阵 P 的最大、最小特征值和2范数. 对于正整数 $c \leq d$, 定义

$$I[c, d] = \{c, c+1, \dots, d\}.$$

定义饱和函数

$$\begin{aligned} \sigma(v) &= [\sigma(v_1) \ \sigma(v_2) \ \dots \ \sigma(v_m)], \\ \sigma(v_l) &= \text{sign}(v_l) \min\{1, \|v_l\|\}, \end{aligned}$$

其中 $l = 1, 2, \dots, m$.

1 问题描述与预备知识

考虑输入受限离散线性时不变系统

$$x(k+1) = Ax(k) + B\sigma(u(k)). \quad (1)$$

其中: x 和 u 分别为状态和控制向量; $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 分别为系统和控制矩阵.

当且仅当 (A, B) 可控且 A 的特征值均位于单位圆上时才能通过反馈实现系统(1)的半全局镇定. 因此, 可以不失一般性地作如下假设^[22]:

假设1 (A, B) 可控且 A 的所有极点均位于单位圆上.

文献[23-24]利用线性低增益反馈解决了系统(1)的半全局镇定问题. 本文将设计一种静态GSETC方法解决系统(1)的半全局镇定问题. 与文献[23-24]需要不断更新控制律不同的是, 该方法仅需要在特定的时刻 k_i 更新控制律, 从而极大地减少了不必要的通信. 方法的核心思想是通过事件触发器中的ETM决定控制增益 K_γ 中设计参数 γ 和控制器中状态 $x(k_i)$ 的更新时间. 建立事件触发器中的ETM

$$k_{i+1} = \inf\{k > k_i : \Psi_{\text{setm}}(x(k), e(k)) \leq 0\},$$

定义如下状态误差:

$$e(k) = x(k_i) - x(k), \quad k \in I[k_i, k_{i+1}), \quad i \in N, \quad (2)$$

其中 $k_0 = 0$.

此外, 为了进一步增大触发间隔, 还将设计动态GSETC方法. 与静态GSETC方法不同的是, 动态GSETC通过引入一个恒为正的动态变量 $\delta(k)$ 构造如下动态ETM:

$$k_{i+1} = \inf\{k > k_i : \Psi_{\text{detm}}(x(k), \delta(k), e(k)) \leq 0\}.$$

需要注意的是, 无论是静态还是动态GSETC, 均需要事件触发器对所有的采样状态 $x(k)$ 和状态误差 $e(k)$ (在动态GSETC中还包括 $\delta(k)$)进行监测. 这可能会极大地增大事件触发器的负载, 以至于它们很难被应用到实际工程当中. 为此将分别设计静态和动态的GSSTC方法, 其中静态和动态自触发机制(STM)的形式如下所示:

$$k_{i+1} = \inf\{k > k_i : \Psi_{\text{sstm}}(x(k_i)) \leq 0\},$$

$$k_{i+1} = \inf\{k > k_i : \Psi_{\text{dstm}}(x(k_i), \delta(k_i)) \leq 0\}.$$

GSETC和GSSTC的不同点是后者的事件触发器不需要对状态 $x(k)$ 和测量误差 $e(k)$ 进行监测, 只需要通过之前触发时刻的状态 $x(k_i)$ (动态GSSTC仅需要触发时刻 $\delta(k_i)$ 的信息, 同样也避免了对 $\delta(k)$ 的连续监测)即可计算出下一个触发时刻, 其本质上是一种主动触发方法. 此外, 需要再次强调的是, 为了避免

triviality 现象的发生^[13], $\{k_{i+1} - k_i\}$ 的最小值必须大于 1.

引理 1^[25] 若假设 1 成立, 则对于任意 $\gamma \in (0, 1)$, DPLE

$$A^T P_\gamma A - P_\gamma - A^T P_\gamma B (I_m + B^T P_\gamma B)^{-1} B^T P_\gamma A = -\gamma P_\gamma \quad (3)$$

存在唯一的正定解 $P_\gamma = W^{-1}(\gamma)$, 其中 $W(\gamma)$ 为方程

$$W - \frac{1}{1-\gamma} A W A^T = -B B^T$$

的唯一正定解 P_γ , 且满足 $dP_\gamma/d\gamma > 0$, $\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} P_\gamma = 0$. 存在一个常数 $\mu > 0$ 和一个整数 $n_1 \geq 1$, 使得

$$\mu \gamma n_1 I_n \leq P_\gamma \leq \mu \gamma^* \gamma I_n, \quad \forall \gamma \in (0, \gamma^*].$$

其中: $\gamma^* > 0$ 为任意给予的常数, $\mu \gamma^* > 0$ 为一个依赖于 γ^* 的常数. 对于任意整数 $r \geq 0$, 有

$$(A^r)^T P_\gamma A^r \leq (1-\gamma)^{-(n-1)r} P_\gamma. \quad (4)$$

同时有

$$\begin{aligned} A_c^T P_\gamma A_c - P_\gamma &= -\gamma P_\gamma - K_\gamma^T K_\gamma, \\ B^T P_\gamma A_c &= K_\gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} K_\gamma &= (I_m + B^T P_\gamma B)^{-1} B^T P_\gamma A, \\ A_c &= A - B K_\gamma. \end{aligned}$$

此外, $K_\gamma^T K_\gamma \leq F_\gamma \leq \pi_\gamma P$, 其中

$$F_\gamma = K_\gamma^T K_\gamma + K_\gamma^T B^T P_\gamma B K_\gamma,$$

标量函数

$$\pi_\gamma = \pi(\gamma) = \frac{n\gamma}{(1-\gamma)^{n-1}}$$

随着 γ 的增大而增大, 且 $\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \pi_\gamma = 0$.

由文献[26]中的命题 3 并注意到 $1 - (1-\gamma)^n \leq n\gamma, \forall \gamma \in (0, 1)$, 有

$$L_\gamma^T P_\gamma L_\gamma \leq f_\gamma P_\gamma. \quad (6)$$

其中: $L_\gamma = A_c - I_n, f_\gamma = \frac{2n^2\gamma^2}{(1-\gamma)^n} + 2n - 2\text{tr}(A)$.

综上, 本文将研究的问题总结如下.

问题 1 设计基于静态和动态 ETM/STM 更新的控制律

$$u(k) = -K_\gamma x(k_i), \quad k \in I[k_i, k_{i+1}), \quad i \in N, \quad (7)$$

使得由系统(1)和控制律(7)组成的闭环系统渐近稳定且闭环系统的吸引域包含任意给定的有界集合 Ω .

2 主要结果

这一节将分别设计静态和动态 GSETC/GSSTC 四种控制算法解决问题 1. 为了简化相关描述, 定义

$$e(k) = e_k, \quad x(k) = x_k, \quad x(k_i) = x_{k_i},$$

$$\delta(k) = \delta_k, \quad \delta(k_i) = \delta_{k_i}.$$

首先, 定义 $K_\gamma \triangleq [f_1^T, f_2^T, \dots, f_m^T]^T$. 对于任意 $a \in I[1, m]$, 利用引理 1 可得

$$\|f_a x_{k_i}\|^2 \leq x_{k_i}^T \sum_{a=1}^m (f_a^T f_a) x_{k_i} \leq \pi_\gamma x_{k_i}^T P_\gamma x_{k_i}. \quad (8)$$

2.1 静态 GSETC 算法的设计

首先, 设

$$\gamma = \max\{\gamma \in (0, \gamma_*] : \pi_\gamma x_{k_i}^T P_\gamma x_{k_i} = 1\}. \quad (9)$$

其中: $x_{k_0} = x(0) \in \Omega, \gamma_* > \gamma_0$ 为设计参数, x_{k_i} 取决于设计的静态 ETM/STM. 引理 1 可以保证 γ 的存在. 由于 $d\pi_\gamma/d\gamma > 0$ 且 $dP_\gamma/d\gamma > 0$, 非线性方程(9)的数值解可以很容易地通过二分法求出. 定义集合 $\mathcal{E}_s = \{x \in \mathbf{R}^n : \pi_{\gamma_*} x^T P_{\gamma_*} x \leq 1\}$ 和 $\mathcal{F}_s = \mathbf{R}^n / \mathcal{E}_s$.

定理 1 在假设 1 的前提下, 设计静态 ETM

$$k_{i+1} = \inf\{k > k_i : \Psi_{\text{setm}}(x_k, e_k) \leq 0\}, \quad (10)$$

其中

$$\Psi_{\text{setm}}(x_k, e_k) = \frac{\gamma}{2} x_k^T P_\gamma x_k - e_k^T F_\gamma e_k.$$

根据式(9)和(10)更新的反馈控制律(7)是问题 1 的解.

证明 对于任意 $x_k \in \mathcal{F}_s$, 由式(8)和(9)可得

$$\sigma(-f_a x_{k_i}) = -f_a x_{k_i}, \quad \forall k \in I[k_i, k_{i+1}).$$

因此, 对于任意 $x_k \in \mathcal{F}_s$, 闭环系统可以写成

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k - B K_\gamma x_{k_i} = A_c x_k - B K_\gamma e_k, \\ k &\in I[k_i, k_{i+1}). \end{aligned} \quad (11)$$

取 Lyapunov 函数 $V(x_k) \triangleq x_k^T P_\gamma x_k$, 利用式(5)和 F_γ 的定义可知, 该 Lyapunov 函数沿着系统(11)的差分满足

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) &= x_{k+1}^T P_\gamma x_{k+1} - x_k^T P_\gamma x_k = \\ &= -\gamma x_k^T P_\gamma x_k - x_k^T K_\gamma^T K_\gamma x_k - \\ &= 2x_k^T K_\gamma^T K_\gamma e_k + e_k^T K_\gamma^T B^T P_\gamma B K_\gamma e_k \leq \\ &= -\gamma x_k^T P_\gamma x_k + e_k^T F_\gamma e_k. \end{aligned} \quad (12)$$

根据静态 ETM(10)和 γ 的定义, 对于任意 $x_k \neq 0$, 式(12)可以继续写成

$$\Delta V(x_k) \leq -\frac{\gamma}{2} V(x_k) < 0. \quad (13)$$

这表明闭环系统的状态可以收敛到集合 \mathcal{E}_s . 对于任意 $x_k \in \mathcal{E}_s$, 通过式(8)和集合 \mathcal{E}_s 的定义, 闭环系统可以写成式(11). 因此, 当 $x_k \in \mathcal{E}_s$ 时, 由式(10)和(12)有

$$\Delta V(x_k) \leq -\frac{\gamma}{2} V(x_k) \leq 0. \quad (14)$$

这表明集合 \mathcal{E}_s 是一个不变集. 式(13)和(14)表明, 对于任意 $k \in I[k_i, k_{i+1})$, 有

$$V(x_k) \leq \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^{k-k_i} V(x_{k_i}),$$

表明闭环系统是渐近稳定的. \square

尽管上述设计的静态 GSETC 算法可以有效地节约通讯资源,但是需要事件触发器对所有的状态 x_k 和测量误差 e_k 进行监测. 这可能会造成事件触发器的极大负载. 为了解决此问题,下面设计一种静态 GSSTC 算法.

2.2 静态 GSSTC 算法的设计

定理 2 令假设 1 成立,定义静态 STM 如下:

$$k_{i+1} = \inf\{k > k_i : \Psi_{\text{sstm}}(x_{k_i}) \leq 0\}. \quad (15)$$

其中

$$\Psi_{\text{sstm}}(x_{k_i}) = \frac{\gamma}{3} x_{k_i}^T P_{\gamma} x_{k_i} - (\gamma + \pi_{\gamma}) S_k,$$

$$S_k =$$

$$(k - k_i) \sum_{l=k_i}^{k-1} (A^{k-1-l} L_{\gamma} x_{k_i})^T P_{\gamma} A^{k-1-l} L_{\gamma} x_{k_i}.$$

根据式(9)和(15)更新的反馈控制律(7)是问题 1 的解.

证明 由式(2)和(11),有

$$e_{k+1} = x_{k_i} - x_{k+1} = A e_k + L_{\gamma} x_{k_i},$$

$$\forall k \in I[k_i, k_{i+1}).$$

这表明 $e_k = \sum_{l=k_i}^{k-1} A^{k-1-l} L_{\gamma} x_{k_i}$, $\forall k \in I[k_i, k_{i+1})$, 其中 $e_{k_i} = 0$. 利用 Jensen 不等式^[27]和 S_k 的定义可得 $e_k^T P_{\gamma} e_k \leq S_k$, $\forall k \in I[k_i, k_{i+1})$. 结合三角不等式和引理 1, 有

$$\Psi_{\text{setm}}(x_k, e_k) \geq$$

$$\frac{\gamma}{3} x_{k_i}^T P_{\gamma} x_{k_i} - (\gamma + \pi_{\gamma}) e_k^T P_{\gamma} e_k \geq$$

$$\Psi_{\text{sstm}}(x(k_i)).$$

这表明从静态 STM(15)可推出静态 ETM(10). 其余证明过程与定理 1 类似, 此略. \square

下面计算定理 1 和定理 2 中算法的最小触发间隔, 并给出避免 triviality 现象的条件.

命题 1 定理 1 和定理 2 的触发间隔 $(k_{i+1} - k_i)$ 下界为

$$M_s^* = \arg \min_{M \in \mathbf{N}} \left\{ \frac{(1-\gamma)^{n-1}}{3(n+1)f_{\gamma}} - g_s \leq 0 \right\}, \quad (16)$$

其中

$$g_s = M \sum_{l=0}^{M-1} (1-\gamma)^{-(n-1)(M-1-l)}.$$

如果 $\gamma_* < \gamma_{\text{sd}}^*$, γ_{sd}^* 是方程 $\frac{(1-\gamma)^{n-1}}{3(n+1)f_{\gamma}} = 1$ 的解, 则定理 1 和定理 2 中设计的静态 GSETC/GSSTC 算法不会发

生 triviality 现象, 即触发间隔 $(k_{i+1} - k_i)$ 一定大于 1.

证明 定义 $M = k - k_i$, 由式(4)和(6)可得

$$S_k \leq$$

$$M \sum_{l=0}^{M-1} (1-\gamma)^{-(n-1)(M-1-l)} x_{k_i}^T L_{\gamma}^T P_{\gamma} L_{\gamma} x_{k_i} \leq$$

$$f_{\gamma} g_s x_{k_i}^T P_{\gamma} x_{k_i}. \quad (17)$$

另一方面, 对于任意 $\gamma \in (0, 1)$, 有 $\gamma \leq \frac{\gamma}{(1-\gamma)^{n-1}}$. 由式(17)和 $\Psi_{\text{sstm}}(x_{k_i})$ 、 π_{γ} 的定义, 有

$$\Psi_{\text{sstm}}(x_{k_i}) \geq \left(\frac{1}{3} - \frac{(n+1)f_{\gamma}g_s}{(1-\gamma)^{n-1}} \right) \gamma x_{k_i}^T P_{\gamma} x_{k_i}. \quad (18)$$

比较式(15)与(18)可知, 式(16)比静态 STM(15)更保守. 静态 STM(15)比静态 ETM(10)也更加保守. 因此, 静态 GSETC 和 GSSTC 算法的触发间隔不小于 M_s^* . 由于 f_{γ} 随着 γ 的增大而增大, $\frac{(1-\gamma)^{n-1}}{3(n+1)f_{\gamma}}$ 随着 γ 的增加而减小, 此外 g_s 随着 γ 的增加而增大, 因此根据 M_s^* 的定义可知 M_s^* 随着 γ 的增加而减小. 当 $M = 1$ 时, $g_s = 1$ 且 g_s 随着 M 的增加而增加, 由式(16)可知, 如果 $\frac{(1-\gamma)^{n-1}}{3(n+1)f_{\gamma}} > 1$, 则 $M_s^* \geq 2$. 这表明当 $\gamma \in (0, \gamma_{\text{sd}}^*)$ 时, $M_s^* \geq 2$. 根据 γ 的定义有 $\gamma \leq \gamma_*$. 因此, 当 $\gamma_* \in (0, \gamma_{\text{sd}}^*)$ 时, 所设计的 GSETC 和 GSSTC 算法的触发间隔一定大于 1. \square

为了进一步增大触发间隔, 下面进一步设计相应的动态 GSETC 和 GSSTC 算法.

2.3 动态 GSETC 算法的设计

设 δ_k 满足差分方程

$$\delta_{k+1} = \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \delta_k + \Psi_{\text{setm}}(x_k, e_k), \quad (19)$$

其中 $\delta_0 \geq 0$. 定义

$$\gamma = \max\{\gamma \in (0, \gamma_*) : \pi_{\gamma}(x_{k_i}^T P_{\gamma} x_{k_i} + \delta_{k_i}) = 1\},$$

$$(20)$$

其中 $(x(0), \delta(0)) \in \Omega$, x_{k_i} 和 δ_{k_i} 取决于设计的动态 ETM/STM. 定义动态 ETM

$$k_{i+1} = \inf\left\{k > k_i : \delta_k + \frac{2}{\gamma} \Psi_{\text{setm}}(x_k, e_k) \leq 0\right\} \quad (21)$$

和集合 $\mathcal{F}_d = \mathbf{R}^{n+1}/\mathcal{E}_d$, 其中

$$\mathcal{E}_d = \{(x, \delta) \in \mathbf{R}^{n+1} : \pi_{\gamma_*}(x^T P_{\gamma_*} x + \delta) \leq 1\}.$$

引理 2^[11] 令 δ_k 满足式(19)和(21), 对于任意 $k \in I[k_i, k_{i+1})$, 有

$$\delta_{k+1} \geq (1-\gamma)\delta_k \geq \dots \geq (1-\gamma)^{k+1}\delta_{k_i} \geq 0.$$

定理 3 对于任意有界集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$, 根据式(20)和(21)更新的反馈控制律(7)是问题 1 的解.

证明 定义正定函数

$$W(x_k, \delta_k) \triangleq x_k^T P_{\gamma} x_k + \delta_k.$$

由式(8)和 $\delta_k \geq 0$ 可知,对于任意 $k \in I[k_i, k_{i+1})$,有

$$\|f_a x_{k_i}\|^2 \leq \pi_\gamma x_{k_i}^T P_\gamma x_{k_i} \leq x_{k_i}^T P_\gamma x_{k_i} + \delta_{k_i} = 1. \quad (22)$$

因此对于任意 $x_k \in \mathcal{F}_d$,根据式(12)和(19)可知 $W(x_k, \delta_k)$ 沿着系统(11)和(19)的差分满足

$$\begin{aligned} \Delta W(x_k, \delta_k) &= \\ x_{k+1}^T P_\gamma x_{k+1} - x_k^T P_\gamma x_k + \delta_{k+1} - \delta_k &\leq \\ -\frac{\gamma}{2} W(x_k, \delta_k) &< 0, \forall x_k \neq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

这表明闭环系统的状态可以收敛到集合 \mathcal{E}_d .对于任意 $x_k \in \mathcal{E}_d$,由式(22)和集合 \mathcal{E}_d 的定义,闭环系统可以写作式(11).因此当 $x_k \in \mathcal{E}_d$ 时,利用式(23)可得

$$\Delta W(x_k, \delta_k) \leq -\frac{\gamma}{2} W(x_k, \delta_k) \leq 0,$$

这表明集合 \mathcal{E}_d 是不变集.结合式(23)可得,对于任意 $k \in I[k_i, k_{i+1})$ 均有

$$W(x_k, \delta_k) \leq \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)^{k-k_i} W(x_{k_i}, \delta_{k_i}).$$

综上可证得闭环系统是渐近稳定的. \square

2.4 动态GSSTC算法的设计

定理4 定义动态STM

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= \\ \inf \left\{ k > k_i : \Psi_{\text{sstm}}(x_{k_i}) + \frac{\gamma}{2} \delta_{k_i} (1 - \gamma)^{k-k_i} \leq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

对于任意有界集合 $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$,由式(20)和(24)更新的反馈控制律(7)是问题1的解.

证明 由动态STM(24)的定义可知,对于任意 $k \in I[k_i, k_{i+1})$,均有

$$\frac{2}{\gamma} \Psi_{\text{sstm}}(x_{k_i}) + \delta_{k_i} (1 - \gamma)^{k-k_i} \geq 0, i \in N. \quad (25)$$

由引理2可知 $\delta_k \geq \delta_{k_i} (1 - \gamma)^{(k-k_i)}$,结合式(25)可得(21)成立.其余证明过程类似于定理3,此略. \square

命题2 定理3和定理4的触发间隔下界为

$$M_d^* = \arg \min_{M \in \mathbf{N}} \left\{ \frac{(1 - \gamma)^{n-1}}{3(n+1)f_\gamma} + g_s + \varphi_d \leq 0 \right\}, \quad (26)$$

其中 $\varphi_d = \frac{\pi_{\gamma_0} \delta_{k_i} (1 - \gamma)^{n-1+M}}{2(n+1)}$.如果 $\gamma_* < \gamma_{\text{sd}}^*$,则所设计的动态GSETC/GSSTC不会发生triviality现象,即 $\{k_{i+1} - k_i\}$ 一定大于1.

证明 由定理3和定理4中 γ 的定义可知

$$x_{k_i}^T P_\gamma x_{k_i} \leq x_{k_i}^T P_\gamma x_{k_i} + \delta_{k_i} \leq x_0^T P_\gamma x_0 + \delta_0 = \frac{1}{\pi_{\gamma_0}}.$$

由此可得

$$\frac{\gamma \delta_{k_i} (1 - \gamma)^{k-k_i}}{2\gamma x_{k_i}^T P_\gamma x_{k_i}} \geq \frac{\pi_{\gamma_0} \delta_{k_i} (1 - \gamma)^M}{2},$$

其中 $M = k - k_i$.由此以及式(18)表明,触发条件(26)比动态STM(24)和ETM(21)更加保守,故所设计的动

态GSETC/GSSTC的触发间隔不小于 M_d^* .由 $\varphi_d \geq 0$ 可知,当 γ 相等时, $M_d^* \geq M_s^*$,因此当 $\gamma_* < \gamma_{\text{sd}}^*$ 时, $M_d^* \geq M_s^* \geq 2$.因为 g_s 和 φ_d 均随着 γ 的增加而减小,所以 M_d^* 随着 γ 的增加而减小. \square

3 在航天器交会系统中的应用

3.1 问题描述

考虑如图1所示的航天器交会系统.以目标航天器质心为原点, x 轴、 y 轴和 z 轴分别沿着轨道半径方向、目标航天器的飞行方向和轨道平面外方向且它们一起构成右手坐标系.假设目标航天器和追踪航天器的相对距离为 r ,目标航天器运行在以 R 为半径的圆形轨道上,则目标航天器的飞行速度为 $s = \eta^{1/2} R^{3/2}$,其中 $\eta = GM$,这里 G 和 M 分别为万有引力常数和中心体质量.目标航天器与追踪航天器的相对运动方程^[28]为

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2s\dot{y} + s^2(R+x) - \theta\eta(R+x) + \text{sat}_{\sigma_1}(\sigma_x), \\ \ddot{y} = -2s\dot{x} + s^2y - \theta\eta y + \text{sat}_{\sigma_2}(\sigma_y), \\ \ddot{z} = -\theta\eta z + \text{sat}_{\sigma_3}(\sigma_z). \end{cases} \quad (27)$$

其中: x, y, z 和 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 分别为目标航天器与追踪航天器的相对位置和速度; $\theta = ((R+x)^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$; $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z]^T$ 为追踪航天器的加速度矢量, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 为加速度在3个方向上的分量,其最大值分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

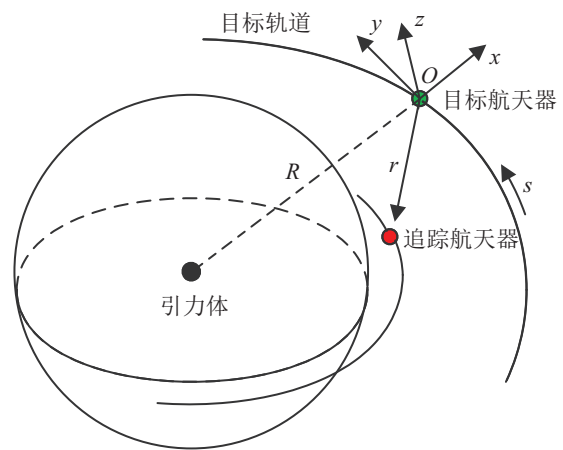


图1 目标航天器相对轨道坐标系

方程(27)的线性化方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2s\dot{y} + 3s^2x + \text{sat}_{\sigma_1}(\sigma_x), \\ \ddot{y} = -2s\dot{x} + \text{sat}_{\sigma_2}(\sigma_y), \\ \ddot{z} = -s^2z + \text{sat}_{\sigma_3}(\sigma_z). \end{cases} \quad (28)$$

如果 $\sigma = 0$,式(28)即为著名的Hill's方程或者C-W方程^[29].定义 $D = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 并选择 $X =$

$[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$, 式(27)的线性化系统可以描述为

$$\dot{X} = A_s X + B_s \text{sat}(U). \quad (29)$$

其中

$$U = D^{-1}\sigma,$$

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3s^2 & 0 & 0 & 0 & 2s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_s = \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix} D.$$

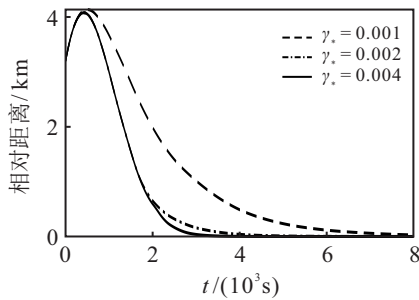
航天器的交会过程就是将系统(29)的状态 X 从非零初始状态 $X(t_0)$ 转移到终值 $X(t_f) = 0$ 的过程, t_f 代表交会时间^[22]. 本文将利用所设计的控制算法实现该目标. 首先将系统(29)离散化为

$$x(k+1) = Ax(k) + B\text{sat}(u(k)). \quad (30)$$

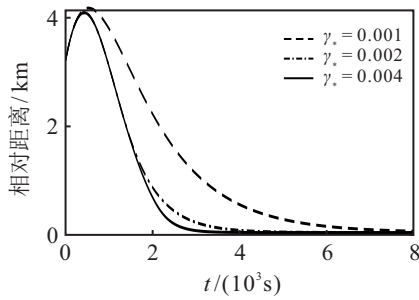
其中: $A = e^{A_s T_s}, B = \int_0^{T_s} e^{A_s \tau} d\tau B_s, T_s$ 为采样周期. A_s 的所有特征值在虚轴上^[22], 所以 A 的所有特征值在单位圆上, (A, B) 满足假设1.

3.2 仿真结果

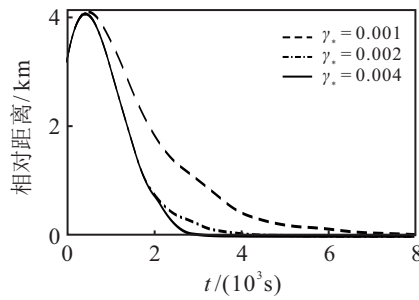
虽然本文基于线性系统(30)进行设计, 但仿真将直接针对非线性系统(27). 选取的仿真参数为轨道半



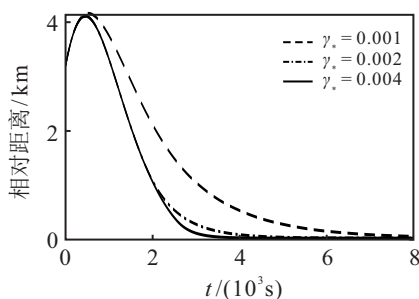
(a) 定理1



(b) 定理2

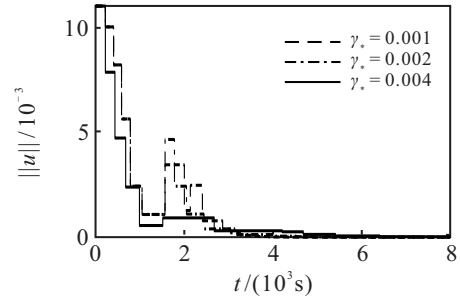


(c) 定理3

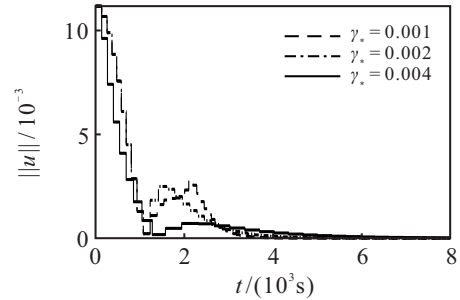


(d) 定理4

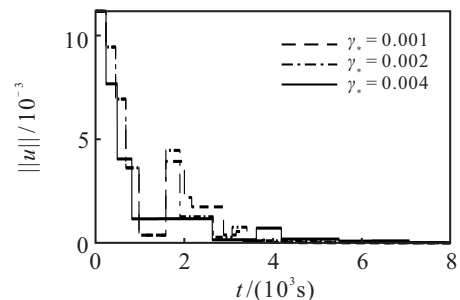
图2 不同 γ_* 下航天器的相对距离



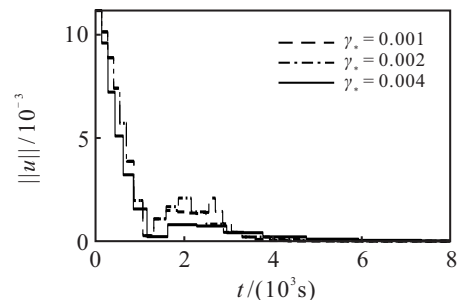
(a) 定理1



(b) 定理2



(c) 定理3



(d) 定理4

图3 不同 γ_* 下的控制信号

径 $R = 4.2241 \times 10^7$ m, 重力常数 $\eta = 3.986 \times 10^{14}$ m, 角速度 $s = 7.2722 \times 10^{-5}$ rad/s. 此外, 选取 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0.02$, 采样周期 $T_s = 1$ s. 仿真时, 状态 X 和动态变量 δ 的初值选取为

$$X(0) = [1500 \ 2000 \ 2000 \ 1 \ 2 \ 4]^T, \delta(0) = 0.$$

由命题1可以计算出

$$\gamma_{sd}^* = 0.022\ 669\ 964\ 874\ 315.$$

为了验证 γ_* 对触发间隔和控制性能的影响, 选取不同的 γ_* 值分别进行仿真, 结果如图2和图3所示, 具体触发间隔指标如表1所示. 同时, 为了验证命题1和命题2, 表1还给出 $\gamma_* = \gamma_{sd}^*$ 时的触发时间间隔指标.

表1 不同算法最小触发间隔/平均触发间隔/触发次数

γ_*	0.001	0.002	0.004	γ_{sd}^*
定理1	216/664/12	179/391/20	125/248/32	19/73/110
定理2	131/282/28	105/155/51	79/87/91	6/11/747
定理3	238/708/10	217/457/16	126/285/28	19/80/99
定理4	141/565/13	134/369/20	134/230/33	9/26/310

图2和表1验证了相关结果的正确性, 即随着 γ_* 的增大, 完成交会任务的时间变短, 触发间隔变小. 这显示了所设计算法可以根据实际工程情况, 通过选取适当的 γ_* 在触发时间间隔与控制性能之间进行折中. 此外, 表1还表明, 只要 γ_* 不大于 γ_{sd}^* , 控制算法即可避免 triviality 现象 (这里是触发间隔大于采样间隔 1 s), 从而验证了命题1和命题2的正确性.

仿真结果还表明, 在控制性能几乎相同的情况下, 动态 GSETC/GSSTC 要比相应的静态 GSETC/GSSTC 有着较大的触发时间间隔. 尽管自触发控制算法避免了对测量误差的连续监测, 但是有着比事件触发控制算法更小的触发间隔. 图3表明没有发生控制器饱和现象.

为了进一步表明所提出算法的优势, 将静态 GSETC 算法 (选取 $\gamma_* = 0.004$) 与文献 [24] 的一般 DPLE 控制算法 (即 $\gamma = \gamma_0$) 进行比较. 虽然静态 GSETC 算法的触发次数少, 但是由于决定闭环系统收敛速率的参数 γ 在本文算法中是逐渐递增的, 所设

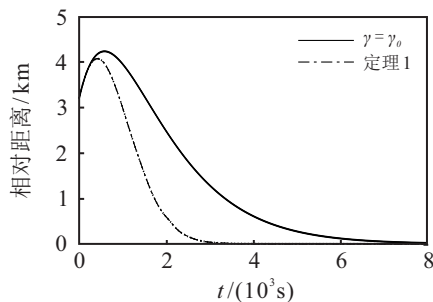


图4 不同方法下的航天器的相对距离

计算法的收敛速度要比文献 [24] 快. 仿真结果 (图4) 验证了这一事实.

4 结论

本文以离散参量 Lyapunov 方程为基础, 分别设计了静态/动态触发和自触发增益调度控制算法, 不仅可以使被控系统获得更好的控制性能, 而且极大地节约了通讯资源. 此外, 给出了触发间隔的下界并找到了其与设计参数之间的关系, 可以容易地在控制性能与触发间隔之间进行权衡, 同时讨论了离散系统事件触发控制的 triviality 现象, 并给出了避免其发生的条件. 最后, 将所提出算法应用于航天器交会系统的控制器设计中, 通过仿真结果验证了方法的有效性.

参考文献 (References)

- [1] 杨飞生, 汪璟, 潘泉. 基于事件触发机制的网络控制研究综述[J]. 控制与决策, 2018, 33(6): 969-977. (Yang F S, Wang J, Pan Q. A survey of networked event-triggered control[J]. Control and Decision, 2018, 33(6): 969-977.)
- [2] 祝超群, 郭戈. 事件驱动的网络化系统最优控制[J]. 控制与决策, 2014, 29(5): 802-808. (Zhu C Q, Guo G. Optimal control for event-triggered networked control systems[J]. Control and Decision, 2014, 29(5): 802-808.)
- [3] Tabuada P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(9): 1680-1685.
- [4] Wang Y W, Lei Y, Bian T, et al. Distributed control of nonlinear multiagent systems with unknown and nonidentical control directions via event-triggered communication[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 50(5): 1820-1832.
- [5] Li T, Wen C Y, Yang J, et al. Event-triggered tracking control for nonlinear systems subject to time-varying external disturbances[J]. Automatica, 2020, 119: 109070.
- [6] Wang C L, Wen C Y, Hu Q L. Event-triggered adaptive control for a class of nonlinear systems with unknown control direction and sensor faults[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 65(2): 763-770.
- [7] Velasco M, Fuentres J, Marti P. The self triggered task model for real-time control systems[C]. IEEE 24th Real-Time Systems Symposium. Cancun: IEEE, 2003: 67-70.
- [8] Akashi S, Ishii H, Cetinkaya A. Self-triggered control with tradeoffs in communication and computation[J]. Automatica, 2018, 94: 373-380.
- [9] Sun Z Q, Dai L, Liu K, et al. Robust self-triggered MPC with adaptive prediction horizon for perturbed nonlinear

- systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(11): 4780-4787.
- [10] Girard A. Dynamic triggering mechanisms for event-triggered control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(7): 1992-1997.
- [11] Ge X H, Han Q L, Wang Z D. A dynamic event-triggered transmission scheme for distributed set-membership estimation over wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(1): 171-183.
- [12] Wang Y C, Zheng W X, Zhang H G. Dynamic event-based control of nonlinear stochastic systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(12): 6544-6551.
- [13] Eqtami A, Dimarogonas D V, Kyriakopoulos K J. Event-triggered control for discrete-time systems[C]. Proceedings of the 2010 American Control Conference. Baltimore, 2010: 4719-4724.
- [14] Zuo Z Q, Li Q S, Li H C, et al. Event-triggered and self-triggered control for linear systems with actuator saturation[J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2018, 40(4): 1281-1288.
- [15] Zhang L Y, Chen M Z Q. Event-triggered control for semi-global stabilisation of systems with actuator saturation[J]. International Journal of Control, 2016, 89(5): 1047-1064.
- [16] Zhang L Y, Chen M Z Q. Event-based global stabilization of linear systems via a saturated linear controller[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(5): 1073-1091.
- [17] Li H C, Zuo Z Q, Wang Y J. Dynamic output feedback control for systems subject to actuator saturation via event-triggered scheme[J]. Asian Journal of Control, 2018, 20(1): 207-215.
- [18] Zhang K, Zhou B, Jiang H Y. Parametric Lyapunov equation based event-triggered and self-triggered control of input constrained linear systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(16): 6606-6626.
- [19] Wu W, Reimann S, Liu S. Event-triggered control for linear systems subject to actuator saturation[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2014, 47(3): 9492-9497.
- [20] Xie Y J, Lin Z L. Event-triggered global stabilization of discrete-time linear systems using bounded controls[C]. The 13th IEEE International Conference on Control & Automation. Macedonia, 2017: 479-484.
- [21] Groff L B, Moreira L G, da Silva J M G. Event-triggered control co-design for discrete-time systems subject to actuator saturation[C]. The IEEE Conference on Computer Aided Control System Design. Buenos Aires, 2016: 1452-1457.
- [22] Zhou B, Wang Q, Lin Z L, et al. Gain scheduled control of linear systems subject to actuator saturation with application to spacecraft rendezvous[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2014, 22(5): 2031-2038.
- [23] Lin Z L, Saberi A. Semi-global exponential stabilization of linear discrete-time systems subject to input saturation via linear feedbacks[J]. Systems & Control Letters, 1995, 24(2): 125-132.
- [24] Zhou B, Lin Z L, Duan G R. A parametric Lyapunov equation approach to low gain feedback design for discrete-time systems[J]. Automatica, 2009, 45(1): 238-244.
- [25] Bin Z. Introduction[C]. Truncated Predictor Feedback for Time-Delay Systems. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014: 1-8.
- [26] Zhou B, Lin Z L. Parametric Lyapunov equation approach to stabilization of discrete-time systems with input delay and saturation[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2011, 58(11): 2741-2754.
- [27] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems[C]. Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney, 2000: 2805-2810.
- [28] Carter T E. State transition matrices for terminal rendezvous studies: Brief survey and new example[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(1): 148-155.
- [29] Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal guidance system for satellite rendezvous[J]. Journal of the Aerospace Sciences, 1960, 27(9): 653-658.

作者简介

张凯(1993—), 男, 博士生, 从事事件触发控制的研究, E-mail: kaizhang0116@163.com;

周彬(1981—), 男, 教授, 博士生导师, 从事线性和非线性控制理论及应用等研究, E-mail: binzhou@hit.edu.cn.

(责任编辑: 郑晓蕾)