

控制与决策

Control and Decision

一种基于变量约简的稀疏优化算法

伍国华, 张雯菲, 毛成辉, 宋艾娟

引用本文:

伍国华, 张雯菲, 毛成辉, 宋艾娟. 一种基于变量约简的稀疏优化算法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(6): 1550–1558.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1735>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

混合MIMO相控阵雷达的交错稀疏阵列设计

Interleaved sparse array design of hybrid phased-MIMO radar

控制与决策. 2021, 36(4): 959–966 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0965>

混合MIMO相控阵雷达的交错稀疏阵列设计

Interleaved sparse array design of hybrid phased-MIMO radar

控制与决策. 2021, 36(4): 959–966 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0965>

一种基于稀疏系数匹配学习的图像去雾算法

An image dehazing method based on learning framework with sparse coefficient matching

控制与决策. 2020, 35(11): 2797–2802 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2018.1764>

基于知识粒度特征的多目标粗糙集属性约简算法

Multi objective rough set attribute reduction algorithm based on characteristics of knowledge granularity

控制与决策. 2021, 36(1): 196–205 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0490>

基于稀疏度阶数优化的杂波密度估计算法

A clutter density estimation algorithm by optimized sparsity order

控制与决策. 2020, 35(12): 2923–2930 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0429>

一种基于变量约简的稀疏优化算法

伍国华, 张雯菲, 毛成辉[†], 宋艾娟

(中南大学 交通运输工程学院, 长沙 410075)

摘要: 压缩感知理论能够为处理大规模信号数据提供有效支持. 压缩感知中信号的稀疏表示和稀疏重构问题本质是一个稀疏优化问题, 该问题是要从满足欠定方程组约束的无穷多解中找到稀疏度最大的解. 鉴于此, 提出一种基于变量约简求解压缩感知中稀疏优化问题的算法 (VRSO), 变量约简从欠定方程组约束中挖掘出变量关系, 将变量分为核心变量和约简变量并用核心变量表示约简变量, 通过设置核心变量中元素为 0, 将求解整个变量解空间上的最小化问题简化为求解约简变量解空间上的最小化问题. 所提出算法通过原子与观测信号的内积大小对核心变量集合进行迭代更新, 并找出优化问题的 1 组稀疏解. 实验结果表明, 所提出算法的重构误差和稀疏度误差优于匹配追踪算法、正交匹配追踪算法、迭代硬阈值算法等 5 种所选的对比算法, 所求解的信号精度更高、稀疏度更好.

关键词: 变量约简; 智能优化; 稀疏优化; 信号重构; 重构误差; 稀疏度误差

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1735

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 伍国华, 张雯菲, 毛成辉, 等. 一种基于变量约简的稀疏优化算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(6): 1550-1558.

A sparse optimization algorithm based on variable reduction

WU Guo-hua, ZHANG Wen-fei, MAO Cheng-hui[†], SONG Ai-juan

(School of Traffic and Transportation Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Compressed sensing provides an effective support for processing large scale signal data. The problem of sparse signal representation and sparse signal reconstruction in compressed sensing is essentially a sparse optimization problem, which aims to find the sparsest solution from the infinite solutions that satisfy the constraint of underdetermined system of equations. This paper proposes an algorithm based on variable reduction to solve the sparse optimization problem in compressed sensing (VRSO). Variable reduction extracts the relationships between variables from the constraint of the underdetermined system of equations, and divides variables into core variables and reduced variables. During the calculation, the core variables are always used to represent the reduced variables. By setting the elements in the core variables to be 0, the minimization problem in the whole variable solution space is simplified to the solution space of reduced variables. This algorithm updates core variables in terms of the inner product of atoms and observation signal, so as to find a group of sparse solutions. According to the experimental results, the reconstruction error and sparsity error of VRSO are better than other comparative algorithms such as matching pursuit, orthogonal matching pursuit and iterative hard thresholding. The results show that the signal obtained by VRSO has higher precision and better sparsity.

Keywords: variable reduction; intelligent optimization; sparse optimization; signal reconstruction; reconstruction error; sparsity error

0 引言

压缩感知^[1-2]是一种基于信号的稀疏特性,将源信号压缩采样存储传输后,通过重构算法重建和恢复原始信号的新型采样理论.其中信号的稀疏特性是指,只要信号是稀疏的或者是可压缩的(即在某个空间内具有稀疏性),便可以从少量的观测信号中恢复

原始信号.近年来,压缩感知理论在信号处理^[3]、图像识别^[4]等领域均有广泛应用.压缩感知理论主要包括 3 部分:信号的稀疏表示、观测矩阵以及信号的稀疏重构.

信号的稀疏表示^[5-6]主要研究两方面内容:一是字典构建方法,二是稀疏分解算法.字典构建方法^[7-8]

收稿日期: 2020-12-12; 录用日期: 2021-04-02.

基金项目: 湖南省自然科学基金杰出青年基金项目(2019JJ20026); 国家自然科学基金项目(62073341).

责任编辑: 陈家伟.

[†]通讯作者. E-mail: mchh99@csu.edu.cn.

通过构造信号的稀疏表示域(字典矩阵)使其满足可压缩性,现有方法可以分为分析字典和学习字典.稀疏分解算法是基于给定的过完备字典^[9]并从中选择与信号结构相似的原子对信号进行稀疏分解,得到信号更为简洁的表示方式.信号的稀疏分解问题实质上是一类稀疏优化问题,观测矩阵^[10]的选择要满足有限等距性质(restricted isometry property, RIP)^[11]条件,即保证原空间与稀疏空间的一一映射关系.信号的稀疏重构^[12]通过感知矩阵和少量的观测信号恢复原始信号所携带的全部信息,重构算法是得到原始稀疏信号的关键步骤,也是压缩感知的问题核心.信号稀疏重构后的重构信号与真实信号之间的误差可以评估重构算法的精度.重构信号的恢复问题实质上也是在求解一类稀疏优化问题,运用稀疏优化算法求解出最接近真实稀疏度水平和逼近原始稀疏信号的重构信号.

压缩感知中的一个基本问题是找到具有多个解的欠定线性方程中的稀疏解,其中稀疏解指在所有解中具有最少的非零元素的解.寻找稀疏解涉及到的稀疏优化问题^[10]如下所示:

$$\begin{aligned} \min & \|x\|_0; \\ \text{s.t.} & Ax = y. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: A 是大小为 $m \times n$ 的过完备字典矩阵; y 为观测向量,且 $y \in R^m$; x 为 n 维信号向量,也是观测向量 y 在过完备字典上进行稀疏分解后的信号, $m \ll n$; $\|x\|_0$ 为其中非0元素的数量.

在稀疏优化领域中,典型的寻找稀疏解的稀疏优化算法包括贪婪算法、阈值迭代类算法和凸优化方法.贪婪算法是一种基于 l_0 范数最小化的稀疏优化算法,通过每步迭代选择合适的原子逐步向信号逼近.求解稀疏优化问题的贪婪算法主要有匹配追踪(MP)算法^[13]和正交匹配追踪(OMP)算法^[14-15],以及在此基础上改进的压缩采样匹配追踪(CoSAMP)算法^[16]、分段式正交匹配追踪(StOMP)算法^[17-18]和正则化正交匹配追踪(ROMP)算法^[19]等.阈值迭代类算法通过梯度类算法和阈值函数对信号进行处理,主要有迭代硬阈值类(IHT)算法^[20-21]和迭代软阈值(ISTA)算法^[22].凸优化算法^[23-27]则是通过将非凸的 l_0 范数最小化的NP难问题转化为一个 l_1 或 l_2 范数最小化的凸优化问题,凸优化算法的算法性能表现较好,但是需要更高的计算复杂度.此外,使用 l_2 范数代替 l_0 范数时,会增强噪声数据的干扰,使算法鲁棒性较差,不能够很好地保证解的稀疏性.在寻求稀疏解的算法中,除上述单目标算法,还有不少算法将

该单目标的系数优化问题转化为多目标问题后,再运用求解多目标问题的粒子群算法^[28-29]根据帕累托最优解求得稀疏解,比如基于拐点的多目标粒子群(KnMOPSO)算法^[29]就是通过寻找帕累托前沿的局部区域——拐点区域的解,再综合多次实验结果得到满意解,从而快速解决稀疏优化问题.

求解压缩感知中的稀疏优化问题实质是求解一个欠定线性等式方程组,字典矩阵或感知矩阵即为方程组的系数矩阵,其中各个列向量称为该矩阵的原子.变量约简策略^[30-32]利用优化问题的等式最优性条件,从约束条件中找到变量之间的关系,用一部分变量(核心变量)表示另一部分变量(约简变量),从而达到变量约简的效果.该线性方程组中的等式约束条件可以很好地满足变量约简策略中的等式最优性条件,因此,可以将信号中的变量元素分解为核心变量和约简变量,通过线性约束条件将约简变量在算法运行的过程中始终用核心变量表示,这样找到的原始稀疏信号具有较高的精度.根据稀疏信号的稀疏特性,将核心变量的值设置为0后,求解原始信号元素的 l_0 范数最小化问题转化为求解约简变量的 l_0 范数最小化问题.

本文在分析稀疏优化问题线性等式约束条件和稀疏特性的基础上,进行如下创新:

1) 针对稀疏优化问题中的线性等式约束条件,提出将变量约简策略应用于解决稀疏优化问题,不是直接对等式约束条件进行精确求解,而是通过利用等式约束条件提取变量关系,实现变量和等式约束的约简,从而提高重构信号的精度.

2) 设计基于变量约简策略的稀疏优化算法(VRSO),根据信号与各个原子的相关项大小进行核心变量中元素的迭代更新,并设计一个随机选择算子帮助跳出局部最优解,从而具备稀疏解的全局搜索能力.通过其他5种对比算法(MP算法、OMP算法、IHT算法、ROMP算法以及多目标粒子群(KnMOPSO)算法)进行对比实验,验证了VRSO算法的重构误差较小,重构精度高,稀疏性较好.

1 基于 l_0 范数的传统稀疏优化算法

1.1 基于 l_0 范数的贪婪算法求解稀疏优化问题

基于 l_0 范数的稀疏优化问题实际是一个NP难问题,无法快速求解出精确解,而是通过近似算法求得一个近似解.贪婪算法是一种常见的近似算法,在计算过程中操作简便,易于实施.贪婪算法的核心思想是在问题的每步迭代过程中均选择当前状态下的最优选择(即局部最优解),通过每次迭代的局部最优

解逐渐逼近整体最优解. 运用MP算法或OMP算法求解信号的稀疏表示就是基于 l_0 范数的贪婪算法求解稀疏优化问题. 稀疏表示问题是在过完备字典上对信号进行稀疏分解, 然后得到一个稀疏信号, 该稀疏信号能够表示原信号且稀疏信号中的非0元素尽可能少, 如式(1)所示.

在信号稀疏分解中, MP算法通过计算过完备字典中的原子与信号 y 的内积, 挑选出与信号 y 最匹配的原子加入支撑集, 然后更新信号 y 的残差并不断迭代, 直至满足终止条件. 内积的绝对值大小可以表示一个向量在另一个向量单位方向上的投影长度, 因此, 原子与信号 y (或残差) 内积的绝对值越大, 表明该原子越能够逼近信号 y , 即该原子能够越好地表示信号 y . MP算法在运行中存在的问题是只能保证当前迭代步骤下信号 y 的残差与当前的原子满足正交条件, 而与支撑集中其他原子可能并不正交, 因此, 需要较多的原子才能够很好地表示信号. 当没有准确的稀疏度水平作为先验条件时, 通过MP算法进行稀疏分解后得到的信号稀疏性水平较差; 当存在准确的稀疏度水平作为先验条件时, 稀疏分解后的信号对原信号的表示情况也会不太理想.

OMP算法也通过内积选择加入支撑集的原子, 但是OMP算法相对MP算法最主要的不同在于, OMP算法在每次迭代中均会对已确定的原子集合进行正交化处理, 因此OMP算法往往能够满足真实的稀疏度水平, 比MP算法具有更大的优势. ROMP算法^[19]是对OMP算法的改进, 其在进行原子选择时, 首先选择 K 个与残差内积绝对值最大的原子, 然后对选出的 K 个原子按照正则化标准再进一步筛选确定加入支撑集的原子, 从而实现原子的有效快速选择. OMP算法在选择原子添加到支撑集时, 每次只会选择1个原子, 但ROMP算法每次添加到支撑集中的原子一般并非只有1个.

总体而言, 贪婪算法在求解稀疏优化问题时具有较快的重建速度, 但重建精度相对较低, 同时贪婪算法通常需要准确的稀疏度作为先验条件, 限制了其应用范围.

1.2 基于 l_0 范数的IHT算法求解稀疏优化问题

IHT算法是一类求解重构信号的算法, 主要包括梯度下降、正则化参数设置和阈值截断^[28]3个步骤, 且需要预先提供真实稀疏度 K , 或者正则化参数的经验值. 该算法由一个优化问题推导出来, 表达式为

$$\begin{aligned} \min & \|b - Ax\|_2^2; \\ \text{s.t.} & \|x\|_0 \leq K. \end{aligned} \quad (2)$$

IHT算法通过梯度下降的方式进行迭代, 其迭代运算如下:

$$x_{n+1} = H_K(x_n + \mu \cdot A^T(b - Ax_n)). \quad (3)$$

其中: μ 为每次迭代的步长, 一般设置为1; $H_K(x_i)$ 为一个硬阈值函数, 通过该函数进行阈值截断, 有

$$H_K(x_i) = \begin{cases} 0, & |x_i| < T; \\ x_i, & |x_i| \geq T. \end{cases} \quad (4)$$

T 是一个正则化参数, 为 $x_k + A^T(y - Ax_k)$ 的绝对值通过降序排列后第 K 个值的大小, 即通过硬阈值函数截取最大的前 K 个非零元素, 且直接将第 $K+1$ 个及其以后的元素设置为0.

在实际的信号重构问题中, x 是稀疏度为 K 、大小为 $n \times 1$ 的原信号; b 是大小为 $m \times 1$ 的观测信号, 通过物理观测手段可以获得; A 是大小为 $m \times n$ 的感知矩阵. 通过感知矩阵 A 和观测信号 b , 可以采用一定的重构算法恢复原信号 x , 其中 x_0 为满足稀疏度是 K 、 $Ax_0 = b$ 的稀疏信号. 在压缩感知中, 通过压缩采样的方式将一个长度为 n 的稀疏信号压缩成长度为 m 的压缩信号, 且压缩信号的长度 m 小于原信号的长度 n , 在压缩信号被传感器采集并传输后, 通过稀疏重构方式恢复原始信号. IHT算法在使用硬阈值函数构造真实稀疏度水平下的恢复信号时, 需要将稀疏度水平作为先验条件, 其重建速度较快, 但重建精度相对较低.

2 基于变量约简的稀疏优化算法

2.1 变量约简思想

变量约简^[30]利用优化问题的等式最优性条件, 根据变量之间的关系在算法迭代过程中始终用一部分变量表示和计算另一部分变量, 从而实现变量个数和解空间维度的约简, 提高算法的搜索效率. 变量约简在概念上与维度约简^[33]和变量消除^[34]相近, 但是在内涵上存在显著差异. 维度约简是机器学习领域中的一个重要研究方向, 主要通过去除高维特征数据集集合中的冗余特征降低数据计算空间, 是机器学习中一种处理数据的方法, 与优化问题求解并无直接关系. 变量消除是有助于提高约束满足问题搜索和剪枝效率的一项技术, 只针对离散空间的搜索, 其时间、空间复杂度随问题规模指数增长, 应用范围有限. 因此, 变量约简策略与维度约简和变量消除在方法机制、使用方式以及适用范围方面均存在本质不同.

在变量约简中, 表示其他变量的变量为约简变量, 被其他变量表示的变量为核心变量. 例如对于优化问题 $\min f = x_1^2 + x_1 \sin x_2$, 其解空间如图1(a)所

示,将问题的一阶偏导数作为等式最优性条件^[30],得到变量 x_1 与 x_2 之间的变量关系为

$$2x_1 + \sin x_2 = 0, \tag{5}$$

$$x_1 \cdot \cos x_2 = 0. \tag{6}$$

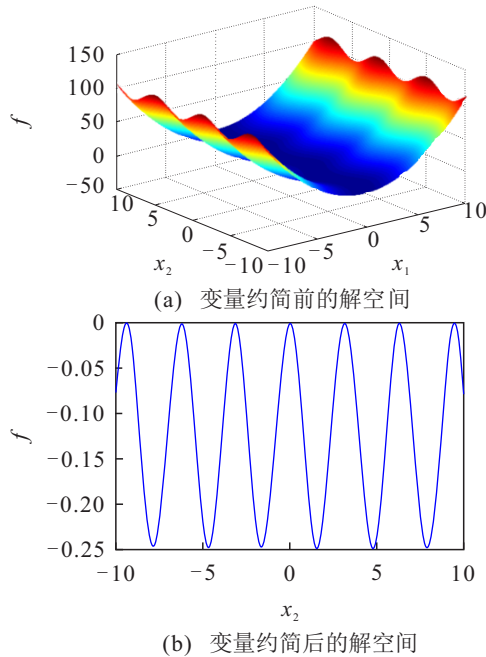


图1 变量约简对解空间维度的约简效果

由式(5)的条件可以得到变量之间的关系为 $x_1 = -0.5 \sin x_2$, 该问题中变量分为两部分,分别是核心变量 x_2 和约简变量 x_1 . 在优化问题的求解过程中,只需要搜索核心变量 x_2 ,原问题的解空间得到了约简,如图1(b)所示.

在稀疏优化问题中,由字典矩阵(或感知矩阵)各个系数所构成的线性等式约束条件即为优化问题的等式最优性条件.在变量约简过程中,原始信号中的元素被分为核心变量和约简变量两部分,因此,基于范数约束的稀疏优化问题也可以转化为如下形式:

$$\begin{aligned} \min & \|x\|_0; \\ \text{s.t.} & A_{\text{re}} \cdot x_{\text{re}} + A_{\text{co}} \cdot x_{\text{co}} = b. \end{aligned} \tag{7}$$

不失一般性,可以令

$$A_{\text{re}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$A_{\text{co}} = \begin{bmatrix} a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & \dots & a_{1n} \\ a_{2,m+1} & a_{2,m+2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

其中: x_{re} 和 x_{co} 分别为约简变量和核心变量, A_{re} 和

A_{co} 分别为核心变量和约简变量对应的系数矩阵.因此,约简变量表示为

$$x_{\text{re}} = (A_{\text{re}})^{-1}(b - A_{\text{co}}x_{\text{co}}). \tag{10}$$

求解稀疏优化问题的 l_0 范数最小值时,考虑到稀疏解的特殊性,可以规定所选取的核心变量集合中元素的值均设置为0,此时优化问题转化为考虑约简变量元素 $\|x_{\text{re}}\|_0$ 最小的情况.通过迭代变化核心变量中的元素,能够找到稀疏优化问题的最优解,因此,提出一种基于变量约简的稀疏优化算法(VRSO).

2.2 基于变量约简的稀疏优化算法

变量约简的思想可以令稀疏优化问题在求解过程中能够较好地满足约束条件,因此在压缩感知中,通过VRSO算法求得的信号具有很好的精度.VRSO算法的关键就是如何确定核心变量集合中的元素.在OMP算法中,内积绝对值越大的原子表示残差在原子方向上的投影长度越长,即原子与残差的相关性越大,反之相关性越小.当核心变量集合中的元素均为与残差相关性较小的原子,约简变量集合中的元素均为与残差相关性较大的原子时,算法能够尽快找到稀疏解.OMP算法在选择支撑集时,均通过每一步的局部最优解逼近全局最优解,这样可能会陷入局部最优的情况.因此,VRSO算法在确定支撑集 A_{rela} 时,设置一个随机选择算子 L ($0 \leq L \leq 1$) 帮助跳出陷入局部最优的情况, L 值越大,表示与残差内积最大的原子被选择加入支撑集的概率越大.在本算法中,基于选择算子 L 的支撑集更新操作如下:

$$A_{\text{rela}} = \begin{cases} a_i, & l \leq L; \\ a_j, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{11}$$

其中: l 为随机数,满足 $0 \leq l \leq 1$; a_i 和 a_j 分别为与残差内积最大和次大的原子.当满足条件 $l \leq L$ 时,选择原子 a_i 加入支撑集,反之选择原子 a_j 加入支撑集.当选择算子 L 设为1时,表示总是选择与残差内积最大的原子加入支撑集.

VRSO算法首先通过计算标准化处理后的感知矩阵和观测信号的内积 w 生成初始解 X_0 ,并计算出初始稀疏度水平 k_0 .内积用于计算一个矢量在一个方向上的投影长度,该方向的矢量需要为单位矢量,因此需要先对感知矩阵 A 进行标准化处理,使得到的 $\|A_{\text{new}}\|=1$.基于内积的意义,在核心变量的选取过程中可以选取内积尽可能小的变量加入核心变量集合中.在确定核心变量集合后,通过式(10)可以得到约简变量集合,从而得到初始解 X_0 .

基于变量约简的稀疏优化算法具体实现过程如

下. 其中:输入变量为感知矩阵 A 、观测信号 b 、原始信号长度 N 、观测信号长度 M 和选择算子 L , 输出变量为重构信号 X_{new} 和稀疏度水平 k_k .

step 1: 感知矩阵 A 标准化处理得到新的矩阵 A_{new} , 设置初始残差值 $r = b$, 计算内积 $w = (A_{\text{new}})r$.

step 2: 对内积 w 进行排序, 选出 w 最小的 $N - M$ 个值所对应的变量作为核心变量, 将核心变量下标记录在核心变量集合 coindex 中, 剩余的 M 个变量记为约简变量, 将约简变量下标记录在约简变量集合 reindex 中.

step 3: 生成初始解 X_0 , 并得到初始稀疏度水平 k_0 .

step 4: 找出内积 w 较大的 2 个原子, 通过选择算子 L 进行选择操作, 将选定的原子加入支撑集 A_{rela} , 将该原子对应的变量添加到集合 X_{rela} 中.

step 5: 运用最小二乘法求解出观测信号 b 在所支撑集中各原子方向上的投影长度所构成的集合 $L_P = (A_{\text{rela}}^T \cdot A_{\text{rela}})^{-1} \cdot A_{\text{rela}}^T \cdot b$, 更新残差为 $r = r - A_{\text{rela}} \cdot L_P$.

step 6: 根据所确定的核心变量和约简变量, 将 A_{new} 分解为核心变量感知矩阵 $A_{\text{co}_{\text{new}}}$ 和约简变量感知矩阵 $A_{\text{re}_{\text{new}}}$, 并更新矩阵 $A_{\text{re}_{\text{new}}}$ 使其满足条件 $A_{\text{re}_{\text{new}}} \cap A_{\text{rela}} = \emptyset$. 若此时矩阵 $A_{\text{re}_{\text{new}}}$ 为空, 则结束计算; 若不为空, 则计算内积 $w = (A_{\text{re}_{\text{new}}})^T r$ 和内积 $v = (A_{\text{co}_{\text{new}}})^T r$.

step 7: 对 w 和 v 进行排序, 将 $\min(w)$ 对应的变量 inpre 从约简变量转换为核心变量, 将 $\max(v)$ 对应的变量 outpre 从核心变量转换为约简变量.

step 8: 更新 reindex 、 coindex 和 w , 并对 w 重新排序.

step 9: 计算此时的解 X_{new} 和稀疏度水平 k_k .

step 10: 循环 step 4 ~ step 9, 直至满足循环次数达到 M 次或满足稀疏度水平 $k_k < k_0$, 终止循环.

在上述算法中, step 4 ~ step 7 是进行残差更新和核心变量集合中元素的迭代变换处理, 每次均选择与当前残差的內积最差的约简变量集合中的元素转换为核心变量, 选择与当前残差的內积最好的核心变量集合中的元素转换为约简变量.

基于变量约简对线性等式约束条件的处理, 通过 VRSO 算法生成的解 X_{new} 能够很好地满足约束条件, 即 $\|A \cdot X_{\text{new}} - b\|$ 的值会尽可能小, 因此, 通过该算法求出的稀疏解也会具有较高的精度. 当该算法求得信号的稀疏度水平比初始稀疏度水平下降时, 根据 RIP 条件所保证的原空间和稀疏空间的一一映射关

系, 算法可以提前收敛, 即满足 step 10 中循环终止的条件, 否则算法需要循环迭代 M 次才能结束当前运行, 并输出本次运行找到的解.

VRSO 算法在进行重构信号的求解时, 首先通过 step 1 ~ step 3 基于变量约简策略生成初始解, 该阶段的时间复杂度用 T_1 表示, 且满足

$$T_1 = 2m^2; \quad (12)$$

然后 VRSO 算法通过 step 4 ~ step 9 迭代更新寻找稀疏解, 主要包括运用最小二乘法求解观测信号在原子方向上的投影长度, 本阶段的时间复杂度用 T_2 表示, 且满足

$$T_2 = O(m^3). \quad (13)$$

因此, VRSO 算法在求解重构信号时的时间复杂度 T 可以表示为

$$T = O(\max(2m^2, O(m^3))) = O(m^3). \quad (14)$$

3 实验验证与分析

3.1 问题描述和实验设置

实验选取 9 个稀疏优化测试问题 (SOTF)^[35], 每个测试问题的具体特征如表 1 所示.

表 1 稀疏优化测试问题的具体特征和稀疏度水平

| 问题名称 | 原始信号长度 N | 观测信号长度 M | 实际稀疏度 K |
|--------|------------|------------|-----------|
| SOTF 1 | 50 | 30 | 13 |
| SOTF 2 | 50 | 27 | 13 |
| SOTF 3 | 50 | 24 | 13 |
| SOTF 4 | 512 | 300 | 130 |
| SOTF 5 | 512 | 270 | 130 |
| SOTF 6 | 512 | 240 | 130 |
| SOTF 7 | 5 120 | 3 000 | 1 300 |
| SOTF 8 | 5 120 | 2 700 | 1 300 |
| SOTF 9 | 5 120 | 2 400 | 1 300 |

测试问题集中的 9 个稀疏优化问题均为无噪声干扰问题, 并且均给定了符合 RIP 条件的感知矩阵 A 和观测信号 b . 问题 SOTF 1 ~ SOTF 3 是原始信号长度为 50、实际稀疏度为 13 的稀疏优化问题; 问题 SOTF 4 ~ SOTF 6 是原始信号长度为 512、实际稀疏度为 130 的稀疏优化问题; 问题 SOTF 7 ~ SOTF 9 是原始信号长度为 5 120、实际稀疏度为 1 300 的稀疏优化问题.

在 IHT 算法中, 设置迭代步长 $\mu = 1$. 在 VRSO 算法中, 由于随机选择算子 L 可以跳出局部最优, 本次实验中设置 $L = 0.7$. 实验选用 OMP 算法^[14]、MP 算法^[13]、IHT 算法^[20]、ROMP 算法^[19] 和 KnMOPSO 算法^[29] 作为对比算法. 为保证实验结果的可靠性, 每个算法在每个问题上运行 30 次, 并通过计算重构误差 RE (reconstruction error) 和稀疏度误差 SE (sparsity

error)对比评估算法的性能,其中

$$RE = \|X_{\text{new}} - x_{\text{true}}\|, \quad (15)$$

$$SE = |k_k - K|. \quad (16)$$

3.2 实验结果与分析

在OMP算法、MP算法、IHT算法和ROMP算法中,均需要将给定的实际稀疏度水平 K 作为先验条件求解原始信号,才能够得出相对较稀疏的原信号.而在VRSO算法中,可以不将真实原始信号 x_{true} 和

真实稀疏度水平 K 作为先验条件,真实稀疏度水平 K 只运用于计算稀疏度误差和评估算法的有效性.KnMOPSO算法虽然也不需要真实稀疏度水平 K 作为先验条件,但是多目标优化算法的求解过程相对复杂.

对所选的9个稀疏优化测试问题进行对比实验,OMP算法、MP算法、IHT算法、ROMP算法、KnMOPSO算法以及VRSO算法在各个问题的重构误差和稀疏度误差情况如表2所示.

表2 各算法实验结果情况对比

| 问题名称 | OMP算法 | | MP算法 | | IHT算法 | | ROMP算法 | | KnMOPSO算法 | | VRSO算法 | |
|--------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|-----------|-------|----------|-------|
| | 重构误差 | 稀疏度误差 | 重构误差 | 稀疏度误差 | 重构误差 | 稀疏度误差 | 重构误差 | 稀疏度误差 | 重构误差 | 稀疏度误差 | 重构误差 | 稀疏度误差 |
| SOTF 1 | 1.74e+00 | 0 | 5.25e+00 | 1 | 2.08e+00 | 0 | 4.75e-14 | 0 | 1.86e+00 | 0 | 1.42e-14 | 0 |
| SOTF 2 | 2.36e+00 | 0 | 5.24e+00 | 2 | 6.86e+00 | 0 | 8.08e+00 | 14 | 1.52e+00 | 1 | 9.74e-15 | 0 |
| SOTF 3 | 2.70e+00 | 1 | 3.07e+00 | 0 | 5.36e+00 | 0 | 3.43e+00 | 11 | 2.50e+00 | 1 | 5.82e-15 | 0 |
| SOTF 4 | 5.11e+00 | 0 | 1.33e+01 | 17 | 1.55e-03 | 0 | 2.23e+01 | 158 | 2.96e-01 | 5 | 5.13e-13 | 0 |
| SOTF 5 | 5.60e+00 | 0 | 1.48e+01 | 16 | 8.39e+00 | 0 | 1.40e+01 | 126 | 2.63e+00 | 6 | 2.42e-13 | 0 |
| SOTF 6 | 1.02e+01 | 1 | 1.65e+01 | 15 | 1.43e+01 | 0 | 2.45e+01 | 55 | 9.11e+00 | 2 | 3.99e-13 | 0 |
| SOTF 7 | 1.69e+01 | 1 | 4.70e+01 | 211 | 3.58e-03 | 0 | 7.31e+01 | 1337 | 3.60e+00 | 149 | 3.46e-11 | 0 |
| SOTF 8 | 2.08e+01 | 1 | 5.10e+01 | 142 | 2.41e+01 | 0 | 8.09e+01 | 926 | 1.46e+01 | 458 | 7.82e-11 | 0 |
| SOTF 9 | 3.03e+01 | 1 | 4.80e+01 | 67 | 4.09e+01 | 0 | 1.73e+02 | 1086 | 2.12e+01 | 132 | 4.68e-11 | 0 |

由表2可见,VRSO算法在问题SOTF 1~SOTF 9中均有较好的表现,并且VRSO算法和IHT算法在这9个问题上的稀疏度误差均为0. IHT算法使用梯度下降和阈值截断操作恢复原始信号,将实际稀疏度水平 K 当作先验条件,在实验过程中通过截断选择满足实际稀疏度水平的 K 个元素,并且使用硬阈值函数直接令剩下的元素均为0.通过IHT算法恢复的信号虽然能够满足实际稀疏度水平,但是重构误差可能会很大.正如稀疏优化问题2所示,IHT算法求解得到的信号的重构误差为6.86e+00,而基于变量约简的稀疏优化算法的重构误差仅为9.74e-15,且随着信号长度的增加,IHT算法的重构误差也随之增大.

MP算法与OMP算法进行信号重构的思想比较相似.OMP算法对原子的正交化处理使得OMP算法的稀疏度误差比MP算法小得多.OMP算法的性能略优于MP算法,但是这两种贪婪算法的重构误差均较大.不难看出,VRSO算法求解的重构误差和稀疏度误差均明显优于MP算法.与VRSO算法相比,OMP算法只能够在信号长度较小时找到稀疏度水平较好的解,但是解的精度也存在不足.在稀疏优化问题5中,OMP算法和VRSO算法的解均具有很好的稀疏性,但是OMP算法的重构误差为5.60e+00,而VRSO算法仅为2.42e-13.随着信号长度增加,OMP算法的重构精度会随之降低,而VRSO算法仍然能够保持较好的重构精度.

ROMP算法的重构效果在这几种算法中相对

较差,特别是与VRSO算法相比,ROMP算法实验结果的重构误差和稀疏度误差均大于VRSO算法.ROMP算法在进行原子选择时并非每次只选择1个原子,虽然能够提高重构速度,但是重构精度不高.KnMOPSO算法在问题SOTF 1~SOTF 6上的重构结果优于问题SOTF 7~SOTF 9,即该算法在小规模重构问题上的效果优于大规模重构问题.随着重构问题的规模增大,KnMOPSO算法的稀疏度误差大于VRSO算法,由于多目标算法寻找优化解时并不仅仅是以解的稀疏性为目标,KnMOPSO算法寻找稀疏解的能力较弱.但是VRSO算法在使用变量约简策略后,约简变量与核心变量之间的变量关系能够保证算法在寻找稀疏解的过程中有较高的精度,特别是对于规模较大的问题SOTF 7~SOTF 9,VRSO算法依然能够找到重构误差较小的稀疏解.

以稀疏优化问题2、问题5和问题8为例,各算法在一次典型运行中取得的原始信号和实际原始信号的匹配情况如图2~图4所示.

在图2~图4中,横坐标表示稀疏信号索引,纵坐标表示稀疏信号值,符号“o”为通过各算法求解得到的重构信号,符号“+”为测试问题中给定的实际原始信号,根据这两个符号的重合程度可以直观地看出重构信号与原始信号的匹配情况.

由图2~图4可见,在稀疏优化问题2上重构效果最好的是VRSO算法,其次是OMP算法,其他几种算法的重构结果相对不佳.VRSO算法求解的重构

信号能够较好地匹配原始信号,而在OMP算法中,求得解中值为0的元素匹配情况较优,非0元素虽然不能完全匹配,但是也基本靠近原始信号.稀疏优化问题5的规模和稀疏度水平相对于问题2有一定的增加,由图3可见,VRSO的重构效果依然能够很好地保持,其他几种算法的重构信号匹配情况较差.在稀疏优化问题5上,KnMOPSO算法的匹配效果相对于OMP算法、MP算法、IHT算法和ROMP算法较优,但是重构效果不如VRSO算法.随着问题规模的

进一步扩大,在稀疏优化问题8上,VRSO算法依然能够取得很好的重构效果.通过稀疏优化测试问题的实验结果可以看出,在求解同一个稀疏优化问题时,VRSO算法求解的稀疏解较优,其重构误差和稀疏度误差较小.当问题规模逐渐扩大时,VRSO算法的求解效果没有受到显著影响,所求得的重构信号仍然能够具有较好的精度,算法稳定性和可扩展性较好.

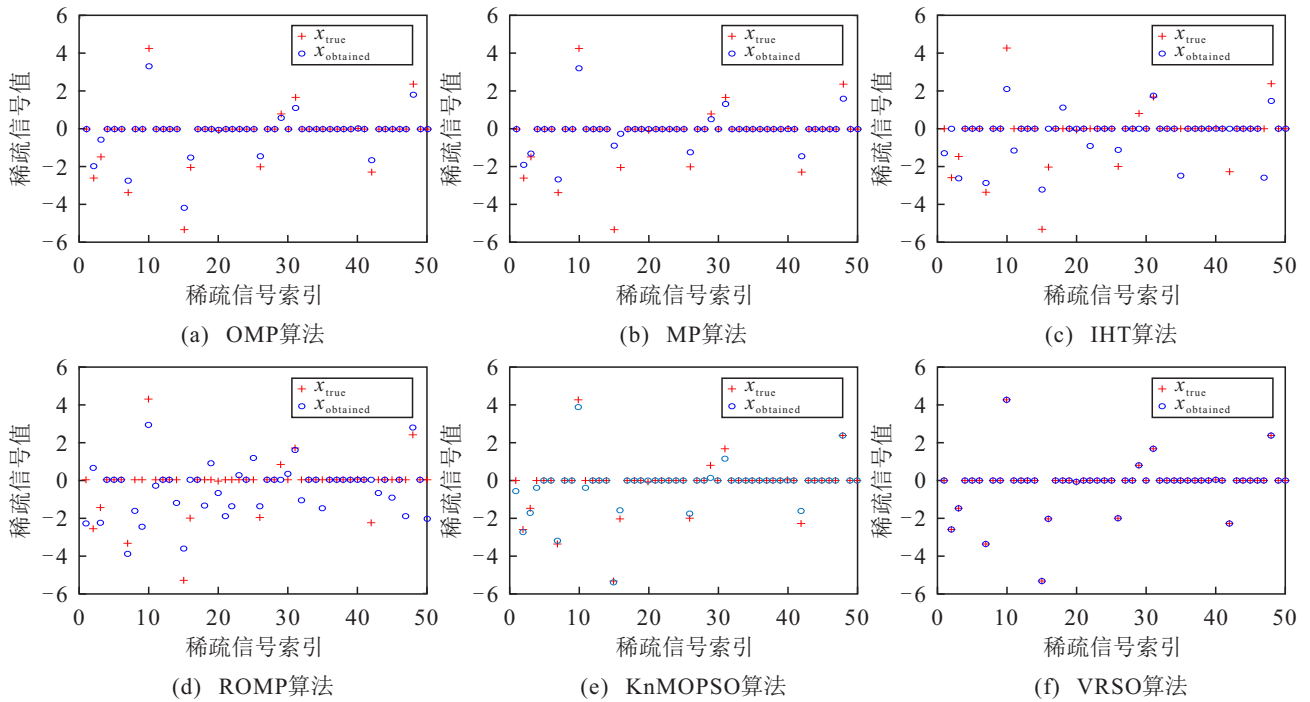


图2 稀疏优化问题2实验结果

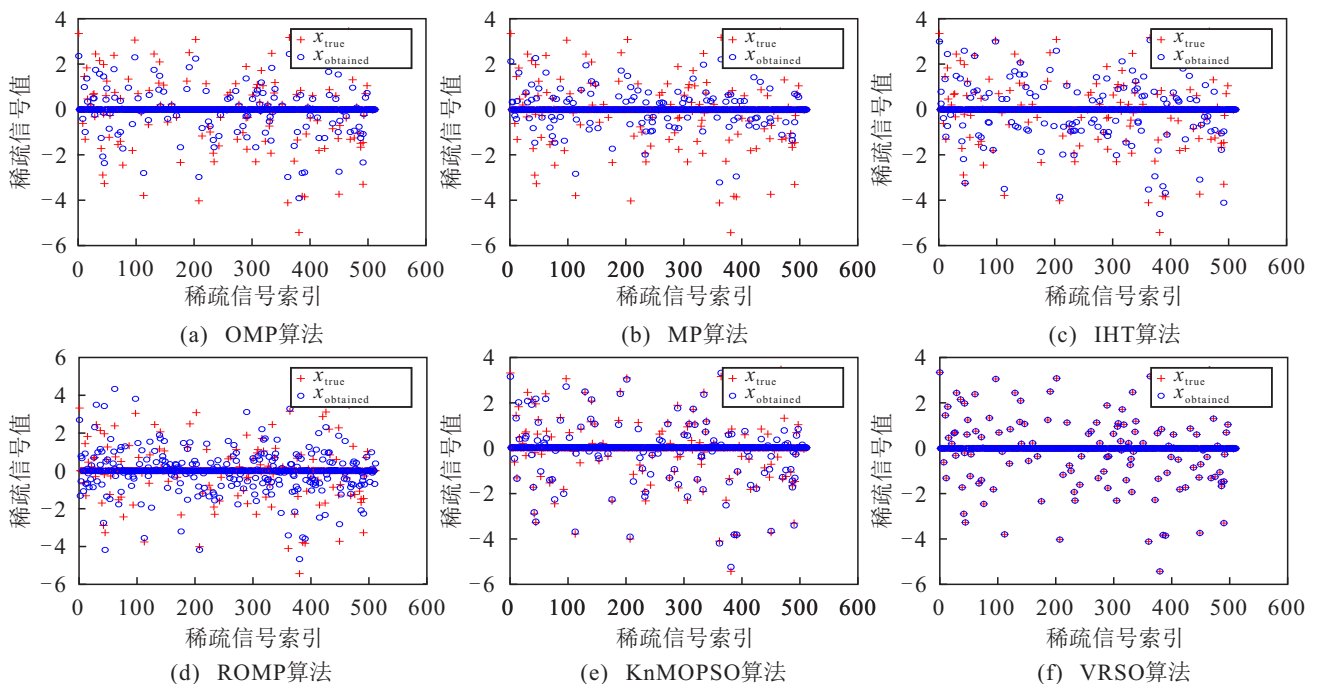


图3 稀疏优化问题5实验结果

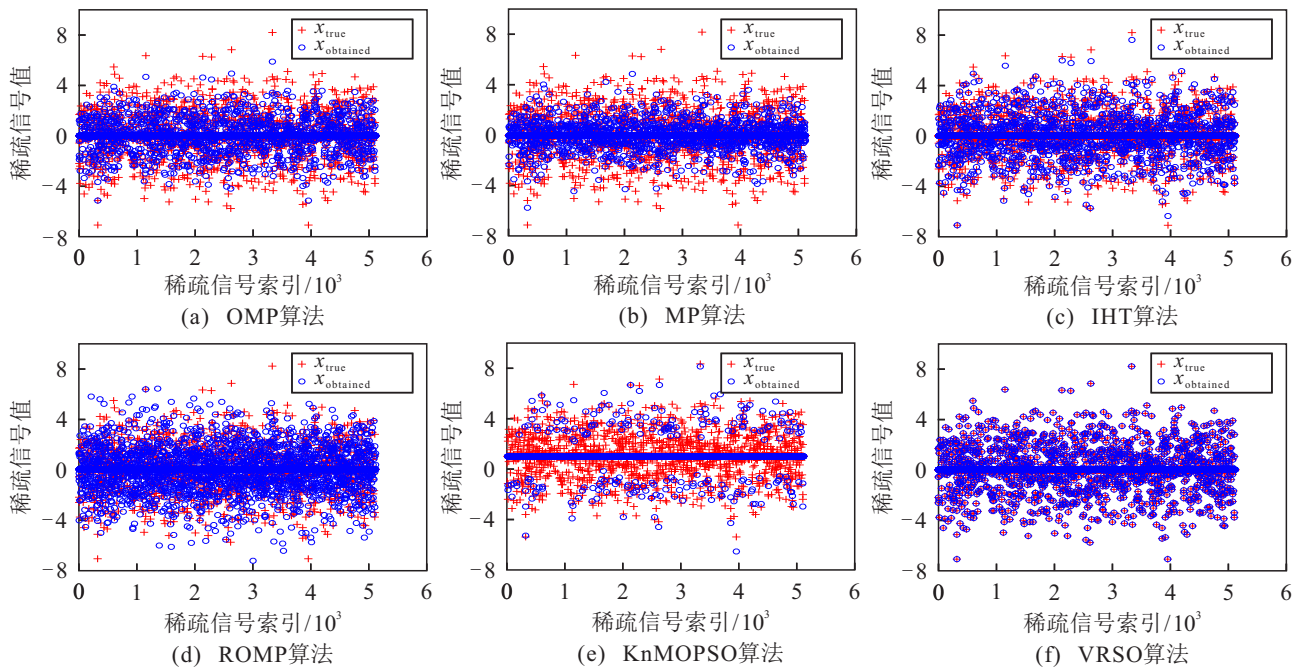


图4 稀疏优化问题8实验结果

4 结论

本文根据压缩感知中稀疏优化问题的稀疏特性及等式最优性条件,运用变量约简的思想对稀疏优化问题进行求解,并设计了一种基于变量约简的稀疏优化(VRSO)算法.该算法通过核心变量和约简变量简化问题规模,提高求解的精度.通过在9个稀疏优化测试问题上的对比实验,验证了算法的有效性.与MP算法、OMP算法、IHT算法、ROMP算法和KnMOPSO算法相比,VRSO算法所恢复的原始信号具有更小的重构误差,与真实的原始信号更加匹配.同时VRSO算法在运行时无需将真实稀疏度水平作为先验条件,因此该算法的潜在应用范围更广,可以在图像去噪、信号处理等领域有很好的前景.

参考文献(References)

- [1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] 李树涛,魏丹.压缩传感综述[J].自动化学报,2009,35(11):1369-1377.
(Li S T, Wei D. A survey on compressive sensing[J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(11): 1369-1377.)
- [3] 杨震,徐珑婷.语音信号处理中鲁棒性压缩感知关键技术[J].数据采集与处理,2017,32(2):232-245.
(Yang Z, Xu L T. Key issues of robust compressed sensing in speech signal processing[J]. Journal of Data Acquisition and Processing, 2017, 32(2): 232-245.)
- [4] 王斌.基于稀疏表示和深度学习的图像识别算法及应用研究[D].合肥:中国科学技术大学,2018.
(Wang B. Research on image recognition algorithm based on sparse representation and deep learning[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2018.)
- [5] Mairal J, Bach F, Ponce J. Task-driven dictionary learning[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2012, 34(4): 791-804.
- [6] Temlyakov V. Nonlinear methods of approximation[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2003, 3(1): 33-107.
- [7] 余付平,冯有前,范成礼,等.基于主成分分析的字典学习[J].控制与决策,2013,28(7):1109-1112.
(Yu F P, Feng Y Q, Fan C L, et al. Dictionary learning based on principal component analysis[J]. Control and Decision, 2013, 28(7): 1109-1112.)
- [8] Engan K, Aase S O, Hakon H J. Method of optimal directions for frame design[C]. IEEE International Conference on Acoustics Speech, and Signal Processing. Piscataway: IEEE, 1999: 2443-2446.
- [9] Benetis R, Jensen C S, Karciauskas G, et al. Nearest neighbor and reverse nearest neighbor queries for moving objects[J]. Proceedings International Database Engineering and Applications Symposium. Piscataway: IEEE, 2002: 44-53.
- [10] 崔志华,张春妹,时振涛,等.基于蝙蝠算法的观测矩阵优化算法[J].控制与决策,2018,33(7):1341-1344.
(Cui Z H, Zhang C M, Shi Z T, et al. Measurement matrix optimization algorithm with bat algorithm[J]. Control and Decision, 2018, 33(7): 1341-1344.)
- [11] Cai T T, Wang L, Xu G W. New bounds for restricted isometry constants[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(9): 4388-4394.
- [12] Candes E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [13] Mallat S G, Zhang Z F. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on

- Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [14] Pati Y C, Rezaifar R, Krishnaprasad P S. Orthogonal matching pursuit: recursive function approximation with applications to wavelet decomposition[C]. Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. Piscataway: IEEE, 1993: 40-44.
- [15] 杨真真, 杨震, 孙林慧. 信号压缩重构的正交匹配追踪类算法综述[J]. 信号处理, 2013, 29(4): 486-496. (Yang Z Z, Yang Z, Sun L H. A survey on orthogonal matching pursuit type algorithms for signal compression and reconstruction[J]. Journal of Signal Processing, 2013, 29(4): 486-496.)
- [16] Chen P, Wang C, Meng C. Block compressive sampling matching pursuit based on restricted isometry property[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(2): 239-245.
- [17] 吴迪, 王奎民, 赵玉新, 等. 分段正则化正交匹配追踪算法[J]. 光学精密工程, 2014, 22(5): 1395-1402. (Wu D, Wang K M, Zhao Y X, et al. Stagewise regularized orthogonal matching pursuit algorithm[J]. Optics and Precision Engineering, 2014, 22(5): 1395-1402.)
- [18] Donoho D L, Tsai Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2): 1094-1121.
- [19] Needell D, Vershynin R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 310-316.
- [20] 张雁峰, 范西岸, 尹志益, 等. 基于回溯的共轭梯度迭代硬阈值重构算法[J]. 计算机应用, 2018, 38(12): 3580-3583. (Zhang Y F, Fan X A, Yin Z Y, et al. Backtracking-based conjugate gradient iterative hard thresholding reconstruction algorithm[J]. Journal of Computer Applications, 2008, 38(12): 3580-3583.)
- [21] Jiang Q R, De Lamare R C, Zakharov Y, et al. Knowledge-aided normalized iterative hard thresholding algorithms for sparse recovery[C]. The 26th European Signal Processing Conference(EUSIPCO). Piscataway: IEEE, 2018: 1965-1969.
- [22] Liu Y S, Zhan Z, Cai J, et al. Projected iterative soft-thresholding algorithm for tight frames in compressed sensing magnetic resonance imaging[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2016, 35(9): 2130-2140.
- [23] 吴文婷. 基于压缩感知的凸优化算法研究[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2013. (Wu W T. Research on convex optimization algorithm based on compressed sensing[D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2013.)
- [24] Jiang Y, Miao S W, Luo H Z, et al. Improved search algorithm for compressive sensing image recovery based on L_p norm[J]. Journal of Image and Graphics, 2017, 22(4): 435-442.
- [25] Zhou Y, Kwong S, Guo H N, et al. A two-phase evolutionary approach for compressive sensing reconstruction[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(9): 2651-2663.
- [26] Liu F, Lin L P, Jiao L C, et al. Nonconvex compressed sensing by nature-inspired optimization algorithms[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 45(5): 1042-1053.
- [27] Li L, Yao X, Stolkin R, et al. An evolutionary multiobjective approach to sparse reconstruction[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(6): 827-845.
- [28] Li H, Fan Y Y, Zhang Q F, et al. A multi-phase multiobjective approach based on decomposition for sparse reconstruction[C]. IEEE Congress on Evolutionary Computation: CEC, 2016: 601-608.
- [29] Yue C T, Liang J, Qu B Y, et al. A knee point driven particle swarm optimization algorithm for sparse reconstruction[C]. International Conference on Simulated Evolution and Learning, 2017: 911-919.
- [30] Wu G H, Pedrycz W, Suganthan P N, et al. A variable reduction strategy for evolutionary algorithms handling equality constraints[J]. Applied Soft Computing, 2015, 37: 774-786.
- [31] Wu G H, Pedrycz W, Suganthan P N, et al. Using variable reduction strategy to accelerate evolutionary optimization[J]. Applied Soft Computing, 2017, 61: 283-293.
- [32] Shen X, Wu G H, Wang R, et al. A self-adapted across neighborhood search algorithm with variable reduction strategy for solving non-convex static and dynamic economic dispatch problems[J]. IEEE Access, 2018, 6: 41314-41324.
- [33] Roweis S T. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding[J]. Science, 2000, 290(5500): 2323-2326.
- [34] Weispfenning V. Solving constraints by elimination methods[C]. Automated Reasoning. Berlin: Springer, 2004: 336-341.
- [35] Liang J J, Gong M, Li H, et al. Problem definitions and evaluation criteria for the CEC special session on evolutionary algorithms for sparse optimization[R]. Zhengzhou: Zhengzhou University, 2018.

作者简介

伍国华(1986—), 男, 教授, 博士, 从事智能优化与决策、机器学习、调度理论及应用、智能交通与物流系统等研究, E-mail: guohuawu@csu.edu.cn;

张雯菲(1996—), 女, 硕士生, 从事智能交通、智能优化算法的研究, E-mail: 503999473@qq.com;

毛成辉(1971—), 男, 副教授, 硕士, 从事交通运输规划与管理等研究, E-mail: mchh99@csu.edu.cn;

宋艾娟(1997—), 女, 硕士生, 从事计算智能、计划与调度的研究, E-mail: aijuansong@csu.edu.cn.

(责任编辑: 魏冰)