

控制与决策

Control and Decision

切换非线性正系统的有限时间稳定性

刘婷婷, 杨轩, 黄丽琼

引用本文:

刘婷婷, 杨轩, 黄丽琼. 切换非线性正系统的有限时间稳定性[J]. 控制与决策, 2022, 37(7): 1915–1920.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0092>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于模型依赖驻留时间的异步切换控制

Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time
控制与决策. 2021, 36(3): 609–618 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0645>

基于T-S模糊模型的多时滞非线性网络切换控制系统非脆弱 H_∞ 控制

Non-fragile H_∞ control for multi-delay nonlinear network switching control system based on T-S model
控制与决策. 2021, 36(5): 1087–1094 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1098>

基于反馈无源化的切换非线性系统 H_∞ 跟踪控制

Passification-based H_∞ tracking control for a class of switched nonlinear systems
控制与决策. 2021, 36(11): 2729–2734 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0798>

参数不确定离散时间系统的有限时间输出反馈预见控制器设计

Design of finite-time output feedback preview controller for discrete-time systems with parameter uncertainty
控制与决策. 2021, 36(9): 2074–2084 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1584>

基于周期动态事件触发的网络化切换系统的分析与控制

The analysis and control for networked switched systems based on periodic event-trigger
控制与决策. 2021, 36(10): 2467–2474 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0281>

切换非线性正系统的有限时间稳定性

刘婷婷^{1†}, 杨 轩¹, 黄丽琼²

(1. 西安工程大学 理学院, 西安 710048; 2. 商洛学院 数学与计算机应用学院, 陕西 商洛 726000)

摘要: 研究模型依赖平均驻留时间 (MDADT) 切换信号下一类齐次度为 1 的切换非线性正系统的有限时间稳定问题. 首先, 通过构造恰当的切换最大分离 Lyapunov 函数, 借助于 Dini 导数, 基于 MDADT 切换信号, 给出切换非线性正系统有限时间稳定的充分条件. 与已有的指数稳定性结果相比, 进一步说明有限时间稳定与指数稳定的区别. 其次, 将所得结论应用于切换线性正系统, 得到切换线性正系统在 MDADT 或平均驻留时间 (ADT) 切换信号下有限时间稳定的充分条件. 最后, 通过仿真算例验证所得结论的有效性.

关键词: 有限时间稳定; 非线性; 正系统; 模型依赖; 平均驻留时间; 切换最大分离 Lyapunov 函数

中图分类号: TP13

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0092

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 刘婷婷, 杨轩, 黄丽琼. 切换非线性正系统的有限时间稳定性[J]. 控制与决策, 2022, 37(7): 1915-1920.

Finite-time stability of switched nonlinear positive systems

LIU Ting-ting^{1†}, YANG Xuan¹, HUANG Li-qiong²

(1. School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China; 2. School of Mathematics and Computer Application, Shangluo University, Shangluo 726000, China)

Abstract: In this paper, the finite-time stability for a class of switched nonlinear positive systems of degree one is investigated under the mode-dependent average dwell time (MDADT) switching signal. Firstly, by constructing an appropriate switched max-type separate Lyapunov function, based on the MDADT switching signal, a sufficient condition for the finite-time stability of the switched nonlinear positive systems is given with the aid of Dini derivative. Comparison with the existing results of exponential stability, it further illustrates the difference between finite-time stability and exponential stability. Secondly, the result is applied to the switched linear positive systems, and some sufficient conditions for the finite-time stability of the switched linear positive systems under MDADT or average dwell time (ADT) switching signals are obtained. Finally, the simulation examples are given to illustrate the effectiveness of the conclusion.

Keywords: finite-time stability; nonlinearity; positive system; mode-dependent; average dwell time; switched max-type separate Lyapunov function

0 引言

在生物、物理、化学、经济及其他领域中,总会遇到一些值为非负的状态变量,如人类或动物的种群数量、物体质量、物质密度、反应物浓度、需求量、供应量、价格大小、车辆数等. 由这类状态变量所描述的控制系统称为正系统^[1],它是指当系统初始状态和控制输入都是非负时,系统的状态和输出恒为非负. 近几十年来,关于正系统的稳定性问题已经得到了广泛的研究^[2-7].

近些年,由有限个正子系统和一个切换信号所组成的切换正系统受到了人们的普遍关注. 研究表

明,切换信号在一定程度上影响着系统的稳定性,即使是稳定子系统之间的切换也会导致整个系统不稳定,同样,通过构造恰当的切换信号,也可以使由不稳定子系统组成的切换系统稳定^[8]. 借助于共同余正 (copositive) Lyapunov 函数,切换线性正系统在任意切换信号下的稳定性问题得到了很好的讨论^[9-11]. 然而,许多实际的切换正系统并不能保证在任意切换下的稳定性,因此,受限切换信号已逐渐应用到切换正系统的研究中,如最小驻留时间 (MDT)、ADT 以及 MDADT 切换信号^[12-15]等.

目前,关于切换正系统的研究结果大部分都是针

收稿日期: 2021-01-17; 录用日期: 2021-04-21.

基金项目: 陕西省自然科学基金基础研究计划项目 (2021JQ-657, 2020JQ-831); 陕西省重点研发计划项目 (2020GY-072); 陕西省教育厅自然科学基金项目 (17JK0340); 西安工程大学博士启动金项目 (BS1619).

责任编辑: 解学军.

[†]通讯作者. E-mail: liutingting@xpu.edu.cn.

对于系统是线性系统的情形. 对于子系统是非线性情形, 文献[16-17]研究了切换非线性正系统在MDT切换信号下指数稳定性. 文献[18]将文献[19]中的结论推广到带有外部输入的切换非线性正系统中, 得到了其在ADT切换信号下指数稳定的充要条件. 文献[20]研究了切换非线性正系统在MDADT下的指数稳定性.

一般情况下, Lyapunov渐近稳定(LAS)或指数稳定(ES)能够满足实际应用的需求, 它们主要描述的是系统在一个无限时间区间内的动态行为. 然而, 在某些情况下, 还需要关注系统在一段有限时间内的动态行为. 例如在化学反应过程中, 要求温度、压强或一些其他变量在指定时间区间内不超过指定的界, 这就产生了有限时间稳定(FTS)的概念. 它是指在一个指定的时间区间内, 给定系统初始条件的界, 则系统的状态在有限时间内不能超过一个给定的阈值^[21]. 需要指出的是, FTS和LAS(或ES)是两个完全独立的概念: 一个FTS的系统可能不是LAS(或ES)的, 反之亦然. 就作者所知, 目前关于切换非线性正系统在MDADT切换信号下的FTS并没有得到讨论, 这也是本文的一个研究动机.

本文旨在研究一类切换非线性正系统的有限时间稳定问题. 主要贡献如下: 1) 通过构造适当的切换最大分离Lyapunov函数, 基于MDADT切换信号, 得到一类齐次度为1的切换非线性正系统有限时间稳定的充分条件, 与文献[20]中得到的指数稳定的结论相比, 可进一步说明FTS与ES的区别; 2) 将该结论应用到切换线性正系统中, 与基于ADT切换信号得到的结论相比, 可以降低结论的保守性.

1 系统描述及预备知识

首先给出本文用到的记号: $\mathbf{R}^{n \times m}(\mathbf{R}_+^{n \times m})$ 和 $\mathbf{R}^n(\mathbf{R}_+^n)$ 分别表示 $n \times m$ 维(非负)实矩阵所组成的集合以及 n 维(非负)实向量空间. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, x_i 表示向量 \mathbf{x} 的第 i 个坐标, 即 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$) 表示 $x_i > y_i$ ($x_i < y_i$, $x_i \geq y_i$, $x_i \leq y_i$), $\forall 1 \leq i \leq n$. 如果矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 的所有非对角元素都是非负的, 则称矩阵 A 为 Metzler 矩阵. 一个连续函数 $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 的右上 Dini 导数定义为

$$D^+h(t) = \limsup_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{h(t+\Delta) - h(t)}{\Delta}.$$

考虑如下切换非线性系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{\sigma(t)}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态; $t_0 \geq 0$ 是系统的

初始时刻; \mathbf{x}_0 是系统的初始状态; $\sigma(t): [t_0, \infty) \rightarrow \mathcal{M} = \{1, 2, \dots, N\}$ 是关于时间 t 的右连续分段常值函数, N 表示子系统的个数, $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ 表示 $\sigma(t)$ 的切换时刻. $\forall p \in \mathcal{M}$, $\mathbf{f}_p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 上连续可微的向量值函数.

定义1 如果对于任意的初始条件 $\mathbf{x}_0 \succeq 0$ 以及任意的切换信号 $\sigma(t)$, 系统(1)的状态满足 $\mathbf{x}(t) \succeq 0$, $\forall t \geq t_0$, 则称切换非线性系统(1)是正的.

定义2^[22] 若向量场 $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 在 $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 是连续可微的, 且 $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{R}_+^n \setminus \{0\}$, 雅可比矩阵 $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})$ 是 Metzler 的, 则称 \mathbf{f} 是协同(cooperative)向量场.

定义3^[22] 设 $\alpha > 0$, 如果向量场 $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 满足 $\mathbf{f}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^\alpha \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\forall \lambda > 0$, 则称向量场 \mathbf{f} 的齐次度为 α . 特别地, $\alpha = 1$ 时, \mathbf{f} 的齐次度为 1.

引理1 如果对于任意的 $p \in \mathcal{M}$, \mathbf{f}_p 在 \mathbf{R}_+^n 上是协同向量场, 则系统(1)是正的.

注1 利用文献[23]的命题3.3可直接得到引理1.

定义4^[13] 给定切换信号 $\sigma(t)$, 对于任意的 $t \geq t_0 \geq 0$, 设 $N_{\sigma p}(t, t_0)$ 和 $T_p(t, t_0)$ 分别表示第 p 个子系统在区间 $[t_0, t)$ 内被激活的次数和运行时间, $p \in \mathcal{M}$. 如果存在常数 $\tau_{ap} > 0$, $N_{0p} \geq 0$, 使得不等式

$$N_{\sigma p}(t, t_0) \leq N_{0p} + \frac{T_p(t, t_0)}{\tau_{ap}}, p \in \mathcal{M} \quad (2)$$

成立, 则称 τ_{ap} 为切换信号 $\sigma(t)$ 的模型依赖平均驻留时间(MDADT), N_{0p} 为模型依赖抖振界.

引理2^[23] 设 $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个协同向量场, 则对于任意的两个向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 且 $x_i = y_i$, $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$, 有 $f_i(\mathbf{x}) \succeq f_i(\mathbf{y})$.

在接下来的讨论中, 总是假设下面的条件成立.

假设1 1) 对于任意的 $p \in \mathcal{M}$, \mathbf{f}_p 在 \mathbf{R}^n 上连续, 在 $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 上连续可微且齐次度为 1;

2) 对于任意的 $p \in \mathcal{M}$, \mathbf{f}_p 在 \mathbf{R}_+^n 上是协同向量场.

注2 假设1保证了对于任意的 $p \in \mathcal{M}$, $\mathbf{f}_p(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$; 假设1的1)保证了系统(1)存在唯一解; 假设1的2)保证了系统(1)是正的, 即 $\forall \mathbf{x}_0 \succeq 0$, 有 $\mathbf{x}(t) \succeq 0$, $\forall t \geq t_0$.

定义5 给定两个正常数 c_1, c_2 且 $c_1 < c_2$, 一个 n 维实向量 $\mathbf{l} \succ 0$ 以及一个切换信号 $\sigma(t)$, 如果系统(1)的状态满足

$$\mathbf{x}^T(t_0)\mathbf{l} \leq c_1 \Rightarrow \mathbf{x}^T(t)\mathbf{l} \leq c_2, t \in [t_0, T], \quad (3)$$

则称切换非线性正系统(1)关于 $(t_0, T, c_1, c_2, \mathbf{l}, \sigma(t))$ 是有限时间稳定的.

2 主要结论

本节主要通过构造如下切换最大分离 Lyapunov 函数研究切换非线性正系统(1)的有限时间稳定性:

$$V_{\sigma(t)}(t) = \max_{1 \leq i \leq n} \{V_{\sigma(t)i}(t)\} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{x_i(t)}{v_{\sigma(t)i}} \right\}. \quad (4)$$

其中: $V_{\sigma(t)i}(t) = \frac{x_i(t)}{v_{\sigma(t)i}}$, $v_{\sigma(t)i}$ 表示向量 $\mathbf{v}_{\sigma(t)}$ 的第 i 个元素, $i = 1, 2, \dots, n$. 其 Dini 导数具有如下形式.

引理3^[24] 对于任意的 $p \in \mathcal{M}$, $V_p(t)$ 沿系统(1)的解 $\mathbf{x}(t)$ 的右上 Dini 导数为

$$D^+V_p(t) = \max_{a \in A_x(t)} \left\{ \frac{\dot{x}_a(t)}{v_{pa}} \right\}. \quad (5)$$

其中: $A_x(t) = \{a \in \{1, 2, \dots, n\} | V_{pa}(t) = V_p(t)\}$, a 是 t 的函数.

为了讨论方便, 不失一般性, 设 $N_{0p} = 0$, $p \in \mathcal{M}$.

定理1 设切换非线性系统(1)满足假设1, 给定正常数 T 、 c_1 、 c_2 且 $c_1 < c_2$ 以及一个 n 维实向量 $\mathbf{l} \succ \mathbf{0}$, 如果存在正常数 λ_1 、 λ_2 和一组向量 \mathbf{v}_p 满足 $\lambda_1 \mathbf{l} \preceq \mathbf{v}_p \preceq \lambda_2 \mathbf{l}$, $\forall p \in \mathcal{M}$, 则当 MDADT 切换信号 $\sigma(t)$ 满足

$$\begin{aligned} \tau_{ap} &\geq \tau_{ap}^* = \frac{(T - t_0) \ln \mu_p}{\ln \vartheta - \eta_p(T - t_0)}, \\ \left(\frac{\ln \mu_p}{\tau_{ap}} + \eta_p \right) (T - t_0) &\geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

时, 系统(1)是正的且关于 $(t_0, T, c_1, c_2, \mathbf{l}, \sigma(t))$ 是有限时间稳定的. 其中

$$\vartheta = \frac{\lambda_1 c_2 v_{\min}^2}{\lambda_2 c_1 \sum_{i=1}^n \bar{v}_i^2},$$

$$v_{\min} = \min_{p \in \mathcal{M}, 1 \leq i \leq n} \{v_{pi}\}, \quad \bar{v}_i = \max_{p \in \mathcal{M}} \{v_{pi}\}.$$

$\forall p \in \mathcal{M}$, 有

$$\eta_p = \max_{1 \leq i \leq n} \{\eta_{pi}\}, \quad \eta_{pi} = \frac{f_{pi}(\mathbf{v}_p)}{v_{pi}}. \quad (7)$$

$\mu_q > 1$ 满足

$$\mathbf{v}_p \preceq \mu_q \mathbf{v}_q, \quad \forall p, q \in \mathcal{M}, p \neq q. \quad (8)$$

证明 由假设1和注2知, 系统(1)是正的, 即 $\mathbf{x}(t) \succeq \mathbf{0}$, $\forall t \geq t_0$. 下面证明其是有限时间稳定的. 选取切换最大分离 Lyapunov 函数(4), 有

$$\mathbf{x}(t) \preceq V_{\sigma(t)}(t) \mathbf{v}_{\sigma(t)}. \quad (9)$$

设 $\sigma(t) = p$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, 由引理3可知, 一定存在 $h \in \{a \in \{1, 2, \dots, n\} | V_{pa}(t) = V_p(t)\}$, 使得

$$D^+V_p(t) = \max_{a \in A_x(t)} \left\{ \frac{\dot{x}_a(t)}{v_{pa}} \right\} = \frac{\dot{x}_h(t)}{v_{ph}}, \quad (10)$$

且 $V_p(t) = V_{ph}(t) = \frac{x_h(t)}{v_{ph}}$, 即 $x_h(t) = V_p(t)v_{ph}$. 结合式(9)及引理2可知

$$f_{ph}(\mathbf{x}(t)) \leq V_p(t)f_{ph}(\mathbf{v}_p). \quad (11)$$

因此, 由式(7)有

$$\begin{aligned} D^+V_p(t) &= \frac{\dot{x}_h(t)}{v_{ph}} = \frac{f_{ph}(\mathbf{x}(t))}{v_{ph}} \leq \\ &= \frac{f_{ph}(\mathbf{v}_p)}{v_{ph}} V_p(t) = \\ &= \eta_{ph} V_p(t) \leq \eta_p V_p(t). \end{aligned}$$

所以 $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, 有

$$V_{\sigma(t)}(t) \leq V_{\sigma(t_k)}(t_k) e^{\eta_{\sigma(t_k)}(t-t_k)}. \quad (12)$$

另一方面, 根据式(8)可知

$$\frac{x_i(t_k)}{v_{pi}} = \frac{v_{qi}}{v_{pi}} \cdot \frac{x_i(t_k)}{v_{qi}} \leq \mu_p V_q(t_k^-).$$

结合式(4), 有

$$V_{\sigma(t_k)}(t_k) \leq \mu_{\sigma(t_k)} V_{\sigma(t_{k-1})}(t_k^-). \quad (13)$$

因此, 由不等式(12)和(13)可知, $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, 有

$$\begin{aligned} V_{\sigma(t)}(t) &\leq V_{\sigma(t_k)}(t_k) e^{\eta_{\sigma(t_k)}(t-t_k)} \leq \\ &= \mu_{\sigma(t_k)} V_{\sigma(t_{k-1})}(t_k^-) e^{\eta_{\sigma(t_k)}(t-t_k)} \leq \dots \leq \\ &= \prod_{p=1}^N \mu_p^{N_{\sigma_p}(t, t_0)} \cdot \prod_{p=1}^N e^{\eta_p T_p(t, t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \leq \\ &= e^{\sum_{p=1}^N \left[\left(\frac{\ln \mu_p}{\tau_{ap}} + \eta_p \right) T_p(t, t_0) \right]} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \leq \\ &= e^{\varepsilon(t-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0). \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon = \max_{p \in \mathcal{M}} \left\{ \frac{\ln \mu_p}{\tau_{ap}} + \eta_p \right\}$. 结合式(6)可知

$$\begin{aligned} \varepsilon(T - t_0) &\leq \\ \max_{p \in \mathcal{M}} \left\{ \frac{\ln \mu_p [\ln \vartheta - \eta_p(T - t_0)]}{(T - t_0) \ln \mu_p} + \eta_p \right\} (T - t_0) &= \ln \vartheta. \end{aligned}$$

设 $\mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{l} \leq c_1$, $h_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得

$$V_{\sigma(t_0)}(t_0) = V_{\sigma(t_0)h_0}(t_0) = \frac{x_{h_0}(t_0)}{v_{\sigma(t_0)h_0}}.$$

由 $\lambda_1 \mathbf{l} \preceq \mathbf{v}_p \preceq \lambda_2 \mathbf{l}$ 可知

$$\begin{aligned} x_{h_0}(t_0) v_{\sigma(t_0)h_0} &\leq \\ \sum_{i=1}^n x_i(t_0) v_{\sigma(t_0)i} &= \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{v}_{\sigma(t_0)} \leq \\ \lambda_2 \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{l} &\leq \lambda_2 c_1. \end{aligned}$$

从而

$$V_{\sigma(t_0)}(t_0) = \frac{x_{h_0}(t_0)}{v_{\sigma(t_0)h_0}} = \frac{x_{h_0}(t_0) v_{\sigma(t_0)h_0}}{v_{\sigma(t_0)h_0}^2} \leq \frac{\lambda_2 c_1}{v_{\min}^2},$$

其中 $v_{\min} = \min_{p \in \mathcal{M}, 1 \leq i \leq n} \{v_{pi}\}$. 结合式(9)可知, $\forall t \in [t_0, T]$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{l} &\leq \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{v}_{\sigma(t)} \leq \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{v}_{\sigma(t)}^T \mathbf{v}_{\sigma(t)} V_{\sigma(t)}(t) \leq \\ &\frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^n \bar{v}_i^2 e^{\varepsilon(T-t_0)} V_{\sigma(t_0)}(t_0) \leq \\ &\frac{\sum_{i=1}^n \bar{v}_i^2}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1 c_2 v_{\min}^2}{\lambda_2 c_1 \sum_{i=1}^n \bar{v}_i^2} \cdot \frac{\lambda_2 c_1}{v_{\min}^2} = c_2, \end{aligned}$$

其中 $\bar{v}_i = \max_{p \in \mathcal{M}} \{v_{pi}\}$. 因此, 切换非线性正系统(1)关于 $(t_0, T, c_1, c_2, \mathbf{l}, \sigma(t))$ 是有限时间稳定的. \square

注3 文献[20]中给出了切换非线性正系统在MDADT指数稳定的充分条件, 要求 $\eta_{pi} = \frac{f_{pi}(\mathbf{v}_p)}{v_{pi}} < 0$. 而定理1给出的有限时间稳定的充分条件中, 并没有这一限制条件.

注4 当切换非线性正系统(1)只有一个子系统时, 即 $\forall p \in \mathcal{M}, \mathbf{f}_p(\mathbf{v}_p) = \mathbf{f}(\mathbf{v})$, 可得与文献[24]相似的结论. 而由文献[22]可知, 如果 $\mathbf{f}(\mathbf{v}) \succ 0$, 则系统(1)不是全局指数稳定的, 但由定理1可知, 其可能是有限时间稳定的. 这也说明了有限时间稳定的可能并不是指数稳定的.

设 $\mathbf{f}_p(\mathbf{x}) = A_p \mathbf{x}, A_p = [a_{pij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是 Metzler 矩阵, 则系统(1)变为如下的切换线性正系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (14)$$

对于系统(14), 有如下推论.

推论1 考虑切换线性正系统(14), 其中 $A_p = [a_{pij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是 Metzler 矩阵. 给定正常数 T, c_1, c_2 且 $c_1 < c_2$ 以及一个 n 维实向量 $\mathbf{l} \succ 0$, 设 η_p^* 是给定的常数, 如果存在正常数 λ_1, λ_2 和一组向量 \mathbf{v}_p , 使得 $\forall p \in \mathcal{M}, \lambda_1 \mathbf{l} \preceq \mathbf{v}_p \preceq \lambda_2 \mathbf{l}$ 且

$$A_p \mathbf{v}_p - \eta_p^* \mathbf{v}_p \preceq 0, \quad (15)$$

则当MDADT切换信号 $\tilde{\sigma}(t)$ 满足

$$\begin{aligned} \tau_{ap} &\geq \frac{(T-t_0) \ln \mu_p}{\ln \vartheta - \eta_p^*(T-t_0)} \text{ 且} \\ \left(\frac{\ln \mu_p}{\tau_{ap}} + \eta_p^* \right) (T-t_0) &\geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

时, 系统(14)关于 $(t_0, T, c_1, c_2, \mathbf{l}, \tilde{\sigma}(t))$ 是有限时间稳定的. 其中: ϑ 与定理1中的相同, $\mu_p > 1$ 满足式(8).

证明 记 $\eta_p = \max_{1 \leq i \leq n} \{\eta_{pi}\}$, 其中

$$\eta_{pi} = \frac{f_{pi}(\mathbf{v}_p)}{v_{pi}} = \frac{\sum_{j=1}^n a_{pij} v_{pj}}{v_{pi}}.$$

即 η_p 满足式(7), 并且由式(15)可知, $\eta_p^* \geq \eta_p$. 结合式(16)及定理1可知, 系统(14)关于 $(t_0, T, c_1, c_2, \mathbf{l}, \tilde{\sigma}(t))$ 是有限时间稳定的. \square

若推论1中的 $\mu_p = \mu, \eta_p^* = \eta^*$, 类似于文献[25], 可以得到其在ADT切换信号下的结论.

推论2 考虑切换线性正系统(14), 其中 $A_p = [a_{pij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是 Metzler 矩阵. 给定正常数 T, c_1, c_2 且 $c_1 < c_2$ 以及一个 n 维实向量 $\mathbf{l} \succ 0$, 设 η^* 是给定的常数, 如果存在正常数 λ_1, λ_2 和一组向量 \mathbf{v}_p , 使得 $\forall p \in \mathcal{M}, \lambda_1 \mathbf{l} \preceq \mathbf{v}_p \preceq \lambda_2 \mathbf{l}$ 且

$$A_p \mathbf{v}_p - \eta^* \mathbf{v}_p \preceq 0,$$

则当ADT切换信号 $\check{\sigma}(t)$ 满足

$$\tau_a \geq \frac{(T-t_0) \ln \mu}{\ln \vartheta - \eta^*(T-t_0)} \text{ 且 } \left(\frac{\ln \mu}{\tau_a} + \eta^* \right) (T-t_0) \geq 0$$

时, 切换线性正系统(14)关于 $(t_0, T, c_1, c_2, \mathbf{l}, \check{\sigma}(t))$ 是有限时间稳定的. 其中: ϑ 与定理1中的相同, $\mu > 1$ 满足 $\mathbf{v}_p \preceq \mu \mathbf{v}_q, \forall p, q \in \mathcal{M}, p \neq q$.

注5 对比MDADT和文献[25]中ADT的定义可以发现, MDADT切换信号只要求每个子系统的ADT不小于 τ_{ap} , 而ADT切换信号在相邻切换的平均时间区间不小于 τ_a , 因此, 推论1比推论2所得结论的保守性更低.

3 数值算例

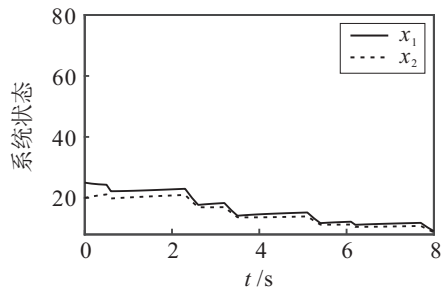
例1 考虑切换非线性正系统(1), 其中

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1.38 & 0.8 \\ 0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix},$$

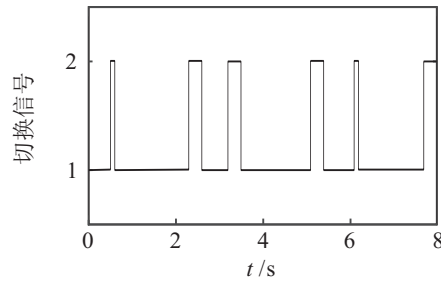
$$\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1.8 & 0.7 \\ 0.7 & -1.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}.$$

设 $\mathbf{l} = [1 \ 1]^T, t_0 = 0, T = 8, c_1 = 2, c_2 = 50$, 取 $\mathbf{v}_1 = [1.3 \ 1.3]^T, \mathbf{v}_2 = [1.5 \ 1.5]^T, \lambda_1 = 1.3, \lambda_2 = 1.5$, 计算可知, $\eta_{11} = 0.1271, \tau_{a1}^* = 1.0998, \tau_{a2}^* = 0.1757$. 选取 $\tau_{a1} = 1.1, \tau_{a2} = 0.2$, 则 τ_{a1} 和 τ_{a2} 满足式(6). 设 $\mathbf{x}_0 = [25 \ 20]^T$, 图1和图2分别给出了切换非线性正系统(1)的状态响应曲线和 $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{l}$ 的值.

由图1和图2可以看出, 系统(1)可能不是LAS(或ES)的, 但它在 $[0, 8]$ 上的值不超过 $c_2 = 50$, 即系统(1)关于 $(0, 8, 2, 50, [1 \ 1], \sigma(t))$ 是有限时间稳定的. 这就表明了有限时间稳定的系统可能不是LAS(或ES)的. 另一方面, 由计算结果 $\eta_{11} = 0.1271 > 0$ 及文献[20]中的结论可知, 切换非线性正系统(1)可能不是指数稳定的. 但由定理1可知, 其是有限时间稳定的. 这也进一步说明了指数稳定与有限时间稳定的区别.



(a) 系统状态曲线



(b) 切换信号曲线

图1 系统(1)的状态响应曲线

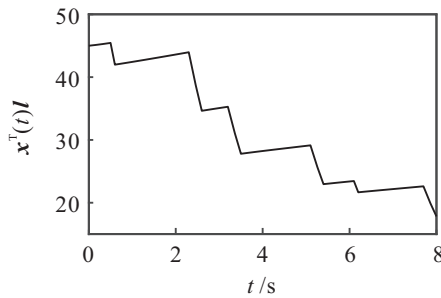


图2 $x^T(t)l$ 的值

例2 考虑切换线性正系统(14),其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0.5 & -0.3 \end{bmatrix}.$$

设 $l = [1 \ 1]^T, t_0 = 0, T = 8, c_1 = 1, c_2 = 50$, 表1给出了推论1中利用MDADT切换信号和推论2中利用ADT切换信号所得的结果。

表1 推论1和推论2的计算结果

	MDADT(推论1)	ADT(推论2)
可行解	$v_1 = [1.4038 \ 1.6780]^T$ $v_2 = [1.5147 \ 1.6361]^T$	$v_1 = [1.4038 \ 1.6780]^T$ $v_2 = [1.5000 \ 1.5000]^T$
切换参数	$\eta_1 = 0.2, \mu_1 = 1.0790$ $\eta_2 = 0.3, \mu_2 = 1.0256$	$\eta = 0.2, \mu = 1.1187$
驻留时间	$\tau_{a1} = 0.5149$ $\tau_{a2} = 0.5309$	$\tau_a = 0.7541$

从表1可以看出,MDADT切换信号中的 $\tau_{a1} = 0.5149, \tau_{a2} = 0.5309$ 均小于ADT切换信号中的 $\tau_a = 0.7541$, 表明推论1所得结论比推论2的保守性更低。

4 结论

本文通过选取恰当的切换最大分离Lyapunov函数,利用MDADT切换信号,得到了一类齐次度为1的切换非线性正系统有限时间稳定的充分条件.与文献[20]所得的指数稳定性结果比较,说明了有限时间稳定的系统可能不是指数稳定的.进一步,将该结论应用到切换线性正系统中,得到了切换线性正系统在MDADT和ADT切换信号下有限时间稳定的充分条件.相比于利用ADT切换信号得到的结论,MDADT具有更大的适用范围,降低了结论的保守性.最后通过两个数值算例验证了本文结论的有效性。

参考文献(References)

- [1] Luenberger D G. Introduction to dynamic systems[M]. New York: Wiley, 1979: 188.
- [2] Farina L, Rinaldi S. Positive linear systems: Theory and application[M]. New York: Wiley, 2000: 1-5.
- [3] Benvenuti L, Farina L. Positive and compartmental systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(2): 370-373.
- [4] Haddad W M, Chellaboina V. Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay[J]. Systems & Control Letters, 2004, 51(5): 355-361.
- [5] Liu L J, Karimi H R, Zhao X D. New approaches to positive observer design for discrete-time positive linear systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(10): 4336-4350.
- [6] Qi W H, Park J H, Cheng J, et al. Exponential stability and L_1 -gain analysis for positive time-delay Markovian jump systems with switching transition rates subject to average dwell time[J]. Information Sciences, 2018, 424: 224-234.
- [7] Cui Y K, Shen J, Chen Y. Stability analysis for positive singular systems with distributed delays[J]. Automatica, 2018, 94: 170-177.
- [8] 通雁辉. 线性切换正系统的分析与综合[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.
(Tong Y H. Analysis and synthesis of switched positive linear systems[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2013.)
- [9] Gurvits L, Shorten R, Mason O. On the stability of switched positive linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(6): 1099-1103.
- [10] Fornasini E, Valcher M E. Linear copositive Lyapunov functions for continuous-time positive switched systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(8): 1933-1937.
- [11] Zhao X D, Liu X W, Yin S, et al. Improved results on stability of continuous-time switched positive linear systems[J]. Automatica, 2014, 50(2): 614-621.

- [12] Zhao X D, Zhang L X, Shi P, et al. Stability of switched positive linear systems with average dwell time switching[J]. *Automatica*, 2012, 48(6): 1132-1137.
- [13] Zhao X D, Zhang L X, Shi P, et al. Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(7): 1809-1815.
- [14] Zhang J, Han Z, Zhu F, et al. Stability and stabilization of positive switched systems with mode-dependent average dwell time[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2013, 9: 42-55.
- [15] 黄金杰, 郝现志, 潘晓真. 基于模型依赖驻留时间的异步切换控制[J]. *控制与决策*, 2021, 36(3): 609-618.
(Huang J J, Hao X Z, Pan X Z. Asynchronous switching control based on mode-dependent average dwell time[J]. *Control and Decision*, 2021, 36(3): 609-618.)
- [16] Tian D D, Liu S T. Exponential stability of switched positive homogeneous systems[J]. *Complexity*, 2017, 2017: 1-8.
- [17] Ma R C, An S. Minimum dwell time for global exponential stability of a class of switched positive nonlinear systems[J]. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2019, 6(2): 471-477.
- [18] Zhang N, Sun Y G, Meng F W. State bounding for switched homogeneous positive nonlinear systems with exogenous input[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2018, 29: 363-372.
- [19] Dong J G. Stability of switched positive nonlinear systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, 26(14): 3118-3129.
- [20] Tian Y Z, Sun Y G. Stability analysis of switched positive nonlinear systems by mode-dependent average dwell time method[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 15584-15589.
- [21] Zhang J F, Han Z Z, Wu H. Robust finite-time stability and stabilisation of switched positive systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(1): 67-75.
- [22] Feyzmahdavian H R, Charalambous T, Johansson M. Exponential stability of homogeneous positive systems of degree one with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(6): 1594-1599.
- [23] Yang H T, Zhang Y. Exponential stability of homogeneous impulsive positive delay systems of degree one[J]. *International Journal of Control*, 2021, 94(1): 75-88.
- [24] Yang H T, Zhang Y. Finite-time stability of homogeneous impulsive positive systems of degree one[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2019, 38(11): 5323-5341.
- [25] Zhang J F, Han Z Z, Zhu F B. Finite-time control and L_1 -gain analysis for positive switched systems[J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 2015, 36(4): 550-565.

作者简介

刘婷婷(1987—), 女, 讲师, 博士, 从事切换正系统的稳定性分析的研究, E-mail: liutingting@xpu.edu.cn;

杨轩(1980—), 男, 讲师, 博士, 从事智能优化及智能控制理论与应用的研究, E-mail: yangxuan@xpu.edu.cn;

黄丽琼(1987—), 女, 讲师, 硕士, 从事正系统稳定性的研究, E-mail: 564487708@qq.com.

(责任编辑: 李君玲)

下 期 要 目

- 室内定位中非视距的识别和抑制算法研究综述 齐小刚, 等
- 离散事件系统框架下信息物理系统攻击问题综述 王寿光, 等
- 基于DEA模型的区域旅游资源配置效率研究 李思迪, 等
- 基于无模型自适应控制的自动泊车方案 王文佳, 等
- 基于深度强化学习的多配送中心车辆路径规划 王万良, 等
- 一种并行LSTM-FCN模型在船舶航迹预测中的应用 胡丹, 等
- 基于小波精英解学习和多角度搜索的新型阴阳平衡优化算法 许秋艳, 等
- 面向多峰优化问题的自主学习萤火虫算法 赵嘉, 等
- 基于改进细菌觅食算法的飞控系统多模态参数优化 边琦, 等
- 基于多动作并行异步深度确定性策略梯度的选矿运行指标决策方法 李悄然, 等