

# 控制与决策

Control and Decision

## 基于分布式模型预测控制的无人机编队控制

赵超轮, 戴邵武, 赵国荣, 高超, 刘帅

引用本文:

赵超轮,戴邵武,赵国荣,高超,刘帅. 基于分布式模型预测控制的无人机编队控制[J]. *控制与决策*, 2022, 37(7): 1763–1771.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0447>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 基于领航-跟随的有人/无人机编队队形保持控制

Formation keeping control for manned/unmanned aerial vehicle formation based on leader-follower strategy

*控制与决策*. 2021, 36(10): 2435–2441 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0453>

### 分布式多无人机的时变编队非线性控制设计

Time-varying formation nonlinear control of distributed multiple UAVs

*控制与决策*. 2021, 36(10): 2490–2496 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0136>

### 大规模固定翼无人机集群编队控制方法

Formation control of large-scale fixed-wing unmanned aerial vehicle swarms

*控制与决策*. 2021, 36(9): 2063–2073 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0076>

### 四旋翼无人机抗干扰轨迹跟踪控制

Anti-interference trajectory tracking control of quadrotor UAV

*控制与决策*. 2021, 36(2): 379–386 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0875>

### 输出误差约束下四旋翼无人机预定性能反步控制

Prescribed performance backstepping control for quadrotor UAV with output error constraint

*控制与决策*. 2021, 36(5): 1059–1068 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1249>

# 基于分布式模型预测控制的无人机编队控制

赵超轮<sup>1†</sup>, 戴邵武<sup>1</sup>, 赵国荣<sup>1</sup>, 高超<sup>1</sup>, 刘帅<sup>2</sup>

(1. 海军航空大学 岸防兵学院, 山东 烟台 264001; 2. 92635 部队, 山东 青岛 266000)

**摘要:** 针对多四旋翼无人机编队在巡航飞行过程中队形形成和保持问题, 采用分布式模型预测控制方法将该问题转化为在线滚动优化问题. 建立线性时不变的编队运动模型, 进而在考虑状态和输入约束, 不考虑时延、外界干扰、噪声的情况下, 利用领航跟随策略设计一种分布式模型预测控制器, 通过引入自身和邻居的假设状态轨迹设计代价函数. 其中邻居信息的交互是在有向、时不变通信拓扑结构下进行的. 基于该控制器, 无人机能够在跟踪目标轨迹的同时, 快速形成预先设定的队形并保持队形飞行. 通过引入终端等式约束保证系统稳定, 进而将目标函数作为 Lyapunov 函数, 给出编队系统渐近稳定的充分条件. 最后, 利用 6 架无人机仿真验证控制算法的有效性和优越性.

**关键词:** 无人机; 四旋翼; 编队控制; 分布式控制; 模型预测控制; 领航跟随法

中图分类号: V249

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0447

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



**引用格式:** 赵超轮, 戴邵武, 赵国荣, 等. 基于分布式模型预测控制的无人机编队控制[J]. 控制与决策, 2022, 37(7): 1763-1771.

## Formation control of multi-UAV based on distributed model predictive control algorithm

ZHAO Chao-lun<sup>1†</sup>, DAI Shao-wu<sup>1</sup>, ZHAO Guo-rong<sup>1</sup>, GAO Chao<sup>1</sup>, LIU Shuai<sup>2</sup>

(1. Coastal Defense College, Naval Aviation University, Yantai 264001, China; 2. PLA 92635 Unit, Qingdao 266000, China)

**Abstract:** This paper presents a distributed model predictive control algorithm for the formation and maintenance of multi-quadrotor during the cruise flight. That is dealing with the formation control using the rolling optimization method. Firstly, a linear time-invariant formation motion model is established. Then using the leader-follower strategy, a distributed model predictive controller is designed by introducing the assumed state trajectory of itself and neighbors to the cost function, which is in the case of considering the state and input constraints, without considering the communication delay, external interference and noise. Unmanned aerial vehicles (UAVs) interact with local information based on a directional, time-invariant communication topology. Based on the controller, UAVs can quickly form a pre-set formation and maintain it while tracking the target trajectory. To ensure the stability of the system, the terminal equality constraint is introduced. Then taking the cost function as the Lyapunov function, the sufficient conditions for the asymptotic stability of the formation system are given. Finally, simulations with six UAVs demonstrate the effectiveness and superiority of the proposed algorithm.

**Keywords:** UAV; quadrotor; formation control; distributed control; model predictive control; leader-follower method

## 0 引言

多机协同执行任务是无人机系统应用的重要发展趋势<sup>[1]</sup>. 无人机集群协同执行任务是一个复杂、连续的过程, 一般可分为离线任务预规划、巡航飞行、在线任务重规划、任务实施和返航等 5 个阶段. 多机自主编队能力是无人机集群执行多样化任务的前提,

其一是实现集群编队控制, 其二是实现集群感知与规避. 集群编队控制主要解决编队构成/重构和编队保持两个问题. 编队保持包含队形保持、切换等问题, 其中队形保持是集群编队控制的核心问题, 也是无人机集群巡航飞行阶段的主要任务, 即研究集群在运动中如何保持队形不变<sup>[2]</sup>. 目前, 集群编队控制方法主

收稿日期: 2021-03-17; 录用日期: 2021-06-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61903374); 中国博士后科学基金项目(2019M653928).

责任编辑: 李少远.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: chaolunzhao95@163.com.

要有领航跟随法<sup>[3]</sup>、虚拟结构法<sup>[4]</sup>、基于行为法<sup>[5]</sup>。

集群编队控制按控制方式的不同一般分为集中式控制和分布式控制。分布式控制因为能够充分发挥无人机的自治性,通信量、计算量小,鲁棒性、容错性强,可扩展性好,更适用于节点较多的大规模系统,引起了科研人员的广泛关注<sup>[6-7]</sup>。本文基于分布式控制方式,采用领航跟随策略,着重研究无人机集群在巡航飞行阶段的队形保持问题。

针对队形保持问题,科研人员基于图论<sup>[8]</sup>、一致性<sup>[9]</sup>、分布式模型预测控制(distributed model predictive control, DMPC)<sup>[10]</sup>等理论开展了大量研究,取得了不少成果。队形保持问题本质上可看作是一个多输入、多参数、多约束、任务耦合的优化问题,利用DMPC方法处理该问题具有显著的优势。DMPC是一种将模型预测控制(MPC)与分布式控制思想有机结合起来的控制方法,其具备显式处理约束、抑制干扰、滚动优化等MPC方法的优势,且兼具分布式控制结构容错性高、结构灵活性强等特点<sup>[11]</sup>。在DMPC设计过程中,可根据具体的任务需求,结合系统模型的特点,设计相应的目标函数、约束条件,通过滚动求解优化问题得到控制指令。

文献[12]以四旋翼为研究对象,采用双向通信拓扑结构,基于领航跟随策略,利用DMPC和一致性理论设计控制器,实现了具有防撞能力的队形保持,给出了系统稳定的条件,但其DMPC仅作用于垂直方向,且没有考虑无人机的状态、输入约束;文献[13]以固定翼为研究对象,基于虚拟结构策略,考虑飞机的过载、速度等约束,设计了DMPC控制器,实现了具有避碰、避障能力的队形保持控制,其队形保持是通过各无人机对参考轨迹的跟踪实现的,机间的交互作用主要是为了避碰,且没有明确给出稳定性证明。上述文献实现队形保持的思路均是在代价函数中引入预测状态偏离目标状态的代价,并没有利用邻居信息去消除队形误差,邻居信息主要起到避碰的作用。

本文受文献[14-16]启发,在有向、时不变通信拓扑图下,以四旋翼为研究对象,考虑状态、输入约束,通过在DMPC控制器的代价函数中引入自身及邻居的假设状态轨迹,处理队形形成与保持问题,充分利用邻居信息消除队形误差,更突显出多无人机间的协同作用,使得无人机能够在跟踪各自期望轨迹的过程中快速形成队形,并且给出保证系统渐近稳定的充分条件。

## 1 系统模型

首先建立单机运动模型,进而建立编队运动模型。

### 1.1 单机运动模型

假设无人机编队中共有 $N_v$ 架四旋翼无人机,无人机间动力学解耦,且忽略风的阻力。目前市面上有很多开源的自动驾驶仪或者带有软件开发工具包的自动驾驶仪,如Pixhawk、大疆的A3等。这些自动驾驶仪可实现四旋翼的速度控制,即把速度指令输入给自动驾驶仪后,它能够自动控制四旋翼在合理时间内跟踪给定的速度指令。在此基础上,第 $i$ 架无人机的质心运动模型可以近似描述为如下连续时间线性时不变形式<sup>[17]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}}^i = \boldsymbol{v}^i, \\ \dot{\boldsymbol{v}}^i = -l_v(\boldsymbol{v}^i - \boldsymbol{v}^{ic}). \end{cases} \quad (1)$$

其中:右上标 $i = 1, 2, \dots, N_v$ 为无人机编号; $\boldsymbol{p}^i = [x^i, y^i, z^i]^T \in \boldsymbol{R}^3$ 为无人机在惯性系下的三维位置向量,单位为m; $\boldsymbol{v}^i = [v_x^i, v_y^i, v_z^i]^T \in \boldsymbol{R}^3$ 为无人机在惯性系下的速度向量,单位为m/s; $\boldsymbol{v}^{ic} = [v_x^{ic}, v_y^{ic}, v_z^{ic}]^T \in \boldsymbol{R}^3$ 为速度指令; $l_v > 0$ 为控制增益,用于表征四旋翼无人机速度响应的滞后效应。注意到当 $\boldsymbol{v}^{ic}$ 是常数向量时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{v}^i(t) - \boldsymbol{v}^{ic}\| = 0$ 。

取状态量 $\boldsymbol{x}^i = [(\boldsymbol{p}^i)^T, (\boldsymbol{v}^i)^T]^T \in \boldsymbol{R}^6$ ,控制输入量 $\boldsymbol{u}^i = \boldsymbol{v}^{ic} \in \boldsymbol{R}^3$ ,则状态空间形式为 $\dot{\boldsymbol{x}}^i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^i + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^i$ ,即

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}^i \\ \dot{\boldsymbol{v}}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_3 & \boldsymbol{I}_3 \\ \boldsymbol{O}_3 & -l_v \boldsymbol{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}^i \\ \boldsymbol{v}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_3 \\ l_v \boldsymbol{I}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}^i. \quad (2)$$

其中: $\boldsymbol{I}_n \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ 为 $n$ 维单位矩阵, $\boldsymbol{O}_n \in \boldsymbol{R}^{n \times n}$ 为 $n \times n$ 维零矩阵。

式(2)的离散化描述<sup>[18]</sup>为

$$\boldsymbol{x}_{k+1}^i = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_k^i + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_k^i. \quad (3)$$

其中:系数矩阵 $\boldsymbol{G} = e^{\boldsymbol{A}T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & a\boldsymbol{I}_3 \\ \boldsymbol{O}_3 & b\boldsymbol{I}_3 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{6 \times 6}$ ,  $a = -(e^{-l_v T} - 1)/l_v$ ,  $b = e^{-l_v T}$ ;  $\boldsymbol{H} = \left( \int_0^T e^{\boldsymbol{A}t} dt \right) \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} c\boldsymbol{I}_3 \\ d\boldsymbol{I}_3 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^{6 \times 3}$ ,  $T$ 为采样时间,  $c = (e^{-l_v T} + l_v T - 1)/l_v$ ,  $d = 1 - e^{-l_v T}$ 。

### 1.2 编队运动模型

将所有 $N_v$ 架四旋翼无人机构成的集合称为编队系统,定义编队系统的状态量 $\tilde{\boldsymbol{x}} = [(\boldsymbol{x}^1)^T, (\boldsymbol{x}^2)^T, \dots, (\boldsymbol{x}^{N_v})^T]^T$ ,控制输入量 $\tilde{\boldsymbol{u}} = [(\boldsymbol{u}^1)^T, (\boldsymbol{u}^2)^T, \dots, (\boldsymbol{u}^{N_v})^T]^T$ ,可得到线性时不变编队系统模型,其离散形式为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{x}}_k + \tilde{\boldsymbol{H}}\tilde{\boldsymbol{u}}_k. \quad (4)$$

其中: $\tilde{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{I}_{N_v} \otimes \boldsymbol{G}$ ,符号 $\otimes$ 表示Kronecker积; $\tilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{I}_{N_v} \otimes \boldsymbol{H}$ 。

采用有向图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$  描述编队系统的通信拓扑结构. 其中:  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N_v\}$  为图  $\mathcal{G}$  中的节点集合;  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  为边  $(i, j)$  的集合,  $i \in \mathcal{V}, j \in \mathcal{V}$ . 用图  $\mathcal{G}$  中的节点  $i$  代表编队系统内的第  $i$  架无人机 ( $\text{UAV}_i$ ), 边  $(j, i) \in \mathcal{A}$  代表节点  $i$  能够获取节点  $j$  的状态信息, 如图 1 所示箭头由  $j$  指向  $i$ , 且称节点  $j$  是节点  $i$  的邻居. 用  $\mathcal{N}_i = \{j | (j, i) \in \mathcal{A}\}$  表示节点  $i$  的邻居集, 用  $\mathcal{O}_i = \{j | (i, j) \in \mathcal{A}\}$  表示能够获取节点  $i$  信息的节点集合.

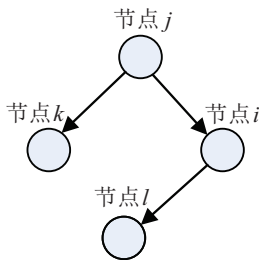


图 1 通信拓扑图

本文考虑有向、时不变通信拓扑结构, 为保证系统的能控性, 假设有向图  $\mathcal{G}$  中至少存在一个以领航机为根节点的有向生成树<sup>[9]</sup>. 例如图 1 中, 若节点  $j$  为领航机, 则满足这一假设, 跟随机  $i$  和  $k$  可以直接获取领航机  $j$  的状态信息, 跟随机  $l$  可经由节点  $i$  间接获取领航机  $j$  的状态信息.

## 2 分布式模型预测控制器设计

在巡航飞行阶段, 多四旋翼无人机队形形成与保持问题的假设及控制目标如下所述.

**假设 1** 所有无人机均预装有期望队形; 给领航机发送期望轨迹, 跟随机能够基于有向图  $\mathcal{G}$  和期望队形, 无时延地解算得到自身的期望轨迹.

**假设 2** 在一个采样周期内, 各无人机能够根据有向图实时、无时延地获取邻居无人机的假设状态轨迹.

**假设 3** 不考虑外界干扰、噪声、空气阻力等对无人机动态的影响.

控制目标: 多无人机能够快速跟踪各自的期望轨迹, 快速形成期望的队形并一直保持队形飞行.

**注 1** 假设 1 中“无时延”的实质是对通信条件的理想化. 在飞机通信距离较近的情况下, 认为通信传输时延是远小于位置传感器更新数据用时的, 因此采样时间的下限主要依据位置更新频率的大小, 这里采样时间应不小于 0.1 s.

### 2.1 控制器设计

在每个预测时域  $[t, t + N]$  内, 所使用的状态、输入符号命名见表 1. 其中: 下标  $t$  表示时刻;  $k$  表示预测第  $k$  步,  $k = 0, 1, \dots, N$ .

表 1 状态、输入符号

符号	变量名称	符号	变量名称
$\mathbf{u}_t^i$	实际控制输入	$\mathbf{x}_t^i$	实际状态
$\mathbf{u}_{k,t}^i$	预测控制输入	$\hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i$	预测状态
$\hat{\mathbf{u}}_{k,t}^i$	假设控制输入	$\hat{\mathbf{x}}_{k,t}^{-i}$	假设状态
$\mathbf{u}_{k,t}^{i*}$	最优控制输入	$\mathbf{x}_{k,t}^{i*}$	最优状态

在  $t$  时刻,  $\text{UAV}_i$  从  $\mathbf{x}_{0,t}^i, \mathbf{x}_{0,t}^{-i}$  出发求解时域长度为  $N$  的优化控制问题  $\mathcal{P}_i$ , 可表示为

$$\min_{\mathbf{U}_t^i} J_t^i = \min_{\mathbf{U}_t^i} \sum_{k=0}^{N-1} l^i(\mathbf{x}_{k,t}^i, \mathbf{u}_{k,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^{-i}). \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & \mathbf{x}_{k+1,t}^i = \mathbf{G}\mathbf{x}_{k,t}^i + \mathbf{H}\mathbf{u}_{k,t}^i, \\ & \mathbf{x}_{k,t}^i \in \mathcal{X}^i, \mathbf{u}_{k,t}^i \in \mathcal{U}^i, k = 1, 2, \dots, N-1; \\ & \mathbf{x}_{N,t}^i = \mathbf{x}_{\text{des},N,t}^i; \\ & \mathbf{x}_{0,t}^i = \mathbf{x}_t^i. \end{aligned} \quad (6)$$

其中:  $\mathbf{x}_{k,t}^i$  表示  $\text{UAV}_i$  从  $t$  时刻状态  $\mathbf{x}_t^i$  开始, 依次应用控制序列  $\mathbf{u}_{0,t}^i, \mathbf{u}_{1,t}^i, \dots, \mathbf{u}_{k-1,t}^i$  后, 预测得到的  $t+k$  时刻的状态;  $\mathbf{x}^{-i} = \{\mathbf{x}^j | (j, i) \in \mathcal{A}\}$  表示  $\text{UAV}_i$  的邻居状态的集合;  $\mathcal{X}^i = \{\mathbf{x}^i | |v_x^i| \leq v_{\text{max}}^i, |v_y^i| \leq v_{\text{max}}^i, |v_z^i| \leq v_{\text{max}}^i\}$  为状态约束集, 即对速度大小进行限制,  $v_{\text{max}}^i$  为常数; 且

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^i = \{ & \mathbf{u}^i | |u_x^i| \leq v_{\text{max}}^{ic}, |u_y^i| \leq v_{\text{max}}^{ic}, |u_z^i| \leq v_{\text{max}}^{ic}, \\ & |\Delta u_x^i| \leq \Delta v_{\text{max}}^{ic}, |\Delta u_y^i| \leq \Delta v_{\text{max}}^{ic}, \\ & |\Delta u_z^i| \leq \Delta v_{\text{max}}^{ic} \} \end{aligned}$$

为输入约束集,  $\Delta u_x^i, \Delta u_y^i, \Delta u_z^i$  为 3 个方向控制输入的增量,  $v_{\text{max}}^{ic}, \Delta v_{\text{max}}^{ic}$  为常数, 分别表示控制输入的最大值、控制输入增量的最大值;  $\mathbf{x}_{N,t}^i = \mathbf{x}_{\text{des},N,t}^i$  为  $\text{UAV}_i$  的终端等式约束, 即要求  $t$  时刻最后一步预测得到的状态等于期望状态, 该项主要用于保证系统渐近稳定;  $\mathbf{x}_{0,t}^i = \mathbf{x}_t^i$  表示将  $t$  时刻当前状态作为该时刻优化问题的初始状态.

将第  $i$  架  $\text{UAV}$  优化问题  $\mathcal{P}_i$  中的代价函数设计如下:

$$\begin{aligned} l^i(\mathbf{x}_{k,t}^i, \mathbf{u}_{k,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^{-i}) = & \|\mathbf{x}_{k,t}^i - \mathbf{x}_{\text{des},k,t}^i\|_{\mathbf{Q}_i} + \|\mathbf{u}_{k,t}^i - \mathbf{v}_{\text{des}}^i\|_{\mathbf{R}_i} + \\ & \|\mathbf{x}_{k,t}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|\mathbf{x}_{k,t}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j - \mathbf{e}_{\text{des}}^{i,j}\|_{\mathbf{G}_i}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中符号  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{M}} \triangleq (\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x})^{1/2}$ . 式 (7) 等号右侧第 1 项为预测状态偏离目标状态的代价, 这里表征希望尽快到达目标状态, 用  $\mathbf{x}_{\text{des},k,t}^i = [x_{\text{des},k,t}^i, y_{\text{des},k,t}^i, z_{\text{des},k,t}^i, v_{x,\text{des}}^i, v_{y,\text{des}}^i, v_{z,\text{des}}^i]^T$  表示  $\text{UAV}_i$  的目标状态, 注意 3 个方向的期望速度为常数, 权重矩阵  $\mathbf{Q}_i > 0$ ; 第 2 项为控制输入代价, 这里表征  $\text{UAV}_i$  偏好匀速运

动,  $\mathbf{R}_i > 0$ ; 第3项为预测状态偏离假设状态的代价, 这里表征希望预测状态能跟踪假设状态,  $\mathbf{F}_i > 0$ ; 第4项为队形代价, 表征 UAV<sub>i</sub> 要尽可能与其邻居节点的假设状态保持期望偏差运行,  $\mathbf{G}_i > 0$ .

**注2** 在同一时刻, 编队系统内所有无人机对自身的优化问题同步进行求解和更新. 由以上分析可知, 单节点优化问题只利用了邻居节点的假设状态信息, 并没有全局的状态信息, 因此这是一个分布式模型预测控制问题. 另外, 式(7)等号右侧第3、4项的引入是区别于文献[12-13]控制器设计的一个关键点.

## 2.2 控制器算法流程

采用领航跟随策略实现多无人机的编队飞行, 且假设有向图  $\mathcal{G}$  中存在一条以领航机为根节点的有向生成树. 为方便描述, 后文中用 UAV<sub>1</sub> 代表领航机. 分布式模型预测控制器的算法流程如下.

**step 1:** 给定时不变通信拓扑图  $\mathcal{G}$ , UAV<sub>i</sub> 预装期望相对状态信息  $\mathbf{e}_{\text{des}}^{i,j}$ .

**step 2:** 在  $t = 0$  时刻, 假设所有 UAV 在空中处于悬停状态或匀速运动状态. 给 UAV<sub>1</sub> 发送期望状态轨迹.

对于每一架 UAV<sub>i</sub>: 将其当前状态作为本时刻预测时域中的预测状态初始值, 即  $\mathbf{x}_{0,0}^i = \mathbf{x}_0^i$ . 定义其假设控制输入和假设状态量为

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_{k,0}^i &= \mathbf{v}_0^i, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \\ \hat{\mathbf{x}}_{k,0}^i &= \mathbf{x}_{k,0}^i, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.\end{aligned}$$

其中:  $\mathbf{x}_{k+1,0}^i = \mathbf{G}\mathbf{x}_{k,0}^i + \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}_{k,0}^i, k = 0, 1, \dots, N-1$ .

**step 3:** 在任一时刻  $t (t \geq 0)$ , 对于每一架 UAV<sub>i</sub>, 有:

1) 根据通信拓扑图  $\mathcal{G}$ , 直接或间接地获取 UAV<sub>1</sub> 期望状态轨迹后, 根据预装的期望相对状态信息  $\mathbf{e}_{\text{des}}^{i,j}$  求解自身的期望状态轨迹  $X_{\text{des},t}^i = \{\mathbf{x}_{\text{des},k,t}^i | k = 0, 1, \dots, N\}$ .

2) 获取邻居的假设状态轨迹  $\hat{X}_t^{-i} = \{\hat{\mathbf{x}}_{k,t}^{-i} | k = 0, 1, \dots, N\}$ .

3) 利用  $t$  时刻自身状态测量值  $\mathbf{x}_t^i$ 、期望状态轨迹  $X_{\text{des},t}^i$ 、假设状态轨迹  $\hat{X}_t^i$ 、邻居假设状态轨迹  $\hat{X}_t^{-i}$ 、与邻居的期望相对的状态  $\mathbf{e}_{\text{des}}^{i,j}$ , 求解优化问题  $\mathcal{P}_i$  得到最优控制输入序列  $U_t^{i*} = \{\mathbf{u}_{0,t}^{i*}, \mathbf{u}_{1,t}^{i*}, \dots, \mathbf{u}_{N-1,t}^{i*}\}$  以及相应的最优状态轨迹  $X_t^{i*} = \{\mathbf{x}_{1,t}^{i*}, \mathbf{x}_{2,t}^{i*}, \dots, \mathbf{x}_{N,t}^{i*}\}$ . 注意取  $\mathbf{x}_{0,t}^{i*} = \mathbf{x}_t^i$ .

4) 计算下一步的假设控制输入

$$\hat{\mathbf{u}}_{k,t+1}^i = \begin{cases} \mathbf{u}_{k+1,t}^{i*}, & k = 0, 1, \dots, N-2; \\ \mathbf{v}_{\text{des}}^i, & k = N-1. \end{cases}$$

相应的假设状态为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1,t+1}^i = \mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^i + \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}_{k,t+1}^i, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

其中  $\hat{\mathbf{x}}_{0,t+1}^i = \mathbf{x}_{1,t}^{i*}$ . 即

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^i = \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1,t}^{i*}, & k = 0, 1, \dots, N-1; \\ \mathbf{x}_{\text{des},k,t+1}^i, & k = N. \end{cases}$$

5) 将  $U_t^{i*}$  中的第1项  $\mathbf{u}_{0,t}^{i*}$  应用到 UAV<sub>i</sub> 中, 即  $\mathbf{u}_t^i = \mathbf{u}_{0,t}^{i*}$ .

6) 根据通信拓扑图  $\mathcal{G}$ , 将假设状态轨迹  $\hat{X}_{t+1}^i$  发送给能接收其信息的 UAV, 同时接收其邻居的假设状态轨迹  $\hat{X}_{t+1}^{-i}$ .

**step 4:** 在  $t+1$  时刻, 基于新的状态测量值  $\mathbf{x}_{t+1}^i$ 、假设状态轨迹  $\hat{X}_{t+1}^i$ , 重复进行 step 3 和 step 4.

**注3** 假设控制输入和假设状态在  $t=0$  和  $t>0$  时是不同的. 其中: 当  $t>0$  时, 假设控制输入序列  $\hat{U}_{t+1}^i$  是  $t$  时刻求解优化问题所得最优控制输入序列  $U_t^{i*}$  向左移1位后补上期望输入项得到的控制输入序列; step 3 中  $t$  时刻需要交互的假设状态轨迹  $\hat{X}_{t+1}^i$  实质是  $t$  时刻求解优化问题得到的最优状态轨迹  $X_t^{i*}$ .

## 3 渐近稳定性分析

稳定性分析的主要思路是为编队系统构造一个合适的 Lyapunov 函数, 并证明其递减性. 一般是将目标函数作为 Lyapunov 函数, 问题的关键点是要引入一个可行解<sup>[20-21]</sup>. 分析表明, 通过合理选择代价函数中的权重矩阵能够保证编队系统的渐近稳定性.

**定理1** 假设当有向图  $\mathcal{G}$  中存在一个以领航机为根节点的有向生成树时, 若任意 UAV<sub>i</sub> 的 MPC 控制器满足以下条件, 则编队系统(4)是渐近稳定的.

- 1)  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^T > 0, \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i^T > 0, \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T > 0, \mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i^T > 0, i = 0, 1, \dots, N_v$ ;
- 2) 满足下列不等式:

$$\varepsilon_i - l^i(\mathbf{x}_{0,t}^{i*}, \mathbf{u}_{0,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^{-i}) \leq 0. \quad (8)$$

其中

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \sum_{j \in N_i} (\|\mathbf{x}_{k,t}^{j*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j\|_{\mathbf{G}_i}) - \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} \right].$$

**证明** 在  $t$  时刻, 问题  $\mathcal{P}_i$  的最优解为  $U_t^{i*} = \{\mathbf{u}_{0,t}^{i*}, \mathbf{u}_{1,t}^{i*}, \dots, \mathbf{u}_{N-1,t}^{i*}\}$ , 对应系统的最优状态轨迹为  $X_t^{i*} = \{\mathbf{x}_{1,t}^{i*}, \mathbf{x}_{2,t}^{i*}, \dots, \mathbf{x}_{N,t}^{i*}\}$ , 显然上述最优解及对应状态轨迹的所有分量均满足约束条件(6).

$t+1$  时刻, 通过移位构造问题  $\mathcal{P}_i$  的解, 令

$$\mathbf{u}_{k,t+1}^i = \begin{cases} \mathbf{u}_{k+1,t}^{i*}, & k = 0, 1, \dots, N-2; \\ \mathbf{v}_{\text{des}}^i, & k = N-1. \end{cases}$$

则有控制输入序列

$$U_{t+1}^i = \{\mathbf{u}_{0,t+1}^i, \mathbf{u}_{1,t+1}^i, \dots, \mathbf{u}_{N-2,t+1}^i, \mathbf{u}_{N-1,t+1}^i\} = \{\mathbf{u}_{1,t}^{i*}, \mathbf{u}_{2,t}^{i*}, \dots, \mathbf{u}_{N-1,t}^{i*}, \mathbf{v}_{des}^i\}. \quad (9)$$

其对应的系统状态轨迹为

$$X_{t+1}^i = \{\mathbf{x}_{1,t+1}^i, \mathbf{x}_{2,t+1}^i, \dots, \mathbf{x}_{N-1,t+1}^i, \mathbf{x}_{N,t+1}^i\} = \{\mathbf{x}_{2,t}^{i*}, \mathbf{x}_{3,t}^{i*}, \dots, \mathbf{x}_{N,t}^{i*}, \mathbf{x}_{N,t+1}^i\}.$$

注意这里不考虑噪声等干扰, 认为  $\mathbf{x}_{0,t+1}^i = \mathbf{x}_{t+1}^i = \mathbf{x}_{1,t}^{i*}$ .

因为  $t$  时刻系统的最优状态轨迹  $X_t^{i*}$  满足约束条件(6), 所以  $X_t^{i*}$  的前  $N-1$  项是满足约束条件的. 而对于状态轨迹  $X_t^{i*}$  的第  $N$  项, 已知

$$\mathbf{x}_{N,t}^{i*} = \mathbf{x}_{des,N,t}^i = [\mathbf{x}_{des,N,t}^i, \mathbf{y}_{des,N,t}^i, \mathbf{z}_{des,N,t}^i, \mathbf{v}_{x,des}^i, \mathbf{v}_{y,des}^i, \mathbf{v}_{z,des}^i]^T.$$

由式(3)可得  $t+1$  时刻状态轨迹  $X_{t+1}^i$  中的第  $N$  项为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{N,t+1}^i &= \mathbf{G}\mathbf{x}_{N-1,t+1}^i + \mathbf{H}\mathbf{u}_{N-1,t+1}^i = \\ &= \mathbf{G}\mathbf{x}_{N,t}^{i*} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{v}_{des}^i = \\ &= \mathbf{x}_{des,N,t}^i + \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}_{des}^i \cdot T = \\ &= \mathbf{x}_{des,N,t+1}^i. \end{aligned}$$

其中:  $T$  为采样时间,  $\mathbf{C} = [\mathbf{I}_3, \mathbf{O}_3]^T$ . 可知,  $X_{t+1}^i$  满足终端等式约束, 即满足约束条件(6).

综上, 式(9)所述控制输入序列  $U_{t+1}^i$  为问题  $\mathcal{P}_i$  在  $t+1$  时刻的一个可行解.

$t$  时刻, 问题  $\mathcal{P}_i$  的目标函数为

$$J_t^{i*} = \sum_{k=0}^{N-1} l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^{-i}).$$

其中代价函数为

$$\begin{aligned} l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^{-i}) &= \\ &= \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \mathbf{x}_{des,k,t}^i\|_{\mathbf{Q}_i} + \|\mathbf{u}_{k,t}^{i*} - \mathbf{v}_{des}^i\|_{\mathbf{R}_i} + \\ &= \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} + \sum_{j \in \mathbf{N}_i} \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j - \mathbf{e}_{des}^{i,j}\|_{\mathbf{G}_i}. \end{aligned}$$

$t+1$  时刻, 在可行解(9)下, 问题  $\mathcal{P}_i$  的目标函数为

$$J_{t+1}^i = \sum_{k=0}^{N-1} l^i(\mathbf{x}_{k,t+1}^i, \mathbf{u}_{k,t+1}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^{-i}).$$

其中代价函数为

$$\begin{aligned} l^i(\mathbf{x}_{k,t+1}^i, \mathbf{u}_{k,t+1}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^{-i}) &= \\ &= \|\mathbf{x}_{k,t+1}^i - \mathbf{x}_{des,k,t+1}^i\|_{\mathbf{Q}_i} + \|\mathbf{u}_{k,t+1}^i - \mathbf{v}_{des}^i\|_{\mathbf{R}_i} + \\ &= \|\mathbf{x}_{k,t+1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^i\|_{\mathbf{F}_i} + \\ &= \sum_{j \in \mathbf{N}_i} \|\mathbf{x}_{k,t+1}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^j - \mathbf{e}_{des}^{i,j}\|_{\mathbf{G}_i}. \end{aligned}$$

注意到当  $k = N-1$  时, 有

$$l^i(\mathbf{x}_{k,t+1}^i, \mathbf{u}_{k,t+1}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^{-i}) = 0.$$

假设  $t+1$  时刻, 在最优解下, 问题  $\mathcal{P}_i$  的目标函数为  $J_{t+1}^{i*}$ , 则有

$$\begin{aligned} J_{t+1}^{i*} &\leq J_{t+1}^i = \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} l^i(\mathbf{x}_{k,t+1}^i, \mathbf{u}_{k,t+1}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t+1}^{-i}) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} l^i(\mathbf{x}_{k+1,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k+1,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k+1,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k+1,t}^{-i*}) = \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k,t}^{-i*}). \end{aligned} \quad (10)$$

将式(10)不等式两端同时减去  $J_t^{i*}$ , 得到

$$\begin{aligned} J_{t+1}^{i*} - J_t^{i*} &\leq J_{t+1}^i - J_t^{i*} = \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} [l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k,t}^{-i*})] - \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} [l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^{-i})] = \\ &= -l^i(\mathbf{x}_{0,t}^{i*}, \mathbf{u}_{0,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^{-i}) + \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} [l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k,t}^{-i*}) - \\ &= l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^{-i})]. \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} l^i(\mathbf{x}_{0,t}^{i*}, \mathbf{u}_{0,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^{-i}) &= \\ &= \|\mathbf{x}_{0,t}^{i*} - \mathbf{x}_{des,0,t}^i\|_{\mathbf{Q}_i} + \|\mathbf{u}_{0,t}^{i*} - \mathbf{v}_{des}^i\|_{\mathbf{R}_i} + \\ &= \|\mathbf{x}_{0,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} + \sum_{j \in \mathbf{N}_i} \|\mathbf{x}_{0,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^j - \mathbf{e}_{des}^{i,j}\|_{\mathbf{G}_i}, \\ l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k,t}^{-i*}) &= \\ &= \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \mathbf{x}_{des,k,t}^i\|_{\mathbf{Q}_i} + \|\mathbf{u}_{k,t}^{i*} - \mathbf{v}_{des}^i\|_{\mathbf{R}_i} + \\ &= \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \mathbf{x}_{k,t}^{i*}\|_{\mathbf{F}_i} + \sum_{j \in \mathbf{N}_i} \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \mathbf{x}_{k,t}^j - \mathbf{e}_{des}^{i,j}\|_{\mathbf{G}_i}, \\ l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^{-i}) &= \\ &= \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \mathbf{x}_{des,k,t}^i\|_{\mathbf{Q}_i} + \|\mathbf{u}_{k,t}^{i*} - \mathbf{v}_{des}^i\|_{\mathbf{R}_i} + \\ &= \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} + \sum_{j \in \mathbf{N}_i} \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j - \mathbf{e}_{des}^{i,j}\|_{\mathbf{G}_i}, \\ l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{x}_{k,t}^{-i*}) &- \\ l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^{-i}) &= \\ &= -\|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} + \sum_{j \in \mathbf{N}_i} \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \mathbf{x}_{k,t}^j - \mathbf{e}_{des}^{i,j}\|_{\mathbf{G}_i} - \\ &= \sum_{j \in \mathbf{N}_i} \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j - \mathbf{e}_{des}^{i,j}\|_{\mathbf{G}_i}. \end{aligned} \quad (12)$$

根据向量范数的三角不等式性质, 有

$$\sum_{j \in \mathbf{N}_i} \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \mathbf{x}_{k,t}^j - \mathbf{e}_{des}^{i,j}\|_{\mathbf{G}_i} -$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in N_i} \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j - \mathbf{e}_{\text{des}}^{i,j}\|_{\mathbf{G}_i} \leq \\ & \sum_{j \in N_i} \|\mathbf{x}_{k,t}^{j*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j\|_{\mathbf{G}_i}. \end{aligned} \quad (13)$$

结合式(12)、(13),式(11)可表示为

$$\begin{aligned} & J_{t+1}^{i*} - J_t^{i*} \leq \\ & -l^i(\mathbf{x}_{0,t}^{i*}, \mathbf{u}_{0,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^{-i}) + \\ & \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \sum_{j \in N_i} (\|\mathbf{x}_{k,t}^{j*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j\|_{\mathbf{G}_i}) - \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

因此,若式(8)成立,则有  $J_{t+1}^{i*} \leq J_t^{i*}$ ,即在定理1的假设下,  $J_t^{i*}$  是单调递减的,故可作为Lyapunov函数,从而保证DMPC系统的渐近稳定性.  $\square$

式(8)难以通过调节控制参数来实现.为解决这一问题,首先给出下述定理,其思路是将各无人机优化问题的目标函数求和来构造Lyapunov函数.

**定理2** 当有向图 $\mathcal{G}$ 中存在一个以领航机为根节点的有向生成树时,若DMPC系统满足以下条件,则编队系统(4)是渐近稳定的.

1)  $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^T > 0$ ,  $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i^T > 0$ ,  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T > 0$ ,  $\mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i^T > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_v$ ;

2) 满足下列不等式:

$$\varepsilon_\Sigma - \sum_{i=1}^{N_v} l^i(\mathbf{x}_{0,t}^{i*}, \mathbf{u}_{0,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^{-i}) \leq 0. \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Sigma = & \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N_v} \left[ \sum_{j \in \mathcal{O}_i} (\|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j\|_{\mathbf{G}_j}) - \right. \\ & \left. \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} \right]. \end{aligned}$$

**证明**  $t$ 时刻,对于编队系统(4),将各UAV优化问题的目标函数求和,得到

$$J_t^{\Sigma*} = \sum_{i=1}^{N_v} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} l^i(\mathbf{x}_{k,t}^{i*}, \mathbf{u}_{k,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^{-i}) \right].$$

根据式(14)不难得出

$$\begin{aligned} & J_{t+1}^{\Sigma*} - J_t^{\Sigma*} \leq \\ & \sum_{i=1}^{N_v} [-l^i(\mathbf{x}_{0,t}^{i*}, \mathbf{u}_{0,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^{-i})] + \\ & \sum_{i=1}^{N_v} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \sum_{j \in N_i} (\|\mathbf{x}_{k,t}^{j*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j\|_{\mathbf{G}_i}) - \right. \right. \\ & \left. \left. \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} \right] \right\}. \end{aligned}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{N_v} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \sum_{j \in N_i} (\|\mathbf{x}_{k,t}^{j*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j\|_{\mathbf{G}_i}) - \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_v} \left[ \sum_{j \in N_i} (\|\mathbf{x}_{k,t}^{j*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j\|_{\mathbf{G}_i}) - \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} \right] \right\} = \\ & \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \sum_{i=1}^{N_v} \left[ \sum_{j \in \mathcal{O}_i} (\|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j\|_{\mathbf{G}_j}) - \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i} \right] \right\}. \end{aligned}$$

若定理2中式(15)成立,则有  $J_{t+1}^{\Sigma*} \leq J_t^{\Sigma*}$ ,根据Lyapunov稳定性分析可知,编队系统(4)是渐近稳定的.  $\square$

由定理2分析可知,若有  $\varepsilon_\Sigma \leq 0$ ,则式(15)恒成立,从而得到下述定理.

**定理3** 当有向图 $\mathcal{G}$ 中存在一个以领航机为根节点的有向生成树时,编队系统若满足定理2中的1)和2),且各子系统代价函数的权重矩阵彼此之间满足下述不等式,则编队系统(4)是渐近稳定的:

$$|\mathcal{O}_i| \sum_{j \in \mathcal{O}_i} \mathbf{G}_j \leq \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_v, \quad (16)$$

其中  $|\mathcal{O}_i|$  为  $\mathcal{O}_i$  集合中元素的个数.

**证明** 若式(16)成立,则有

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}^T \left( |\mathcal{O}_i| \sum_{j \in \mathcal{O}_i} \mathbf{G}_j - \mathbf{F}_i \right) \mathbf{z} \leq 0, \\ & i = 1, 2, \dots, N_v, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

进一步,有

$$\mathbf{z}^T \left( |\mathcal{O}_i| \sum_{j \in \mathcal{O}_i} \mathbf{G}_j \right) \mathbf{z} = |\mathcal{O}_i| \mathbf{z}^T \left( \sum_{j \in \mathcal{O}_i} \mathbf{G}_j \right) \mathbf{z} \leq \mathbf{z}^T \mathbf{F}_i \mathbf{z}.$$

令  $\mathbf{z} = \mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i$ , 则

$$|\mathcal{O}_i| \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\sum_{j \in \mathcal{O}_i} \mathbf{G}_j}^2 \leq \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i}^2. \quad (17)$$

将不等式(17)两端开根号,有

$$\sqrt{|\mathcal{O}_i|} \cdot \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\sum_{j \in \mathcal{O}_i} \mathbf{G}_j} \leq \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i}.$$

由平方平均数和算术平均数的不等式关系可知

$$\begin{aligned} & \sqrt{|\mathcal{O}_i|} \cdot \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\sum_{j \in \mathcal{O}_i} \mathbf{G}_j} \geq \\ & \sum_{j \in \mathcal{O}_i} (\|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j\|_{\mathbf{G}_j}). \end{aligned}$$

因此  $\sum_{j \in \mathcal{O}_i} (\|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^j\|_{\mathbf{G}_j}) \leq \|\mathbf{x}_{k,t}^{i*} - \hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i\|_{\mathbf{F}_i}$ .

根据定理2可知

$$J_{t+1}^{\Sigma*} - J_t^{\Sigma*} \leq \sum_{i=1}^{N_v} [-l^i(\mathbf{x}_{0,t}^{i*}, \mathbf{u}_{0,t}^{i*}, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^i, \hat{\mathbf{x}}_{0,t}^{-i})] \leq 0.$$

故编队系统(4)是渐近稳定的.  $\square$

**注4** 根据定理3可知,通过合理选择代价函数的权重矩阵可保证系统的渐近稳定性.

**注5** 平方平均数和算术平均数的不等式关系为  $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ ,  $a_i \in \mathbf{R}$ ,  $n \in \mathbf{N}^+$ .

### 4 数值仿真分析

采用6架四旋翼无人机进行仿真实验。

#### 4.1 仿真参数设置

采用的通信拓扑图 $\mathcal{G}$ 如图2所示,选取UAV<sub>1</sub>作为领航机,箭头表示信息流向,即前端UAV的信息(期望状态轨迹、假设状态轨迹)能够被后端UAV获取。

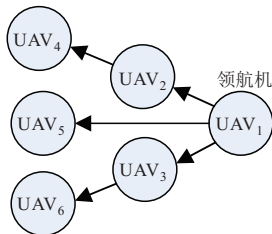


图2 6机通信拓扑图

仿真参数设置如表2和表3所示,表3给出了UAV在惯性系下的初始状态 $\mathbf{x}_0^i$ ,以及各UAV与UAV<sub>1</sub>的期望相对状态 $\mathbf{e}_{des}^{1,j} = \mathbf{x}_{des}^1 - \mathbf{x}_{des}^j$ 。由于两两UAV间的期望相对状态可由 $\mathbf{e}_{des}^{1,j}$ 得到,不再列出。

表2 仿真参数

参数	符号	数值	参数	符号	数值
无人机数量	$N_v$	6	状态权重	$\mathbf{Q}_i$	$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ 0.1\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$
采样时间/s	$T$	0.5	控制输入权重	$\mathbf{R}_i$	$0.1\mathbf{I}_3$
预测时域	$p$	5	假设状态权重	$\mathbf{F}_i$	$\begin{bmatrix} 10\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$
控制时域	$m$	5	队形权重	$\mathbf{G}_i$	$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ 0.1\mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$

表3 无人机控制增益、初始状态、期望相对状态

无人机编号	$l_v$	初始状态 $\mathbf{x}_0^i$	期望相对状态 $\mathbf{e}_{des}^{1,j}$
UAV <sub>1</sub>	3	$(1, 0, 8, 3, 0, 0)^T$	—
UAV <sub>2</sub>	3	$(-1, 2, 8, 3, 0, 0)^T$	$(1, -1, 0, 0, 0, 0)^T$
UAV <sub>3</sub>	3	$(-1, -2, 8, 3, 0, 0)^T$	$(1, 1, 0, 0, 0, 0)^T$
UAV <sub>4</sub>	3	$(-3, 4, 8, 3, 0, 0)^T$	$(2, -2, 0, 0, 0, 0)^T$
UAV <sub>5</sub>	3	$(-3, 0, 8, 3, 0, 0)^T$	$(2, 0, 0, 0, 0, 0)^T$
UAV <sub>6</sub>	3	$(-3, -4, 8, 3, 0, 0)^T$	$(2, 2, 0, 0, 0, 0)^T$

编队的期望队形为三角形,给领航机发送的期望状态轨迹为 $\mathbf{x}_{des,t}^1 = [1 + 5t, 2t, 8 + t, 5, 2, 1]^T$ ,其中位置量的单位为m,速度量的单位为m/s。UAV<sub>2</sub>~UAV<sub>6</sub>根据通信拓扑获取UAV<sub>1</sub>的期望状态轨迹,再利用期望相对状态求得自身的期望状态轨迹。设置无人机3个方向的控制输入量的最大值为13m/s,最小值为-13m/s;3个方向的输入量增量最大值为2m/s;状态量中的速度最大值为13m/s,最小值为-13m/s;仿真时间为6s。定义队形误差为 $e = \frac{1}{N_v - 1} \sum_{j=2}^{N_v} (\|\mathbf{p}^{1,j} - \mathbf{p}_{des}^{1,j}\|)$ 。其中: $\|\cdot\|$ 为向量的2-范

数, $\mathbf{p}^{1,j} = \mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^j$ 。定义跟踪期望轨迹的位置误差为 $e_p^i = \|\mathbf{p}^i - \mathbf{p}_{des}^i\|$ 。

#### 4.2 结果分析

为验证算法在完成队形形成与保持任务的优势,分别采用两种算法。算法1,在目标函数中未引入假设状态,即不包含预测状态偏离假设状态的代价(式(7)第3项)、队形代价(式(7)第4项);算法2,即本文算法,完整采用式(7)。图3为两种算法的队形误差变化曲线。可见,两种算法均能够快速消除队形误差,但算法2在形成队形过程的前3s内收敛速度更快,在2s时,队形误差已小于0.2m。两种算法在3s后的误差减少速度基本相当。

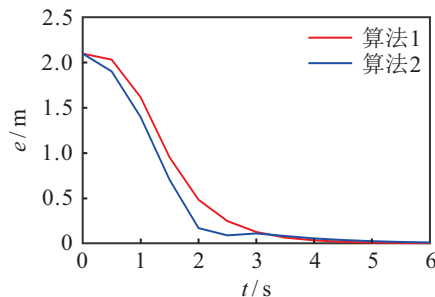


图3 队形误差

仿真图4为两种算法下跟踪期望轨迹的位置误差图。两种算法均能使6架UAV跟踪上期望轨迹,在算法1下,由于优化问题中没有考虑队形代价,从图4(a)中可以看出,6架UAV跟踪期望值的同步性一般;而算法2在2s后基本实现位置误差的同步减少,多无人机在形成队形过程中的协同作用更为明显。

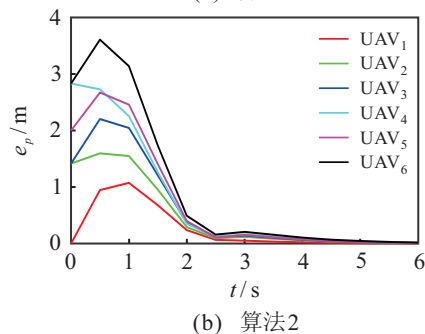
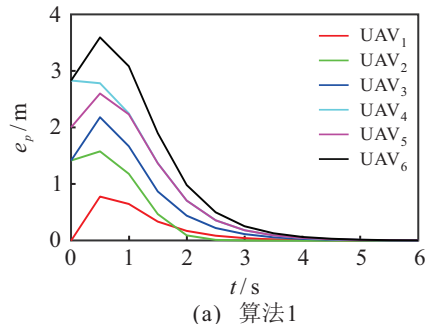


图4 位置误差

图5为算法2下的三维轨迹,其中每隔1s绘制1

次散点,用五角星表示领航机,圆形表示跟随机.从轨迹上看,6架 UAV 能够将队形间距缩小,实现三角形编队飞行,且队形保持效果较好.

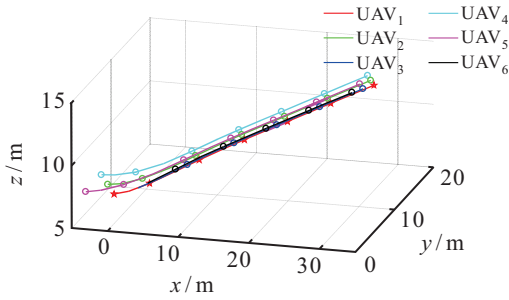


图5 三维轨迹

图6为算法2下6架 UAV 沿3个坐标轴方向的实际速度和期望速度.从  $x$  方向的速度曲线可看出, UAV<sub>2</sub>、UAV<sub>3</sub> 的速度变化基本一致, UAV<sub>4</sub>~UAV<sub>6</sub> 的速度变化基本一致,这与设置的初始状态、期望状态位置对称有关.同时,速度值均在约束条件范围内.

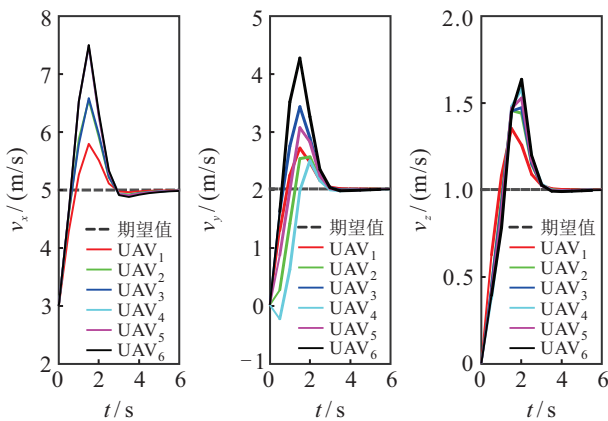


图6 速度

图7为实际控制输入曲线,即每次求解优化问题得到的最优控制序列的首项  $u_{0,t}^{i*}$ .可见,控制输入满足各项约束条件,6架无人机均能在3s左右将速度收敛到期望值.对比图6与图7可见,由于单机运动模型中控制增益  $l_v$  的存在,速度响应有一定的时滞.

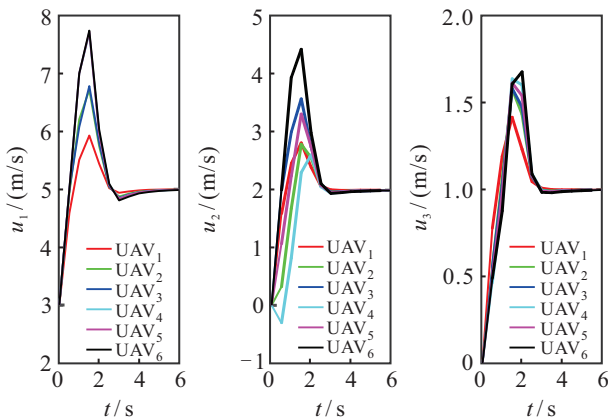


图7 控制输入

综上,基于仿真效果分析,基本验证了将所设计的分布式模型预测控制器应用于多四旋翼编队飞行控制问题的有效性,同时也验证了通过引入自身和邻居的假设状态轨迹来设计代价函数,相比不引入,能使得编队队形具有更快的收敛速度.

### 5 结论

本文针对多四旋翼无人机编队控制中的队形形成与保持问题,建立了线性时不变系统模型,采用 DMPC 方法为编队中的每架无人机设计了控制器,在目标函数中引入自身及邻居的假设状态轨迹,以更快地消除队形误差,使得多无人机能够在跟踪各自期望轨迹的过程中快速形成队形并保持队形飞行.通过引入终端等式约束,给出了编队系统渐近稳定的充分条件.最后利用仿真验证了控制算法的有效性.

### 参考文献(References)

- [1] 沈林成,牛轶峰,朱华勇.多无人机自主协同控制理论与方法[M].第2版.北京:国防工业出版社,2018:1-8. (Shen L C, Niu Y F, Zhu H Y. Theories and methods of autonomous cooperative control for multiple UAVs[M]. The 2nd edition. Beijing: National Defense Industry Press, 2018: 1-8.)
- [2] 梁晓龙,张佳强,吕娜.无人机集群[M].西安:西北工业大学出版社,2018:40-49. (Liang X L, Zhang J Q, Lv N. UAV swarms [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2018: 40-49.)
- [3] Kotov K Y, Mal'Tsev A S, Nesterov A A, et al. Decentralized control of quadrotors in a leader—follower formation[J]. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, 2017, 53(1): 21-25.
- [4] Kownacki C. Multi-UAV flight using virtual structure combined with behavioral approach[J]. Acta Mechanica et Automatica, 2016, 10(2): 92-99.
- [5] 邱华鑫,段海滨,范彦铭.基于鸽群行为机制的多无人机自主编队[J].控制理论与应用,2015,32(10): 1298-1304. (Qiu H X, Duan H B, Fan Y M. Multiple unmanned aerial vehicle autonomous formation based on the behavior mechanism in pigeon flocks[J]. Control Theory & Applications, 2015, 32(10): 1298-1304.)
- [6] 王祥科,刘志宏,丛一睿,等.小型固定翼无人机集群综述和未来发展[J].航空学报,2020,41(4): 20-45. (Wang X K, Liu Z H, Cong Y R, et al. Miniature fixed-wing UAV swarms: Review and outlook[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2020, 41(4): 20-45.)
- [7] 贾永楠,田似营,李擎.无人机集群研究进展综述[J].航空学报,2020,41(S1): 4-14.

- (Jia Y N, Tian S Y, Li Q. Recent development of unmanned aerial vehicle swarms[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2020, 41(S1): 4-14.)
- [8] 赖云晖, 李瑞, 史莹晶, 等. 基于图论法的四旋翼三角形结构编队控制[J]. *控制理论与应用*, 2018, 35(10): 1530-1537.  
(Lai Y H, Li R, Shi Y J, et al. On the study of a multi-quadrotor formation control with triangular structure based on Graph theory[J]. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(10): 1530-1537.)
- [9] Dong X W, Zhou Y, Ren Z, et al. Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles with switching interaction topologies[J]. *Control Engineering Practice*, 2016, 46: 26-36.
- [10] Cai Z H, Wang L H, Zhao J, et al. Virtual target guidance-based distributed model predictive control for formation control of multiple UAVs[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 33(3): 1037-1056.
- [11] 郑毅, 李少远. 网络信息模式下分布式系统协调预测控制[J]. *自动化学报*, 2013, 39(11): 1778-1786.  
(Zheng Y, Li S Y. Networked cooperative distributed model predictive control for dynamic coupling systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(11): 1778-1786.)
- [12] Kuriki Y, Namerikawa T. Formation control with collision avoidance for a multi-UAV system using decentralized MPC and consensus-based control[J]. *Sice Journal of Control Measurement & System Integration*, 2015, 8(4): 285-294.
- [13] 邵壮, 祝小平, 周洲, 等. 三维动态环境下多无人机编队分布式保持控制[J]. *控制与决策*, 2016, 31(6): 1065-1072.  
(Shao Z, Zhu X P, Zhou Z, et al. Distributed formation keeping control of UAVs in 3-D dynamic environment[J]. *Control and Decision*, 2016, 31(6): 1065-1072.)
- [14] 罗捷, 鲁良叶, 何德峰, 等. 通信拓扑切换下车辆队列分布式模型预测控制[J]. *控制理论与应用*, 2021, 38(7): 887-896.  
(Luo J, Lu L Y, He D F, et al. Distributed model predictive control of vehicle platoons with switching communication topologies[J]. *Control Theory & Applications*, 2021, 38(7): 887-896.)
- [15] Zheng Y, Li S E, Li K, et al. Distributed model predictive control for heterogeneous vehicle platoons under unidirectional Topologies[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, 25(3): 899-910.
- [16] 郑洋. 基于四元素构架的车辆队列动力学建模与分布式控制[D]. 北京: 清华大学, 2015: 84-102.  
(Zheng Y. Dynamic modeling and distributed control of vehicular platoon under the four-component framework[D]. Beijing: Tsinghua University, 2015: 84-102.)
- [17] Quan Q, Fu R, Cai K Y. Practical control for multicopters to avoid non-cooperative moving obstacles[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2021, 6558(99): 1-19.
- [18] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2002: 122.  
(Zheng D Z. Linear system theory[M]. The 2nd edition. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 122.)
- [19] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 655-661.
- [20] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789-814.
- [21] Keviczky T, Borrelli F, Balas G J. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems[J]. *Automatica*, 2006, 42(12): 2105-2115.

## 作者简介

赵超轮(1995—), 男, 博士生, 从事飞行器控制、编队控制技术的研究, E-mail: chaolunzhao95@163.com;

戴邵武(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 从事组合导航、惯性导航技术等研究, E-mail: daiswhy@163.com;

赵国荣(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器控制、导航技术等研究, E-mail: GRZhao6881@163.com;

高超(1985—), 男, 工程师, 博士, 从事飞行器导航、组网导航技术等研究, E-mail: gaochao.shd@163.com;

刘帅(1990—), 男, 工程师, 博士, 从事飞行器导航、滚动时域估计技术等研究, E-mail: 15165714808@163.com.

(责任编辑: 闫妍)