

控制与决策

Control and Decision

一阶多智能体受扰系统的自抗扰分布式优化算法

段书晴, 陈森, 赵志良

引用本文:

段书晴, 陈森, 赵志良. 一阶多智能体受扰系统的自抗扰分布式优化算法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(6): 1559–1566.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1572>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[基于免疫优化的平面Acrobot线性自抗扰鲁棒镇定](#)

Robust stabilization of planar Acrobot using linear active disturbance rejection control with immune optimization

控制与决策. 2020, 35(12): 3053–3058 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0289>

[丢包和量化约束下的不确定系统分布式滚动时域估计](#)

Distributed moving horizon estimation for stochastic uncertain system with packet dropouts and quantized measurements

控制与决策. 2021, 36(7): 1771–1778 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1603>

[基于神经网络的电力系统暂态稳定分布式自适应控制](#)

Neural network-based distributed adaptive control for power system transient stability

控制与决策. 2021, 36(6): 1407–1414 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1168>

[脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制](#)

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

控制与决策. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

[基于PID参数整定的线性自抗扰控制参数整定](#)

Tuning of linear active disturbance rejection controllers based on PID tuning rules

控制与决策. 2021, 36(7): 1592–1600 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1408>

一阶多智能体受扰系统的自抗扰分布式优化算法

段书晴, 陈 森, 赵志良[†]

(陕西师范大学 数学与统计学院, 西安 710119)

摘要: 研究一类具有未知外部干扰的一阶多智能体系统的分布式优化问题. 在分布式优化任务中, 每个智能体只被容许利用自己的局部目标函数和邻居的状态信息, 设计一个分布式优化算法, 使全局目标函数取得最小值, 其中全局目标函数是所有局部目标函数之和. 针对该问题, 首先提出由扩张状态观测器和优化算法组成的自抗扰分布式优化算法. 其次, 在 Lyapunov 稳定性的基础上发展新的方法, 对闭环系统的收敛性和稳定性进行严格的证明; 当外部干扰为常值时, 所设计的优化算法能使所有智能体的状态指数收敛到全局目标函数的最小值; 当外部干扰为有界干扰时, 通过调整扩张状态观测器的增益参数, 所设计的优化算法能使所有智能体的状态收敛到全局目标函数最小值的任意小的邻域内. 最后, 仿真结果表明了该优化算法的有效性.

关键词: 多智能体系统; 分布式优化; 干扰; 自抗扰控制; 扩张状态观测器; 优化算法

中图分类号: TP273

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1572

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 段书晴, 陈森, 赵志良. 一阶多智能体受扰系统的自抗扰分布式优化算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(6): 1559-1566.

Active disturbance rejection distributed optimization algorithm for first-order multi-agent disturbance systems

DUAN Shu-qing, CHEN Sen, ZHAO Zhi-liang[†]

(College of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

Abstract: The paper investigates a distributed optimization algorithm for a class of first-order multi-agent systems with unknown external disturbance. In the distributed optimization task, each agent is only allowed to use its own local cost function and the state information of its neighbors to design a distributed optimization algorithm, so that the global cost function which is the sum of all local cost functions obtains the minimum value. To solve this problem, an active disturbance rejection control distributed optimization algorithm which consists of an extended state observer and an optimization algorithm is proposed. Then, based on the Lyapunov stability, a new method is developed to prove the convergence and stability of the closed-loop system rigidly. When the external disturbance is constant, the designed method can make the states of all agents exponentially converge to the minimum of the global cost function. When the external disturbance is bounded, by adjusting the gain parameter of the extended state observer, the designed method can make the states of all agents converge to an arbitrarily small neighbourhood of the global cost function's minimum value. Finally, the simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: multi-agent systems; distributed optimization; disturbance; active disturbance rejection control; extended state observer; optimization algorithm

0 引言

多智能体系统是由各个智能体根据一定的相互作用共同完成工作任务的系统, 具有自主性、容错性、灵活性、可扩展性和协作能力等特点^[1]. 多智能体系统可以通过个体间的合作完成一些单个个体

无法完成或无法较好完成的任务. 多智能体系统分布式优化作为多智能体系统控制领域的重要研究课题之一, 研究如何在分布式系统中依赖个体局部信息设计优化算法, 实现全局性能指标的最优化或近似最优. 此类问题有着广泛的应用场景, 包括分布式编

收稿日期: 2020-11-14; 录用日期: 2021-04-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61973202, 62003202); 流程工业综合自动化国家重点实验室联合项目(2019-KF-23-09).

责任编委: 张国山.

[†]通讯作者. E-mail: zhiliangzhao@snnu.edu.cn.

队控制^[2-3]、智能电网的经济调度^[4]和无线传感器网络^[5-6]等。

随着网络规模和复杂性的不断加大,如何针对一般化的复杂系统设计分布式优化策略是一个重要问题.在这个背景下,人们提出了许多离散时间分布式优化算法^[7-11].文献[7-9]研究了基于原始-对偶算法设计的离散时间多智能体系统的分布式优化;文献[10]研究了交替方向乘法在离散时间多智能体系统动态目标函数优化中的应用;文献[11]提出了一种新的离散时间分布式投影算法,用于解决一类带有约束的分布式优化问题.由于许多动态系统是连续时间模型的(例如移动机器人、机器臂和无人机),近年来,连续时间领域也出现许多关于分布式优化的算法^[12-19].文献[12]创造性地提出了一类基于梯度的分布式优化算法,并证明了智能体状态的指数收敛性;文献[13-14]提出了一种分布式投影算法来解决多智能体网络上带有约束的优化问题;文献[15-16]研究了有限时间多智能体系统的分布式优化问题;文献[17-18]研究了Euler-Lagrange多智能体系统的分布式优化问题;文献[19]给出一种事件驱动机制下的分布式优化算法,用以解决多智能体系统中带约束下的二次凸优化问题.上述这些算法的提出都没有考虑干扰,然而,在实际系统中,干扰普遍存在.干扰往往会影响系统的稳定性,如何抑制干扰是实际系统不可忽略的问题.

关于多智能体系统分布式优化中的干扰抑制问题,已经有了一些研究成果^[20-23].文献[20]针对变化率的模型信息已知的外部干扰,设计了基于内模原理(internal model, IM)的分布式优化算法,并证明了系统的指数收敛性;文献[21]采用嵌入式控制设计,并提出了状态反馈控制和输出反馈控制,用以解决该问题的抗干扰性;文献[22]基于自适应IM设计解决了由常数信号和未知频率的正弦信号之和组成的有界外部干扰;针对更广的一类干扰,文献[23]基于干扰估计器和分布式复合控制器设计解决了干扰模型未知的分布式优化问题.上述研究说明了抗扰方法已初步在分布式优化问题中体现出有效性.本文将基于自抗扰控制方法,进一步研究一种新的抗扰分布式优化算法.

自抗扰控制(active disturbance rejection control, ADRC)是Han^[24]提出的控制方法,通过主动估计来补偿“总干扰”.ADRC具有优良的抗扰品质,得到了广泛应用和深入研究^[25-26].ADRC的核心思想是把干扰扩张为一个新的状态,在扩张状态观测器中进行

估计,并在反馈控制中进行补偿.扩张状态观测器是ADRC的关键部分,其功能是实时估计系统中的干扰.扩张状态观测器是一类典型的干扰估计器,已成功地应用于许多实际控制系统中^[27-33].

本文考虑含有未知干扰的连续时间多智能体系统的分布式优化问题.首先,设计一类扩张状态观测器(extended state observer, ESO)对干扰进行观测.其次,基于ESO的观测,设计带有干扰补偿和局部梯度下降的分布式优化算法.最后,通过对所设计的Lyapunov函数分析得到如下结果:在外部干扰为常值干扰的情况下,当 $t \rightarrow \infty$ 时,所有智能体的状态指数收敛到全局目标函数的最小值;在外部干扰为有界干扰的情况下,当 $t \rightarrow \infty$ 时,通过调整ESO的增益参数 r ,可使所有智能体的状态与全局目标函数的最小值之间的误差最终小于任意给定的正常数.

1 问题描述

1.1 符号说明

$\mathbf{1}_N$ 为 N 个元素均为1的列向量, $\mathbf{0}_n$ 为 n 个元素均为0的列向量, $\mathbf{0}_{m \times n}$ 为 $m \times n$ 维零矩阵, I_n 为 $n \times n$ 维单位矩阵. $\|S\|$ 和 $\|s\|$ 分别表示矩阵 S 和向量 s 的2-范数.对于 x_1, \dots, x_m ,定义 $\text{col}(x_1, \dots, x_m) = [x_1^T, \dots, x_m^T]^T$. \otimes 表示Kronecker product.对于矩阵 $A = [a_{ij}]$, a_{ij} 是矩阵 A 第 i 行第 j 列的元素. $\text{diag}\{z, w\}$ 表示对角元素是 z, w 的对角矩阵.

智能体之间的信息共享关系可以通过图的语言进行刻画.图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ 表示智能体之间的信息共享关系.其中:集合 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 代表节点集合, $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 描述智能体之间的信息共享关系.若节点对 $(j, i) \in \mathcal{E}$,则节点 i 可以从节点 j 中获取信息,同时称节点 j 为节点 i 的邻居.对于图 \mathcal{G} ,如果 $(j, i) \in \mathcal{E}$ 当且仅当 $(i, j) \in \mathcal{E}$,则称图 \mathcal{G} 为无向图.对于节点 j 和 i ,如果存在一系列边 $(j, i_0), (i_0, i_1), \dots, (i_{l-1}, i_l), (i_l, i)$ 均属于 \mathcal{E} ,则称从 j 至 i 存在一条有向路.如果图 \mathcal{G} 的任意两个节点 i, j 之间均存在 i 到 j 和 j 到 i 的有向路,则称图 \mathcal{G} 是连通的.定义图 \mathcal{G} 的加权邻接矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$,其中 $a_{ii} = 0$.当 $(i, j) \in \mathcal{E}$ 时 $a_{ij} > 0$,否则 $a_{ij} = 0$.定义图 \mathcal{G} 的入度矩阵为 $D_{\text{in}} = \text{diag}\left\{\sum_{j=1}^N a_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^N a_{Nj}\right\}$.定义图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵为 $L = D_{\text{in}} - A$.

由凸分析的定义知,若存在 $m > 0$,使得 $(y - x)^T(\nabla f(y) - \nabla f(x)) \geq m\|y - x\|^2, \forall x, y \in \mathbf{R}^n$,则可微函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为 m -强凸函数.若 $\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|, \forall x, y \in \mathbf{R}^n$,则称函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow$

\mathbf{R}^n 在 \mathbf{R}^n 上满足 Lipschitz 连续的条件.

1.2 问题描述

考虑由 N 个智能体组成的系统, 它们的信息分享关系用无向图 \mathcal{G} 来表示. 每个智能体均满足如下的连续动力系统:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t) + q_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

其中: $x_i \in \mathbf{R}^n$ 为智能体 i 的状态, $u_i \in \mathbf{R}^n$ 为智能体 i 的控制输入, $q_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 为智能体 i 的未知外部干扰.

考虑智能体 i 的局部目标函数 $f_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. 定义全局目标函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为

$$f(y) = \sum_{i=1}^N f_i(y). \quad (2)$$

本文的优化目标是设计分布式控制 u_i , 使得所有智能体的状态 $x_i (i = 1, \dots, N)$ 趋近于全局目标函数所对应的最优值 x^* , 即 $x^* \in \arg \min_{y \in \mathbf{R}^n} f(y)$.

介绍分布式优化算法设计之前, 首先给出以下假设.

假设 1 无向图 \mathcal{G} 是连通的.

假设 2 局部目标函数 f_i 是可微的且为 m_i -强凸函数, 并且 ∇f_i 在 \mathbf{R}^n 上是 M_i -Lipschitz.

注 1 根据假设 2, 集合 $\arg \min_{y \in \mathbf{R}^n} f(y)$ 包含唯一的点 x^* ^[23].

注 2 局部目标函数为强凸函数是分布式优化问题中的一个常用的假设^[12,20,22-23]. 该假设保证了最优值的唯一性, 并且局部目标函数为强凸函数在分布式优化算法理论分析中是必要的.

假设 3 未知外部干扰 $q_i(t) (i = 1, \dots, N)$ 可微, 并且存在 $M > 0$ 使得

$$\sup_{t \in [0, \infty)} (\|\dot{q}_i(t)\| + \|q_i(t)\|) \leq M.$$

2 分布式优化算法设计与主要结果

2.1 分布式优化算法设计

本节设计 ESO 以在线估计系统的“总干扰”, 并提出具有干扰补偿能力和局部梯度下降的分布式优化算法.

ESO 的设计如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t) = \hat{q}_i(t) + k_1 r (x_i(t) - \hat{x}_i(t)) + u_i(t), \\ \dot{\hat{q}}_i(t) = k_2 r^2 (x_i(t) - \hat{x}_i(t)). \end{cases} \quad (3)$$

其中: $r > 0$ 是可调节的增益参数, $k_1, k_2 > 0$ 均为常数, $\hat{x}_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 是对 $x_i(t)$ 的估计值, $\hat{q}_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 是对 $q_i(t)$ 的估计值, $i = 1, \dots, N$.

基于 ESO 对未知外部干扰的在线估计, 设计如下的优化算法:

$$\dot{v}_i(t) = k x_{mi}(t),$$

$$u_i(t) = -k \nabla f_i(x_i(t)) - k v_i(t) - k x_{mi}(t) - \hat{q}_i(t). \quad (4)$$

其中: $k > 0$; $v_i(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_n$; $\nabla f_i(x_i(t)) \in \mathbf{R}^n$ 为 $f_i(\cdot)$ 在 $x_i(t)$ 处的梯度; $x_{mi}(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) \in \mathbf{R}^n$ 为智能体 i 与其邻居 j 之间的相对误差; $v_i(t) \in \mathbf{R}^n$ 为积分反馈项; $-k \nabla f_i(x_i(t)) - k v_i(t)$ 为优化项, 将智能体驱动到最优值; $-k x_{mi}(t)$ 为一致项, 使所有的智能体收敛到相同的点; $-\hat{q}_i(t)$ 为对干扰的补偿项, 补偿外部干扰 $q_i(t)$.

注 3 在优化算法 (4) 中加入干扰补偿项 $-\hat{q}_i(t)$ 的优势为: 1) 与无干扰估计补偿的分布式优化算法相比^[12-19], 本文所设计的优化算法具有更强的鲁棒性和抗干扰能力, 在外部干扰的影响下仍能达到优化目的; 2) 与 IM 相比^[20,22], 所设计的 ESO 不需要干扰变化率的模型信息, 算法设计更简单.

2.2 主要结果

基于 2.1 节给出的 ESO 和优化算法, 有下述闭环系统:

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t) = k x_{mi}(t), \\ \dot{x}_i(t) = -k \nabla f_i(x_i(t)) - k v_i(t) - k x_{mi}(t) + q_i(t) - \hat{q}_i(t), \\ \dot{\hat{x}}_i(t) = \hat{q}_i(t) + k_1 r (x_i(t) - \hat{x}_i(t)) + u_i(t), \\ \dot{\hat{q}}_i(t) = k_2 r^2 (x_i(t) - \hat{x}_i(t)). \end{cases} \quad (5)$$

对于上述闭环系统, 有如下主要结果.

定理 1 考虑闭环系统 (5), 若假设 1 ~ 假设 3 成立, 则存在 $r^* > 0$, 使得对于任意的 $r \geq r^*$, 智能体的状态 $x_i(t)$ 满足

$$\|x_i(t) - x^*\| \leq \frac{\delta}{r} + \alpha_1^* e^{-\alpha_2^* t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (6)$$

其中 $\delta, \alpha_1^*, \alpha_2^*$ 是与 r 无关的正常数.

注 4 最优值 x^* 是使全局目标函数取得最小值的点, 增益参数 r 的变化不会影响最优值 x^* 的大小. 但是, 式 (6) 说明了增益参数 r 会影响智能体的优化精度, 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, 通过调整 ESO 的增益参数 r , 智能体的状态 $x_i(t)$ 与最优值 x^* 的误差最终可小于任意给定正实数.

推论 1 考虑闭环系统 (5), 若假设 1 ~ 假设 3 成立, 则当 $q_i(t) = \bar{d}_{n \times 1}$ 时, 存在 $r^{**} > 0$, 使得对于任意的 $r \geq r^{**}$, 智能体的状态 $x_i(t)$ 满足

$$\|x_i(t) - x^*\| \leq \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (7)$$

其中: $\bar{d}_{n \times 1}$ 是每个分量都为常数的列向量, α_1, α_2 是与 r 无关的正常数.

推论 1 说明, 当 $q_i(t)$ 为常值扰动时, 所提出的优

化算法在 $t \rightarrow \infty$ 时能使得智能体的状态 $x_i(t)$ 指数收敛于最优值 x^* 的速率不小于 α_2 .

3 主要结果的证明

本节给出闭环系统(5)的稳定性证明. 首先, 介绍几个重要的引理.

引理1^[34] 在假设1下, 1, 0是矩阵 L 的特征值, 并且有 $\mathbf{1}_N^T L = \mathbf{0}_N^T$. 此外, 存在矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{N \times (N-1)}$ 使得 $\mathbf{1}_N^T Q = \mathbf{0}_{N-1}$, $Q^T Q = I_{N-1}$, $Q Q^T = I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^T$, 并且 $Q^T L Q$ 为正定矩阵.

引理2^[35] 若假设3成立, 则考虑ESO(3), 存在正常数 r^* , $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, 使得对于任意的 $r \geq r^*$, 有下式成立:

$$\|q_i(t) - \hat{q}_i(t)\| \leq \frac{\tilde{\alpha}_1}{r} + \tilde{\alpha}_1 e^{-\tilde{\alpha}_2 r t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (8)$$

引理3^[35] 若假设3成立, 则考虑ESO(3), 当 $q_i(t) = \bar{d}_{n \times 1}$ 时, 存在正常数 r^{**} , $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, 使得对于任意的 $r \geq r^{**}$, 有下式成立:

$$\|q_i(t) - \hat{q}_i(t)\| \leq \bar{\alpha}_1 e^{-\bar{\alpha}_2 r t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (9)$$

注5 当干扰的变化率有界时, 干扰的估计误差满足式(8), 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, 通过调整ESO的增益参数 r , 干扰的估计误差小于任意给定的正常数. 特别地, 当干扰为常值干扰时, 干扰的估计误差满足式(9), 即当 $t \rightarrow \infty$ 时, 干扰的估计值渐近收敛于干扰的真实值.

下面证明定理1.

证明 闭环系统(5)可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t) = k x_{mi}(t), \\ \dot{x}_i(t) = -k \nabla f_i(x_i(t)) - k v_i(t) - k x_{mi}(t) + \varphi_i(t), \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\varphi_i(t) = q_i(t) - \hat{q}_i(t) \in \mathbf{R}^n$. 为了简化记号, 定义

$$x = \text{col}(x_1, \dots, x_N), \quad v = \text{col}(v_1, \dots, v_N),$$

$$\varphi(t) = \text{col}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)),$$

$$G_f(x) = \text{col}(\nabla f_1(x_1), \dots, \nabla f_N(x_N)),$$

其中 $x, v, \varphi(t), G_f(x) \in \mathbf{R}^{nN}$.

由上述定义, 系统(10)可以写为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = k(L \otimes I_n)x(t), \\ \dot{x}(t) = -kG_f(x) - kv(t) - k(L \otimes I_n)x(t) + \varphi(t). \end{cases} \quad (11)$$

当外部干扰 $q_i(t) \equiv \mathbf{0}_n, \varphi_i(t) \equiv \mathbf{0}_n$ 时, 系统(10)可以写成

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t) = k \bar{x}_{mi}(t), \\ \dot{x}_i(t) = -k \nabla f_i(\bar{x}_i(t)) - k \bar{v}_i(t) - k \bar{x}_{mi}(t). \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\bar{x}_{mi}(t) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(\bar{x}_i(t) - \bar{x}_j(t)),$$

$\bar{x}_i(t) \in \mathbf{R}^n, \bar{v}_i(t) \in \mathbf{R}^n, \bar{x}_{mi}(t) \in \mathbf{R}^n, \nabla f_i(\bar{x}_i(t)) \in \mathbf{R}^n$ 为 $f_i(\cdot)$ 在 $\bar{x}_i(t)$ 点的梯度.

考虑系统(12), 若假设1和假设2成立, 则 $(x_i^0, v_i^0) = (x^*, -\nabla f_i(x^*)), i = 1, \dots, N, x_i^0 \in \mathbf{R}^n, v_i^0 \in \mathbf{R}^n$ 为系统(12)的平衡点, 并且有下式成立^[12]:

$$\sum_{i=1}^N \bar{v}_i(t) = \mathbf{0}_n, \quad \forall t \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \nabla f_i(x^*) = \mathbf{0}_n. \quad (13)$$

根据系统(12)中平衡点与最优值 x^* 之间的关系可知, 优化问题可以转化为稳定性问题进行解决.

定义如下变量:

$$\tilde{x}_i = x_i - x_i^0, \quad \tilde{v}_i = v_i - v_i^0,$$

$$\psi_i(\tilde{x}_i) = \nabla f_i(x_i) - \nabla f_i(x_i^0),$$

$$\tilde{x} = \text{col}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N), \quad \tilde{v} = \text{col}(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_N),$$

$$\psi(\tilde{x}) = \text{col}(\psi_1(\tilde{x}_1), \dots, \psi_N(\tilde{x}_N)),$$

$$\tilde{x} \in \mathbf{R}^{nN}, \quad \tilde{v} \in \mathbf{R}^{nN}, \quad \psi(\tilde{x}) \in \mathbf{R}^{nN}.$$

通过上述变换, 系统(11)转化为如下所示的误差系统:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{v}}(t) = k(L \otimes I_n)\tilde{x}(t), \\ \dot{\tilde{x}}(t) = -k\psi(\tilde{x}(t)) - k\tilde{v}(t) - k(L \otimes I_n)\tilde{x}(t) + \varphi(t). \end{cases} \quad (14)$$

为研究系统(14)的稳定性, 令

$$\chi = (T^T \otimes I_n)\tilde{x}, \quad \vartheta = (T^T \otimes I_n)\tilde{v}, \quad T = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_N \\ \sqrt{N} \end{bmatrix}, Q. \quad (15)$$

其中: Q 为引理1中定义的矩阵, 并且可以验证 $\|T\| = 1$.

定义 $\chi = \text{col}(\chi_1, \chi_2), \vartheta = \text{col}(\vartheta_1, \vartheta_2)$. 其中: $\chi_1, \vartheta_1 \in \mathbf{R}^n, \chi_2, \vartheta_2 \in \mathbf{R}^{n(N-1)}$.

根据式(15)的定义可得

$$\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\mathbf{1}_N^T}{\sqrt{N}} \otimes I_n\right) \tilde{x} \\ (Q^T \otimes I_n) \tilde{x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\mathbf{1}_N^T}{\sqrt{N}} \otimes I_n\right) \tilde{v} \\ (Q^T \otimes I_n) \tilde{v} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

对式(16)两边同时求导, 得到

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_1 \\ \dot{\chi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\mathbf{1}_N^T}{\sqrt{N}} \otimes I_n\right) \dot{\tilde{x}} \\ (Q^T \otimes I_n) \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\mathbf{1}_N^T}{\sqrt{N}} \otimes I_n\right) \dot{\vartheta} \\ (Q^T \otimes I_n) \dot{\vartheta} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

将式(14)代入(17)的第1式,可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}_1 \\ \dot{\chi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\mathbf{1}_N^T}{\sqrt{N}} \otimes I_n\right) (-k\psi(\tilde{x}) - k\tilde{v} - k(L \otimes I_n)\tilde{x} + \varphi(t)) \\ (Q^T \otimes I_n) (-k\psi(\tilde{x}) - k\tilde{v} - k(L \otimes I_n)\tilde{x} + \varphi(t)) \end{bmatrix}.$$

由式(13)、 \otimes 的性质^[36]和 $\mathbf{1}_N^T L = \mathbf{0}_N$,可得

$$\left(\frac{\mathbf{1}_N^T}{\sqrt{N}} \otimes I_n\right) \tilde{v} = \mathbf{0}_n, \quad \left(\frac{\mathbf{1}_N^T}{\sqrt{N}} \otimes I_n\right) (L \otimes I_n) = \mathbf{0}_n.$$

进一步,可得 χ_1 的动态为

$$\dot{\chi}_1 = -\frac{k}{\sqrt{N}} (\mathbf{1}_N \otimes I_n)^T \psi(\tilde{x}) + \frac{1}{\sqrt{N}} (\mathbf{1}_N \otimes I_n)^T \varphi(t).$$

将式(16)第1式两边同时左乘 $\left[\frac{\mathbf{1}_N}{\sqrt{N}} \otimes I_n, Q \otimes I_n\right]$,可得

$$\tilde{x} = \frac{\mathbf{1}_N}{\sqrt{N}} \otimes I_n \chi_1 + Q \otimes I_n \chi_2. \quad (18)$$

由式(18)和矩阵的结合律可得

$$(Q^T \otimes I_n) (L \otimes I_n) \tilde{x} = (Q^T L Q \otimes I_n) \chi_2. \quad (19)$$

结合式(16)中第2式和(19)可得 χ_2 的动态满足

$$\dot{\chi}_2 = -(Q \otimes I_n)^T [k\psi(\tilde{x}) - \varphi(t)] - k\bar{L}\chi_2 - k\vartheta_2,$$

其中 $\bar{L} = Q^T L Q \otimes I_n$. 将式(14)代入(17)的第2式,可得

$$\begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_1 \\ \dot{\vartheta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \left(\frac{\mathbf{1}_N^T}{\sqrt{N}} \otimes I_n\right) (L \otimes I_n) \tilde{x} \\ k(Q^T \otimes I_n) (L \otimes I_n) \tilde{x} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

由式(18)中 \tilde{x} 与 χ_1, χ_2 的关系,可得

$$\dot{\vartheta}_1 = \mathbf{0}_n, \quad \dot{\vartheta}_2 = k\bar{L}\chi_2. \quad (21)$$

由上述讨论可知,系统(14)经过线性变换(15)可以写为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1 = -\frac{k}{\sqrt{N}} (\mathbf{1}_N \otimes I_n)^T \psi(\tilde{x}) + \frac{1}{\sqrt{N}} (\mathbf{1}_N \otimes I_n)^T \varphi(t), \\ \dot{\chi}_2 = -(Q \otimes I_n)^T [k\psi(\tilde{x}) - \varphi(t)] - k\bar{L}\chi_2 - k\vartheta_2, \\ \dot{\vartheta}_2 = k\bar{L}\chi_2. \end{cases} \quad (22)$$

由式(13)和(21)可以得到 $\vartheta_1(t) \equiv \mathbf{0}_n, \forall t \geq 0$.

下面证明系统(22)的稳定性.

考虑如下所示的Lyapunov函数:

$$V(t) =$$

$$\frac{1}{2}k(\phi + 1)\chi_1^T \chi_1 + \frac{1}{2}k\phi\chi_2^T \chi_2 +$$

$$\frac{1}{2}k(\chi_2 + \vartheta_2)^T (\chi_2 + \vartheta_2) + \frac{1}{2}k(\phi + 1)\vartheta_2^T \bar{L}^{-1} \vartheta_2.$$

其中: $\phi \geq \frac{M^2 + 1}{m} > 0, m = \min\{m_1, \dots, m_N\}, M = M_1 + \dots + M_N$. 由引理1可知 \bar{L} 是正定的,因此 V 是正定且径向无界的,并且有 $\bar{\lambda}_F \|p\|^2 \leq V(t) \leq \lambda_F \|p\|^2$. 其中: $p = \text{col}(\chi, \vartheta_2)$, 矩阵

$$F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \iota I_n & \mathbf{0}_{n \times n(N-1)} & \mathbf{0}_{n \times n(N-1)} \\ \mathbf{0}_{n(N-1) \times n} & \iota I_{n(N-1)} & kI_{n(N-1)} \\ \mathbf{0}_{n(N-1) \times n} & kI_{n(N-1)} & kI_{n(N-1)} + \iota \bar{L}^{-1} \end{bmatrix},$$

$\iota = k(\phi + 1), \lambda_F > 0$ 为 F 的最大特征值, $\bar{\lambda}_F > 0$ 为 F 的最小特征值.

上述Lyapunov函数沿着系统(22)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -k^2(\phi + 1)\tilde{x}^T \psi(\tilde{x}) - k^2\phi\chi_2^T \bar{L}\chi_2 - \\ & k^2\vartheta_2^T (Q \otimes I_n)^T \psi(\tilde{x}) - k^2\vartheta_2^T \vartheta_2 + \\ & k(\phi + 1)\tilde{x}^T \varphi(t) + k\vartheta_2^T (Q \otimes I_n)^T \varphi(t). \end{aligned}$$

由 f_i 为 m_i -强凸函数和 $\|\tilde{x}\| = \|\chi\|$ 可知,对于任意的 $\tilde{x} \in \mathbf{R}^{nN}$,均有

$$-k^2(\phi + 1)\tilde{x}^T \psi(\tilde{x}) \leq -k^2(\phi + 1)m\|\chi\|^2. \quad (23)$$

由 ∇f_i 在 \mathbf{R}^n 上为 M_i -Lipschitz、 $\|\tilde{x}\| = \|\chi\|, \|(Q \otimes I_n)\| = 1$ 和Young不等式可知,对于任意的 $\tilde{x} \in \mathbf{R}^{nN}$,均有

$$-\vartheta_2^T (Q \otimes I_n)^T \psi(\tilde{x}) \leq \frac{1}{4}\vartheta_2^T \vartheta_2 + M^2\|\chi\|^2. \quad (24)$$

由Young不等式可得

$$k(\phi + 1)\tilde{x}^T \varphi(t) \leq \frac{1}{2}k^2\|\tilde{x}\|^2 + \frac{1}{2}(\phi + 1)^2\|\varphi(t)\|^2,$$

$$k\vartheta_2^T (Q \otimes I_n)^T \varphi(t) \leq \frac{1}{4}k^2\|\vartheta_2\|^2 + \|\varphi(t)\|^2.$$

综合式(23)和(24)、 $\phi \geq \frac{M^2 + 1}{m} > 0$ 和上述两个不等式,可得

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{k^2}{2}\|p\|^2 + \left[\frac{1}{2}(\phi + 1)^2 + 1\right]\|\varphi(t)\|^2. \quad (25)$$

结合式(8)、(25)和 $V(t) \leq \lambda_F \|p\|^2$,有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\frac{k^2}{2\lambda_F} V(t) + N \left[\frac{1}{2}(\phi + 1)^2 + 1\right] \left(\frac{\tilde{\alpha}_1}{r} + \tilde{\alpha}_1 e^{-\tilde{\alpha}_2 r t}\right)^2. \end{aligned}$$

因此,对于任意的 $t > 0$,有

$$V(t) \leq$$

$$V(0)e^{-\frac{k^2}{2\lambda_F} t} + e^{-\frac{k^2}{2\lambda_F} t} N [(\phi + 1)^2 + 2] \times$$

$$\int_0^t \left(\frac{\tilde{\alpha}_1^2}{r^2} e^{\frac{k^2}{2\lambda_F} \tau} + \tilde{\alpha}_1^2 e^{\left(\frac{k^2}{2\lambda_F} - 2\tilde{\alpha}_2 r\right)\tau}\right) d\tau \leq$$

$$V(0)e^{-\frac{k^2}{2\lambda_F}t} + N[(\phi + 1)^2 + 2] \times \left(\frac{2\tilde{\alpha}_1^2\lambda_F}{r^2k^2} + \frac{2\tilde{\alpha}_1^2\lambda_F}{4\tilde{\alpha}_2\lambda_F r - k^2} e^{-\frac{k^2}{2\lambda_F}t} \right).$$

因为 $\|\tilde{x}\| = \|\chi\|$, 所以对于任意的 $t > 0, r > r^*$, 有

$$\|x_i(t) - x^*\| \leq \|\chi\| \leq \sqrt{\frac{V(t)}{\lambda_F}} \leq \frac{\delta}{r} + \alpha_1^* e^{-\alpha_2^* t}.$$

其中

$$r^* = \frac{k^2}{4\tilde{\alpha}_2\lambda_F}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2N[(\phi + 1)^2 + 2]\lambda_F\tilde{\alpha}_1^2}{\lambda_F k^2}},$$

$$\alpha_1^* = \sqrt{\frac{V(0)}{\lambda_F}} + \sqrt{\frac{2N[(\phi + 1)^2 + 2]\tilde{\alpha}_1^2\lambda_F}{(4\tilde{\alpha}_2\lambda_F r^* - k^2)\lambda_F}},$$

$$\alpha_2^* = \frac{k^2}{4\lambda_F}. \quad \square$$

下面证明推论1.

证明 通过类似于定理1的证明过程, 并结合式(9), 可得

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(0)e^{-\frac{k^2}{2\lambda_F}t} + e^{-\frac{k^2}{2\lambda_F}t} N\left[\frac{1}{2}(\phi + 1)^2 + 1\right] \times \\ &\int_0^t \tilde{\alpha}_1^2 e^{\left(\frac{k^2}{2\lambda_F} - 2\tilde{\alpha}_2 r\right)\tau} d\tau \leq V(0)e^{-\frac{k^2}{2\lambda_F}t} + N\left[\frac{1}{2}(\phi + 1)^2 + 1\right] \times \\ &\frac{2\lambda_F\tilde{\alpha}_1^2}{4\tilde{\alpha}_2\lambda_F r - k^2} e^{-\frac{k^2}{2\lambda_F}t}. \end{aligned}$$

因为 $\|\tilde{x}\| = \|\chi\|$, 所以对于任意的 $t > 0, r > r^{**}$, 有

$$\|x_i(t) - x^*\| \leq \|\chi\| \leq \sqrt{\frac{V(t)}{\lambda_F}} \leq \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}.$$

其中

$$r^{**} = \frac{k^2}{4\tilde{\alpha}_2\lambda_F}, \quad \alpha_2 = \frac{k^2}{4\lambda_F},$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{V(0)}{\lambda_F}} + \sqrt{\frac{2N\left[\frac{1}{2}(\phi + 1)^2 + 1\right]\lambda_F\tilde{\alpha}_1^2}{(4\tilde{\alpha}_2\lambda_F r^{**} - k^2)\lambda_F}}. \quad \square$$

由定理1可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 通过调整ESO的增益参数 r , $x_i(t)$ 与 x^* 之间的误差可小于任意给定的正实数. 由推论1的讨论可知, 当 $q_i(t)$ 为常值扰动时, 所提出的优化算法在 $t \rightarrow \infty$ 时能使得智能体的状态 $x_i(t)$ 指数收敛于最优值 x^* 的速率不小于 α_2 .

4 数值仿真

本节考虑一个具有无向连通拓扑结构, 包含5个个体的多智能体系统, 每个智能体的动态可用系统(1)描述, 其中 $n = 3$, 如图1所示. 接下来, 将对本文的ESO方法与IM方法进行对比.

$$f(x) = \sum_{i=1}^5 \|x - x_i(\mathbf{0})\|^2, \text{ 则局部目标函数}$$

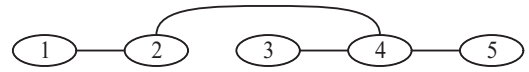


图1 智能体的网络拓扑图

$f_i(x) = \|x - x_i(\mathbf{0})\|^2$. 考虑与文献[22]形式相同的干扰, 其中

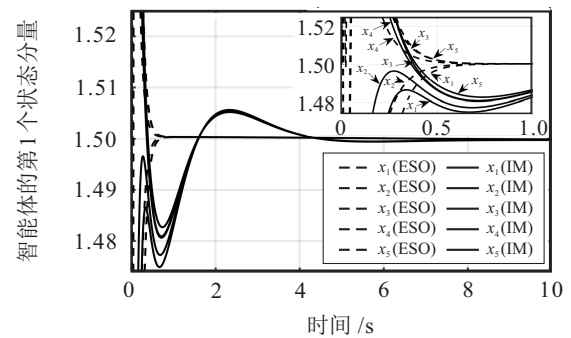
$$(\omega_{i11}, \omega_{i21}, \omega_{i31}) = \left(\frac{\pi}{2(i+3)}, \frac{\pi}{i+4}, \frac{\pi}{2(i+4)} \right),$$

$$(\omega_{i12}, \omega_{i22}, \omega_{i32}) = \left(\frac{\pi}{3(i+3)}, \frac{2\pi}{3(i+3)}, \frac{\pi}{2(i+4)} \right),$$

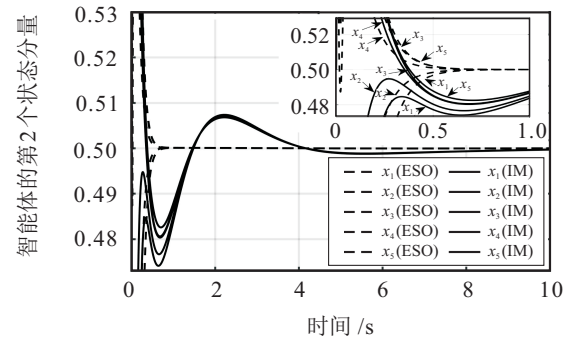
$$(q_{i10}, q_{i20}, q_{i30}) = \left(i+2, i+2, \frac{1}{3} \right),$$

$$(q_{i11}, q_{i21}, q_{i31}) = \left(i+1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \right),$$

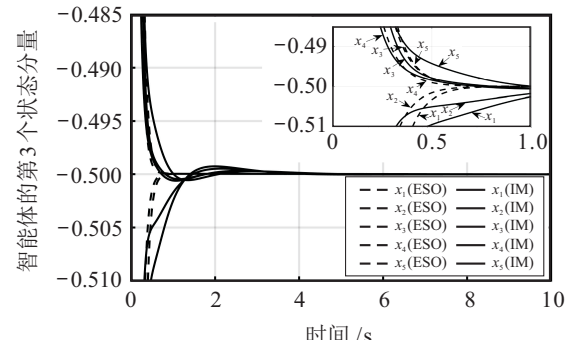
$$(q_{i12}, q_{i22}, q_{i32}) = \left(i, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$



(a) 智能体的第1个状态分量



(b) 智能体的第2个状态分量



(c) 智能体的第3个状态分量

图2 基于ESO和IM的分布式优化算法下各智能体的状态曲线

智能体 i 的初始值 $x_i(\mathbf{0}) = [i \times 0.5, (i - 2) \times 0.5, (i - 4) \times 0.5]^T$; $k = 50$; 增益参数 $r = 100$.

由图2可知, 相比基于IM的分布式优化算法, 基于ESO的分布式优化算法能更快速地趋于最优值 $x^* = [1.5, 0.5, -0.5]^T$.

5 结论

本文提出了一种新的抗扰方法来解决具有未知干扰的一阶多智能体系统的分布式优化问题. 针对该问题, 设计了由ESO和优化算法组成的自抗扰分布式优化算法. 在该算法下, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 所有智能体的状态与最优值之间的误差小于任意给定的正常数. 仿真例子表明了该优化算法的有效性.

参考文献(References)

- [1] 衣鹏, 洪奕光. 分布式合作优化及其应用[J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(10): 1547-1564.
(Yi P, Hong Y G. Distributed cooperative optimization and its applications[J]. Scientia Sinica: Mathematica, 2016, 46(10): 1547-1564.)
- [2] 王丹丹, 宗群, 张博渊, 等. 多无人机完全分布式有限时间编队控制[J]. 控制与决策, 2019, 34(12): 2656-2660.
(Wang D D, Zong Q, Zhang B Y, et al. Fully distributed finite-time formation control for multiple UAVs[J]. Control and Decision, 2019, 34(12): 2656-2660.)
- [3] 周川, 洪小敏, 何俊达, 等. 基于事件触发的时变拓扑多智能体系统编队控制[J]. 控制与决策, 2017, 32(6): 1103-1108.
(Zhou C, Hong X M, He J D, et al. Formation control of multi-agent systems with time-varying topology based on event-triggered mechanism[J]. Control and Decision, 2017, 32(6): 1103-1108.)
- [4] Yi P, Hong Y G, Liu F. Distributed gradient algorithm for constrained optimization with application to load sharing in power systems[J]. Systems & Control Letters, 2015, 83: 45-52.
- [5] 涂志亮, 王强, 沈毅. 一种目标监测的移动传感器网络覆盖分布式优化算法[J]. 控制与决策, 2012, 27(9): 1353-1358.
(Tu Z L, Wang Q, Shen Y. A distributed coverage optimization algorithm for target monitoring in mobile sensor network[J]. Control and Decision, 2012, 27(9): 1353-1358.)
- [6] Zhang Y Q, Lou Y C, Hong Y G, et al. Distributed projection-based algorithms for source localization in wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2015, 14(6): 3131-3142.
- [7] Shi W, Ling Q, Wu G, et al. EXTRA: An exact first-order algorithm for decentralized consensus optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2015, 25(2): 944-966.
- [8] Zhu M H, Martinez S. On distributed convex optimization under inequality and equality constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(1): 151-164.
- [9] Lei J L, Chen H F, Fang H T. Primal-dual algorithm for distributed constrained optimization[J]. Systems & Control Letters, 2016, 96: 110-117.
- [10] Ling Q, Ribeiro A. Decentralized dynamic optimization through the alternating direction method of multipliers[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(5): 1185-1197.
- [11] Li H Q, Lü Q, Huang T W. Distributed projection subgradient algorithm over time-varying general unbalanced directed graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(3): 1309-1316.
- [12] Kia S S, Cortés J, Martínez S. Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication[J]. Automatica, 2015, 55: 254-264.
- [13] Zeng X L, Yi P, Hong Y G. Distributed continuous-time algorithm for constrained convex optimizations via nonsmooth analysis approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(10): 5227-5233.
- [14] Xi C G, Khan U A. Distributed subgradient projection algorithm over directed graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 3986-3992.
- [15] Lin P, Ren W, Farrell J A. Distributed continuous-time optimization: Nonuniform gradient gains, finite-time convergence, and convex constraint set[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(5): 2239-2253.
- [16] Hu Z L, Yang J Y. Distributed finite-time optimization for second order continuous-time multiple agents systems with time-varying cost function[J]. Neurocomputing, 2018, 287: 173-184.
- [17] Zou Y, Meng Z Y, Hong Y G. Adaptive distributed optimization algorithms for Euler-Lagrange systems[J]. Automatica, 2020, 119: 109060.
- [18] Zhang Y Q, Deng Z H, Hong Y G. Distributed optimal coordination for multiple heterogeneous Euler-Lagrangian systems[J]. Automatica, 2017, 79: 207-213.
- [19] 赵中原, 陈刚. 基于事件驱动的二次凸优化问题分布式优化算法[J]. 控制与决策, 2019, 34(8): 1635-1644.
(Zhao Z Y, Chen G. Distributed event-triggered algorithm

- for quadratic convex optimization problem[J]. Control and Decision, 2019, 34(8): 1635-1644.)
- [20] Deng Z H, Wang X H, Hong Y G. Distributed optimisation design with triggers for disturbed continuous-time multi-agent systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2017, 11(2): 282-290.
- [21] Tang Y T. Distributed optimal steady-state regulation for high-order multiagent systems with external disturbances[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(11): 4828-4835.
- [22] Wang X H, Hong Y G, Yi P, et al. Distributed optimization design of continuous-time multiagent systems with unknown-frequency disturbances[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8): 2058-2066.
- [23] Wang X Y, Li S H, Wang G D. Distributed optimization for disturbed second-order multiagent systems based on active antidisturbance control[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 31(6): 2104-2117.
- [24] Han J Q. From PID to active disturbance rejection control[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2009, 56(3): 900-906.
- [25] Zhao Z L, Guo B Z. A novel extended state observer for output tracking of MIMO systems with mismatched uncertainty[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(1): 211-218.
- [26] Xue W C, Huang Y. Performance analysis of 2-DOF tracking control for a class of nonlinear uncertain systems with discontinuous disturbances[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(4): 1456-1473.
- [27] Li J, Xia Y Q, Qi X H, et al. On the necessity, scheme, and basis of the linear-nonlinear switching in active disturbance rejection control[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, 64(2): 1425-1435.
- [28] Kandula P, Dong L L. Robust voltage control for an electrostatic micro-actuator[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2018, 140(6): 061012.
- [29] Sun J L, Pu Z Q, Yi J Q. Conditional disturbance negation based active disturbance rejection control for hypersonic vehicles[J]. Control Engineering Practice, 2019, 84: 159-171.
- [30] Yuan Y, Wang Z D, Yu Y, et al. Active disturbance rejection control for a pneumatic motion platform subject to actuator saturation: An extended state observer approach[J]. Automatica, 2019, 107: 353-361.
- [31] Sun L, Jin Y H, You F Q. Active disturbance rejection temperature control of open-cathode proton exchange membrane fuel cell[J]. Applied Energy, 2020, 261: 114381.
- [32] Wu Z H, Zhou H C, Guo B Z, et al. Review and new theoretical perspectives on active disturbance rejection control for uncertain finite-dimensional and infinite-dimensional systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 101(2): 935-959.
- [33] 赵志良. 自抗扰控制设计与理论分析[M]. 北京: 科学出版社, 2019: 1-238.
(Zhao Z L. Design and theoretical analysis of active disturbance rejection control[M]. Beijing: Science Press, 2019: 1-238.)
- [34] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer, 2001: 1-433.
- [35] Chen S, Bai W Y, Hu Y, et al. On the conceptualization of total disturbance and its profound implications[J]. Science China Information Sciences, 2019, 63(2): 1-3.
- [36] 许君一, 孙伟, 齐东旭. 矩阵 Kronecker 乘积及其应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(4): 377-388.
(Xu J Y, Sun W, Qi D X. Kronecker products and applications[J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2003, 15(4): 377-388.)

作者简介

段书晴(1996—), 女, 硕士生, 从事自抗扰控制及应用的研究, E-mail: 1392756122@qq.com;

陈森(1992—), 男, 讲师, 博士, 从事自抗扰控制的研究, E-mail: chensen14@mails.ucas.ac.cn;

赵志良(1979—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统与控制、自抗扰控制等研究, E-mail: zhiliangzhao@snnu.edu.cn.

(责任编辑: 李君玲)