控制与决策
Control and Decision

# 基于小波精英解学习和多角度搜索的新型阴阳平衡优化算法

许秋艳, 马良, 刘勇

引用本文:
许秋艳,马良,刘勇. 基于小波精英解学习和多角度搜索的新型阴阳平衡优化算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(8): 1962-1970.

在线阅读 View online: https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0251

# 基于小波精英解学习和多角度搜索的新型阴阳平衡优化算法

许秋艳[1,2†], 马 良[1], 刘 勇[1]

(1. 上海理工大学 管理学院，上海 200093；2. 盐城工学院 信息工程学院，江苏 盐城 224051)

**摘 要:** 针对基本阴阳平衡优化算法计算精度低和优化速度慢等问题,提出一种新型阴阳平衡优化算法. 首先,设计小波精英解学习策略,充分利用精英解的进化信息产生高质量的解,用于算法的全局勘探和局部开发;然后,将搜索角度引入解更新方程中,以实现对算法搜索空间的全方位搜索,并对所提出算法的收敛性进行理论分析;最后,采用连续优化测试函数和瓶颈旅行商问题进行数值实验,并将所提出算法与多种智能优化方法进行比较. 实验结果表明,所提出算法具有更好的优化性能.

**关键词:** 阴阳平衡优化算法；小波精英解；多角度搜索；最优化；智能计算

**中图分类号:** TP301.6 **文献标志码:** A

**DOI:** 10.13195/j.kzyjc.2021.0251

**引用格式:** 许秋艳, 马良, 刘勇. 基于小波精英解学习和多角度搜索的新型阴阳平衡优化算法 [J]. 控制与决策, 2022, 37(8): 1962-1970.

# A novel Yin-Yang pair optimization algorithm based on wavelet elite solutions learning and multi-angle search

*XU Qiu-yan*[1,2†], *MA Liang*[1], *LIU Yong*[1]

(1. School of Management，University of Shanghai for Science and Technology，Shanghai 200093，China；2. College of Information Engineering，Yancheng Institute of Technology，Yancheng 224051，China)

**Abstract:** In order to solve the problem of low calculation accuracy and slow convergence velocity of the Yin-Yang pair optimization (YYPO) algorithm, a novel YYPO (NYYPO) algorithm based on the wavelet elite solutions learning and multi-angle search is presented in this paper. Firstly, the strategy of wavelet elite solutions learning is proposed to make full use of the evolutionary information of elite solutions. High-quality solutions generated by this strategy are used in the global exploration and local exploitation of the algorithm. Then, the search angle is introduced into the solution update equation, which can realize the all-round search for the algorithm search space. The convergence of the proposed algorithm is analyzed. The continuous functions and the bottleneck traveling salesman problem are employed in the numerical experiments. The NYYPO is compared with many intelligent optimization algorithms. Experimental results demonstrate that the presented NYYPO algorithm has better optimization performance.

**Keywords:** Yin-Yang pair optimization algorithm；wavelet elite solutions；multi-angle search；optimization；intelligent computing

## 0 引 言

最近,Punnathanam 等[1] 研究中国传统文化——阴阳学说时,发现阴阳平衡和智能计算中的全局探索和局部开发间的均衡有相同之处,进而提出了一种新颖的智能优化算法——阴阳平衡优化 (Yin-Yang pair pptimization, YYPO) 算法. 现有智能优化方法如遗传算法、蚁群优化算法、人工蜂群优化算法、微粒群优化算法、禁忌搜索算法、模拟退火算法和自适应大邻域搜索算法等,其优化原理主要包括生物学规律、物理学规律和邻域搜索规则等. 也正因为受到这些优化原理的限制,在实际应用时这些优化方法会暴露其固有缺陷[2]. 因此,需要进一步完善智能优化算法的设计方法. 阴阳平衡优化算法不是对任何特定机制的模拟,而是期望能从阴阳平衡的角度实现全局搜索和局部搜索的均衡,为算法研究提供了别具特色的优化策略[3].

**收稿日期:** 2021-02-07；**录用日期:** 2021-06-03.

**基金项目:** 上海市“科技创新行动计划”软科学研究重点项目 (18692110500)；上海市哲学社会科学规划课题 (2019BGL014)；上海理工大学科技发展项目 (2020KJFZ040).

**责任编委:** 巩敦卫.

[†]通讯作者. E-mail: 44424072@qq.com.

近期的研究结果表明,在求解复杂困难的优化问题时,与其他智能优化算法一样,阴阳平衡优化算法也存在易陷入局部极值和优化速度慢等问题. 为此,文献[4]将微粒群优化算法引入到阴阳平衡优化算法中,进一步提高其计算精度. 文献[5]提出一种根据决策变量维数选择解更新方法的阴阳平衡优化算法,以提高算法的优化速度. 文献[6]提出一种混合阴阳平衡优化算法,将混沌搜索和错卦变换融入到算法中,以提高算法跳出局部极值的能力. 文献[7-9]也进行了类似的研究. 现有的研究工作在一定程度上解决了阴阳平衡优化算法的不足,但只是针对其部分缺点进行改进,对算法自身的搜索机制涉及的较少,无法同时提高算法的计算精度和收敛速度. 此外,作为一种新型智能优化算法,阴阳平衡优化算法的搜索潜力有待进一步挖掘. 为此,本文提出一种新型阴阳平衡优化(novel Yin-Yang pair optimization, NYYPO)算法. NYYPO构造一种小波精英解学习策略产生高质量的解,用于引导算法进行全局和局部的搜索;将搜索角度引入到全局勘探和局部开发中,从各个角度进行优化搜索. 大量的数值实验结果表明,在计算精度和收敛速度两方面,新型阴阳平衡优化算法NYYPO的优势显著.

## 1 基本阴阳平衡优化算法

阴阳平衡优化算法中,在半径为1的超球体内使用两个点$P_1$和$P_2$分别进行局部开发和全局勘探. 基于点$P_1$的搜索半径$\delta_1$会越来越小,有向内收缩的含义,与阴对应;基于点$P_2$的搜索半径$\delta_2$会越来越大,有向外扩展的含义,与阳对应. 在任何一种智能优化算法中,局部开发与全局勘探既互补又竞争,分别与阴阳互根和阴阳对立对应. 在计算过程中,不断加强基于点$P_1$和$P_2$的局部搜索和全局搜索,与阴阳皆长对应. 如果点$P_2$优于点$P_1$,则这两点互换,与阴阳交感对应. 算法反复进行基于点$P_1$和$P_2$的优化搜索,期望达到局部开发和全局搜索的平衡,与阴阳平衡对应. 具体实现时,阴阳平衡优化算法主要包括基于档案集的解更新和基于超球体的解更新两个阶段[1],以下分别给出两个阶段的主要内容.

### 1.1 基于档案集的解更新阶段

每次迭代时,算法将$P_1$和$P_2$两个点保存到档案集中. 每间隔$I$次迭代,便利用档案集中的$2I$个点对当前的$P_1$和$P_2$进行更新. 采用的更新方法如下: 首先从档案集中找出最好的点,并将该点与$P_1$进行比较,如果前者优于后者,则这两个点互换;然后从档案集中找出最好的点,并将该点与$P_2$进行比较,如果前者优于后者,则这两个点互换;最后将该档案集置为空集,并在上界$I_{\max}$与下界$I_{\min}$之间随机产生更新频率$I$.

此外,还对搜索半径$\delta_1$和$\delta_2$进行更新,计算方法如下:

$$\delta_1 = \delta_1 - (\delta_1/\alpha), \tag{1}$$

$$\delta_2 = \delta_2 + (\delta_2/\alpha), \tag{2}$$

其中$\alpha$为缩放因子.

### 1.2 基于超球体的解更新阶段

该阶段分别以$P_1$为中心$\delta_1$为半径、$P_2$为中心$\delta_2$为半径在超球体内进行局部搜索和全局搜索. 根据算法设计,两种搜索采用相同的解更新方程,为了表达方便,令$P$和$\delta$表示搜索中心和半径. 在进行解更新前,首先生成$2D$个完全相同的点$P$,分别用$\mathrm{NP}_1, \mathrm{NP}_2, \dots, \mathrm{NP}_{2D}$表示;然后对$2D$个点进行更新操作. 在算法中,可以对点的一个分量或者所有分量进行更新. 对点的一个分量更新方程如下:

$$\mathrm{NP}_k^j = \begin{cases} P^j + \delta \times \dfrac{r}{\sqrt{2}},\ k = 1, 2, \dots, D; \\ P^j - \delta \times \dfrac{r}{\sqrt{2}},\ k = D+1, D+2, \dots, 2D. \end{cases} \tag{3}$$

其中: $\mathrm{NP}_k^j$为点$\mathrm{NP}_k$的第$j$个分量; $P^j$为点$P$的第$j$个分量; $r$为$0 \sim 1$之间的随机数; $j = 1, 2, \dots, D$.

在对点的所有分量进行更新时,还要用到一个$2D \times D$的二进制矩阵$B$,并要求该矩阵每个二进制字符串都是唯一的. 对点的所有分量更新方程如下:

$$\mathrm{NP}_k^j = \begin{cases} P^j + \delta \times r,\ B_k^j = 1; \\ P^j - \delta \times r,\ B_k^j = 0. \end{cases} \tag{4}$$

其中$B_k^j$为第$k$行、第$j$列的矩阵元素.

在算法中,以50%的概率选择上述两种更新方式的一种. 此外,分别从$P_1$和$P_2$生成的新解种选择最好的解,无论其是否优于$P_1$和$P_2$,都用于替换$P_1$和$P_2$. 需要指出的是,虽然$P_1$和$P_2$均采用这两种更新策略,但是实现的搜索效果是不同的. 对$P_1$而言,搜索半径$\delta_1$越来越小,更新策略等价于做局部搜索. 对$P_2$而言,搜索半径$\delta_2$越来越大,更新策略等价于做全局探索[1,3].

## 2 基于小波精英解学习和多角度搜索的新型阴阳平衡优化算法

阴阳平衡优化算法的解更新方法对计算精度和优化速度影响最大. 以式(3)和(4)为例,无论利用$P_1$进行局部开发还是利用$P_2$进行全局探索, $P_1$和$P_2$自

身的优劣直接影响算法的性能. 在对$P_1$和$P_2$随机初始化后,算法直接利用档案集中保存的精英解对这两个点进行更新. 如果能够学习精英解中的优化信息,则会产生更高质量的解,提高优化性能,也可以避免陷入局部极值. 此外,在进行局部开发和全局勘探时,相当于分别以$P_1$为中心$\delta_1$为半径、$P_2$为中心$\delta_2$为半径进行优化搜索. 在上述寻优方法中,考虑了搜索中心和半径,但是忽略了搜索角度. 如果搜索的角度不够全面,则容易造成算法的早熟收敛. 因此,本文结合上述两方面的分析,从算法核心迭代方程出发,提出一种基于小波精英解学习和多角度搜索的新型阴阳平衡优化算法.

### 2.1 小波精英解学习策略

在阴阳平衡优化算法中,搜索个体的寻优行为主要受到$P_1$和$P_2$的控制,这两个点直接决定了算法的计算精度和优化速度. 在对$P_1$和$P_2$初始化后,算法每间隔$I$次迭代,便利用保存的$2I$个精英解对当前的$P_1$和$P_2$进行比较更新. 其实这$2I$个体是由解质量较高的个体组成,类似于算法中搜索群体的历史最优解,比普通解包含了更多的待求解问题的优化信息[10-11]. 可以通过这些精英解的学习,促进优化信息的继承与发展,产生更好的$P_1$和$P_2$,更好地进行在超球体阶段的解更新操作,加快算法向全局最优解逼近. 因此,既要保留精英解的优化信息,又要对这些解进行更新. 本文采用小波函数对这些精英解进行微调,期望发现更好的解. 小波(wavelet)顾名思义就是小区域的波形,具有微调能力强等特征[12],将小波应用到对这些精英解的学习中. 设$X$为档案集中一个精英解,通过小波精英解学习后的新解为$X^*$,具体方法如下:

$$X^* = \gamma X + r(L+U). \tag{5}$$

其中:$\gamma$为小波函数值;$r$为0～1之间的随机数;$U$和$L$为变量$X$的上下界.

由于Morlet小波具有优良的时频特性和动态特性,是小波函数动态变化空间的典型代表,在式(5)的计算中将采用Morlet小波[13-14],其计算方法如下:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{a}}\exp\Big(-\Big(\frac{\phi}{a}\Big)^2\Big)\cos\Big(5\Big(\frac{\phi}{a}\Big)\Big), \tag{6}$$

其中:$\phi$的可行域为$[-2.5a, 2.5a]$, $a$的计算方法为

$$a = \exp\Big(-\ln g \times \Big(1-\frac{t}{T}\Big)^{\xi}\Big) + \ln g. \tag{7}$$

$g$为$a$的上界,$t$为算法当前的迭代次数,$T$为最大迭代次数,$\xi$为形状参数.

在算法中,对档案集中保留的精英解和采用小波精英解学习后的新解进行比较,取最好的两个解分别赋值给$P_1$和$P_2$. 此外,如果这些精英解是局部最优解,则可以通过对这些解的学习跳出局部极值点,避免算法的早熟收敛.

### 2.2 多角度搜索策略

在产生$P_1$和$P_2$两个点后,算法在超球体内以点$P_1$为中心$\delta_1$为半径进行局部开发,并以点$P_2$为中心$\delta_2$为半径进行全局勘探,解更新方程如式(3) 和(4)所示. 这两种寻优方式都考虑了搜索中心和半径,但都忽略了搜索的角度. 在没有优化问题先验信息的情况下,如果不考虑搜索角度或者搜索角度不全,则对于专注于局部开发的$P_1$而言,会错失质量更好的解;对于专注于全局探索的$P_2$而言,会错失潜在的高质量解区域. 这也是基本阴阳平衡优化算法计算精度低和优化速度慢的原因之一. 因此,将搜索角度引入到基于超球体的解更新方程中,将式(3)和(4)的更新方程修改为

$$\mathrm{NP}_k^j = P^j + \delta \times \sin\theta. \tag{8}$$

其中:$\mathrm{NP}_k^j$为点$\mathrm{NP}_k$第$j$个分量,$P^j$为点$P$第$j$个分量,$\delta$为搜索步长,$\theta$为搜索角度.

搜索角度$\theta$可以在$0 \sim 2\pi$之间任意取值. 这样,利用式(8)通过角度$\theta$的变化便可以在超球体内对任意位置进行搜索,实现对算法搜索空间全方位的搜索,既可以提高算法的全局勘探能力又可以提高算法的局部开发能力. 此外,式(3)和(4)的解更新方程中随机数$r$取值范围在0～1之间. 从搜索角度看,相当于$\theta$的取值范围在$0 \sim \pi/2$或$\pi/2 \sim \pi$之间,不能覆盖到所有角度.

综上所述,基于小波精英解学习和多角度搜索的新型阴阳平衡优化算法描述如下.

**算法1** 新型阴阳平衡优化算法NYYPO.

输入:参数$I_{\min}$, $I_{\max}$, $\alpha, g, \xi$;

输出:算法产生的最好解.

1: 对$P_1$和$P_2$进行随机初始化
2: while(不满足算法停止条件)
3: 计算$P_1$和$P_2$适应值
4: if $P_2$优于$P_1$,
5: 交换$P_2$和$P_1$的取值和搜索半径
6: end if
7: 将$P_1$和$P_2$保存到档案集中
8: if 迭代的间隔数等于更新的频率
9: 按式(5)采用小滤精英解学习策略
10: end if
11: 按式(8)采用多角度搜索策略
12: end while

## 3　新型阴阳平衡优化算法的收敛性分析

对于每种智能优化算法,都需要考虑其收敛性. 基于马尔可夫链的收敛性分析是一种常用方法[15-16], 本文采用该方法对新型阴阳平衡优化算法NYYPO的收敛性进行论证. 首先分析新型阴阳平衡优化算法NYYPO的迭代过程,可以采用齐次马尔可夫链进行刻画;然后利用NYYPO算法计算过程中的状态转移概率,证明NYYPO算法以概率1收敛到全局最优解. 假设$N$为算法的群体规模,$Q^k$为第$k$次迭代时的搜索群体.

**定义1**　NYYPO算法在第$k$次迭代时的搜索群体为$Q(k) = \{q_1(k), \dots, q_i(k), \dots, q_N(k)\}$. 其中: $q_i(k)$为第$k$次迭代时第$i$个体对应的解, $N$为搜索群体的规模. 解序列$\{Q(k), k \geqslant 0\}$组成了一种离散时间的随机过程. 所有可能的群体$Q(k)$组成集合记为$S$,称为状态空间.

采用计算机进行数值计算时会受到编码精度的限制,例如采用浮点编码时,设编码精度为$\epsilon$, $q_i(k)$所有可能取值共有$\dfrac{b_i - a_i}{\epsilon}$种[17], $Q(k)$所有可能取值共有$\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{b_i - a_i}{\epsilon}$,这就意味着状态空间$S$为有限集.

**定理1**　NYYPO算法的迭代过程$\{Q(k), k \geqslant 0\}$是有限齐次马尔可夫链.

**证明**　设第$k$次迭代时解的集合为$Q(k)$, NYYPO算法根据式(5) 采用多角度搜索策略对解进行更新. 如果满足条件,则算法根据式(8)采用小波精英解策略对解进行更新. 在此基础上,算法得到第$k+1$次迭代时解的集合为$Q(k+1)$. 表明下一次迭代解的状态仅与当前解的状态有关,与以前的状态无关. 因此,状态序列$\{Q(k), k \geqslant 0\}$可以构成马尔可夫链. 根据NYYPO算法设计,状态转移概率$\Pr(Q(k+1)|Q(k))$仅与第$k$次迭代时的状态$Q(k)$有关,而与迭代次数$k$无关,即

$$\Pr(Q(k+1) = s_i | Q(k) = s_j) > 0. \tag{9}$$

其中$s_i$和$s_j$是任意两个状态,且$s_i, s_j \in S$. 因此,解序列$\{Q(k), k \geqslant 0\}$对应的是齐次马尔可夫链. 此外,由于状态空间$S$是有限集,NYYPO算法的搜索空间是半径为1的超球体. 因此,解序列$\{Q(k), k \geqslant 0\}$是有限齐次马尔可夫链. □

**定义2**　最小化问题$f(t)$的全局最优解集合为

$$T^* = \{t^* | \nexists t \neq t^*, f(t) \leqslant f(t^*)\}. \tag{10}$$

令$G(Q(k)) = |f(Q(k) = f(t^*)|$表示算法获得的最优函数值个数. 需要说明的是,因为NYYPO算法采用群体搜索策略,只要有一个个体搜索到最优函数值,算法便是收敛的[16].

**定义3**　若对于任意初始解状态$Q(0)$都满足

$$\lim_{k\to\infty} \Pr(G(Q(k)) > 0) = 1, \tag{11}$$

则称算法以概率1收敛到全局最优解.

**定理2**　随迭代次数增加,NYYPO算法解集对应的最优函数值个数是单调不递减的,即$\forall k \geqslant 0$,有

$$\Pr(G(Q(k+1)) < M | G(Q(k)) = M) = 0,\ M \geqslant 0. \tag{12}$$

**证明**　在NYYPO算法中,利用档案集保留最好的$2I$个解,并利用小波精英解学习策略对这些解进行更新,通过比较保留更好的解.因此,在第$k$次迭代时,解集$Q(k)$对应的最优函数值数量为$M$,在第$k+1$次迭代时,解集$Q(k+1)$对应的最优函数值数量不可能小于$M$. □

**定理3**　即使NYYPO算法在第$k$次迭代时$G(Q(k)) = 0$,在第$k+1$次迭代时搜索到全局最优解的概率也大于0,即

$$\Pr(G(Q(k+1)) > 0 | G(Q(k)) = 0) > 0,\ \forall k \geqslant 0. \tag{13}$$

**证明**　由式(9),任意两个解之间的状态转移概率大于0. 因此,即使在第$k$次迭代时$G(Q(k)) = 0$, 转移概率$\Pr(G(Q(k+1)) > 0 | G(Q(k)) = 0)$也大于0. 此外,根据NYYPO算法设计,即使第$k$次迭代未产生全局最优解,下次迭代时继续采用多角度搜索策略,也可以在搜索空间任意位置产生新解. 这就表明产生任何一个新解的概率大于0,那么产生最优解的概率也大于0. □

**定理4**　NYYPO算法以概率1收敛到全局最优解,即

$$\lim_{k\to\infty} \Pr(G(Q(k)) > 0) = 1. \tag{14}$$

**证明**　令NYYPO算法在第$k$次时最优函数值个数为$i$的概率为$H_i(k) = \Pr(G(Q(k)) = i)$,根据贝叶斯条件概率公式可以得到以下结论:

$$\begin{aligned}
&H_0(k+1) = \\
&\Pr(G(Q(k+1)) = 0 | G(Q(k)) = 0)\times \\
&\Pr(G(Q(k)) = 0) + \\
&\Pr(G(Q(k+1)) = 0 | G(Q(k)) \neq 0)\times \\
&\Pr(G(Q(k)) \neq 0).
\end{aligned}$$

由定理2可知

$$\begin{aligned}
&\Pr(G(Q(k+1)) = \\
&0 | G(Q(k)) \neq 0) \times \Pr(G(Q(k)) \neq 0) = 0,
\end{aligned}$$

因此有

$$H_0(k+1)=$$
$$\Pr(G(Q(k+1))=0|G(Q(k))=0)\times H_0(k).$$

又根据定理3可得$\Pr(G(Q(k+1))>0|G(Q(k))=0)>0$. 令$\rho=\min(\Pr(G(Q(k+1))>0|G(Q(k))=0),\ k=0,1,\ldots)$,即有

$$\Pr(G(Q(k+1))>0|G(Q(k))=0)\geqslant\rho>0. \quad (15)$$

由式(15),可以得到

$$\Pr(G(Q(k+1))=0|G(Q(k))=0)=$$
$$1-\Pr(G(Q(k+1))\neq 0|G(Q(k))=0)=$$
$$1-\Pr(G(Q(k+1))>0|G(Q(k))=0)\leqslant$$
$$1-\rho<1,\ k=0,1,\ldots.$$

因此,有

$$H_0(k+1)\leqslant(1-\rho)H_0(k)\leqslant\ldots\leqslant$$
$$(1-\rho)^{k+1}H_0(0).$$

进一步可以得到

$$0\leqslant H_0(k+1)\leqslant(1-\rho)^{k+1}H_0(0). \quad (16)$$

因为$0<\rho\leqslant 1$,所以$\lim\limits_{k\to\infty}(1-\rho)^{k+1}=0$. 又因为$0\leqslant H_0(0)\leqslant 1$,所以$\lim\limits_{k\to\infty}(1-\rho)^{k+1}H_0(0)=0$. 根据式(16)和极限的夹逼准则可知$\lim\limits_{k\to\infty}H_0(k+1)=0$. 综上可得

$$\lim_{k\to\infty}\Pr(G(Q(k+1))>0)=$$
$$1-\lim_{k\to\infty}\Pr(G(Q(k+1))=0)=$$
$$1-\lim_{k\to\infty}H_0(k+1)=1-0=1.$$

因此, $\lim\limits_{k\to\infty}\Pr(G(Q(k))>0)=1$. □

## 4 数值实验

采用连续优化问题和组合优化问题两类问题测试新型阴阳平衡优化算法NYYPO的计算性能,并采用多种智能优化算法进行对比测试. 所有数值实验都在Intel Xeon(R)、16 G 内存、3.20 GHz的计算机上运行,软件运行环境为Windows 10 和Matlab R2016a.

### 4.1 连续优化问题

采用11个具有不同特征的测试函数进行数值实验,这些函数常用于测试智能优化算法的搜索性能,表1给出了函数的定义.

**表 1 测试函数**

| 函数 | 名称 | 范围 | 最优解 |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | Schwefel 2.21 | $[-100,100]$ | 0 |
| $f_2$ | Step | $[-100,100]$ | 0 |
| $f_3$ | Ackley | $[-32,32]$ | 0 |
| $f_4$ | Sum of different power | $[-1,1]$ | 0 |
| $f_5$ | Hyper-Ellipsoid | $[-1,1]$ | 0 |
| $f_6$ | Non-Continuous Rastrigin | $[-500,500]$ | 0 |
| $f_7$ | Scaled Rastrigin | $[-5,5]$ | 0 |
| $f_8$ | Generalized Griewank | $[-600,600]$ | 0 |
| $f_9$ | Schaffer | $[-100,100]$ | 0 |
| $f_{10}$ | Wavy | $[-\pi,\pi]$ | 0 |
| $f_{11}$ | Xin-She Yang 1 | $[-5,5]$ | 0 |

在实验中,将NYYPO算法与遗传算法(genetic algorithm, GA)、 微粒群优化算法(particle swarm optimization algorithm, PSO)、 模拟退火算法(simulated annealing, SA)等常用算法,蚁狮优化算法(ant lion optimizer, ALO)、 灰狼优化算法(grey wolf optimizer, GWO)、 正弦余弦算法(sine cosine algorithm, SCA)等新型优化算法,基本阴阳平衡优化算法YYPO、基于混沌搜索和错卦变换的阴阳平衡优化算法(Yin-Yang pair optimization algorithm based on chaos search and intricate operator, CSIOYYPO)等同类型算法的计算结果进行比较.

在实验中,固定每种算法的函数评价次数均为40 000,对于每个函数,各个算法独立运行30次. 新型阴阳平衡优化算法NYYPO的参数设置如下:$I_{\min}=3, I_{\max}=9, \alpha=10, g=10\,000, \xi=5$. GA、PSO、SA、ALO、GWO、SCA、YYPO和CSIOYYPO算法采用文献[1-2, 6, 18-20]的参数设置. 测试函数的维数为30. 为充分比较9种算法的收敛精度,分别统计最优值、最差值、平均值和标准差等指标,具体结果如表2所示.

**表 2 各算法计算精度对比**

| 函数 | 算法 | 最优值 | 最差值 | 平均值 | 标准差 |
|---|---|---|---|---|---|
| | GA | 1.320 6 | 2.997 7 | 1.963 3 | 0.443 3 |
| | PSO | 2.428 7 | 10.017 4 | 6.158 7 | 1.993 0 |
| | SA | 54.738 0 | 75.897 2 | 65.351 6 | 6.329 0 |
| | ALO | 4.170 8 | 15.563 3 | 10.088 7 | 2.705 5 |
| $f_1$ | GWO | 4.561 6e-15 | 3.960 1e-13 | 8.850 1e-14 | 1.011 4e-13 |
| | SCA | 2.923 8 | 57.729 4 | 20.178 8 | 14.309 3 |
| | YYPO | 6.808 1 | 20.286 5 | 11.907 5 | 3.955 5 |
| | CSIOYYPO | 2.801 1 | 7.181 2 | 5.051 0 | 1.193 4 |
| | NYYPO | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |

表 2 (续)

| 函数 | 算法 | 最优值 | 最差值 | 平均值 | 标准差 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_2$ | GA | 4.000 0 | 26.000 0 | 12.150 0 | 6.643 4 |
| | PSO | 0.000 0 | 4.000 0 | 0.850 0 | 1.136 7 |
| | SA | 6.000 0 | 16.000 0 | 10.400 0 | 2.702 8 |
| | ALO | 6.000 0 | 25.000 0 | 13.350 0 | 4.637 1 |
| | GWO | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |
| | SCA | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |
| | YYPO | 26.000 0 | 522.000 0 | 126.200 0 | 108.052 9 |
| | CSIOYYPO | 2.000 0 | 11.000 0 | 6.050 0 | 2.928 5 |
| | NYYPO | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |
| $f_3$ | GA | 0.013 7 | 1.016 2 | 0.112 3 | 0.238 5 |
| | PSO | 0.001 2 | 19.966 8 | 16.395 6 | 7.510 5 |
| | SA | 18.337 1 | 20.314 9 | 19.809 7 | 0.435 9 |
| | ALO | 6.937 9e-04 | 3.026 9 | 1.988 0 | 0.692 9 |
| | GWO | 1.509 9e-14 | 2.220 4e-14 | 1.758 6e-14 | 3.071 3e-15 |
| | SCA | 8.800 6e-04 | 20.272 7 | 11.881 0 | 9.979 1 |
| | YYPO | 2.461 0 | 4.796 1 | 3.706 8 | 0.701 4 |
| | CSIOYYPO | 0.360 6 | 2.102 5 | 1.200 1 | 0.472 5 |
| | NYYPO | **8.881 8e-16** | **8.881 8e-16** | **8.881 8e-16** | **0.000 0** |
| $f_4$ | GA | 7.608 2e-08 | 0.015 6 | 8.727 6e-04 | 0.003 5 |
| | PSO | 7.121 2e-10 | 3.687 8e-08 | 7.624 4e-09 | 9.316 3e-09 |
| | SA | 0.010 3 | 0.034 4 | 0.024 3 | 0.007 3 |
| | ALO | 3.831 2e-08 | 4.797 6e-07 | 1.896 0e-07 | 1.172 4e-07 |
| | GWO | 3.601 6e-197 | 1.102 2e-182 | 5.514 0e-184 | 0.000 0 |
| | SCA | 1.598 2e-17 | 1.144 7e-07 | 1.062 7e-08 | 3.019 1e-08 |
| | YYPO | 3.044 0e-07 | 7.533 5e-05 | 1.206 8e-05 | 1.703 0e-05 |
| | CSIOYYPO | 1.832 6e-13 | 3.619 0e-08 | 4.384 0e-09 | 1.001 0e-08 |
| | NYYPO | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |
| $f_5$ | GA | 0.010 7 | 0.566 8 | 0.182 3 | 0.170 3 |
| | PSO | 6.650 9e-08 | 3.999 7e-06 | 5.163 0e-07 | 1.002 9e-06 |
| | SA | 0.449 8 | 2.561 8 | 1.420 6 | 0.619 2 |
| | ALO | 0.024 9 | 1.748 7 | 0.733 2 | 0.475 3 |
| | GWO | 4.630 8e-60 | 2.269 9e-56 | 3.117 3e-57 | 5.719 5e-57 |
| | SCA | 6.942 0e-08 | 0.001 9 | 1.783 9e-04 | 4.158 2e-04 |
| | YYPO | 0.463 8 | 4.021 4 | 1.799 9 | 0.982 0 |
| | CSIOYYPO | 0.029 5 | 0.361 6 | 0.122 2 | 0.092 7 |
| | NYYPO | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |
| $f_6$ | GA | 17.000 2 | 36.000 0 | 26.100 1 | 5.963 9 |
| | PSO | 45.030 3 | 248.183 8 | 85.556 0 | 43.390 8 |
| | SA | 537.000 0 | 1.417 3e+03 | 822.062 7 | 221.306 3 |
| | ALO | 173.000 0 | 609.750 0 | 379.012 5 | 124.266 3 |
| | GWO | 1.102 6e-291 | 16.000 0 | 7.432 2 | 5.284 3 |
| | SCA | 34.249 7 | 175.940 4 | 103.188 8 | 43.027 0 |
| | YYPO | 713.958 6 | 2.068 2e+04 | 4.411 1e+03 | 4.614 7e+03 |
| | CSIOYYPO | 110.276 8 | 545.087 9 | 302.392 3 | 119.071 3 |
| | NYYPO | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |
| $f_7$ | GA | 29.217 5 | 79.587 7 | 49.246 1 | 14.068 8 |
| | PSO | 33.829 0 | 102.480 3 | 69.903 5 | 18.656 0 |
| | SA | 310.483 3 | 740.384 5 | 532.042 1 | 114.819 6 |
| | ALO | 118.925 7 | 383.815 4 | 228.286 9 | 60.901 2 |
| | GWO | 2.453 3e-287 | 4.542 7 | 0.227 1 | 1.015 8 |
| | SCA | 3.076 0e-05 | 39.902 0 | 11.818 2 | 14.010 7 |
| | YYPO | 25.649 0 | 75.313 8 | 51.149 9 | 12.528 9 |
| | CSIOYYPO | 8.859 0 | 28.563 0 | 16.746 9 | 5.452 6 |
| | NYYPO | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |

表2(续)

| 函数 | 算法 | 最优值 | 最差值 | 平均值 | 标准差 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_8$ | GA | 2.314 0e-05 | 2.926 4e-04 | 1.209 6e-04 | 7.265 2e-05 |
| | PSO | 2.849 7e-06 | 0.034 4 | 0.009 1 | 0.010 4 |
| | SA | 4.858 6 | 10.698 1 | 7.559 0 | 1.480 8 |
| | ALO | 2.941 3e-04 | 0.036 4 | 0.012 6 | 0.012 1 |
| | GWO | 1.295 8e-213 | 0.038 1 | 0.003 3 | 0.008 9 |
| | SCA | 0.004 9 | 0.966 6 | 0.245 9 | 0.274 0 |
| | YYPO | 1.086 3 | 3.668 4 | 1.912 7 | 0.591 6 |
| | CSIOYYPO | 1.010 2 | 1.144 2 | 1.051 9 | 0.032 3 |
| | NYYPO | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |
| $f_9$ | GA | 10.874 4 | 24.632 3 | 15.831 9 | 3.285 8 |
| | PSO | 4.809 1 | 84.837 7 | 18.068 4 | 17.320 6 |
| | SA | 225.919 5 | 258.285 8 | 243.217 6 | 10.411 3 |
| | ALO | 113.924 1 | 171.009 9 | 140.738 9 | 16.175 3 |
| | GWO | 9.199 7e-15 | 4.306 8e-14 | 2.165 9e-14 | 9.667 6e-15 |
| | SCA | 0.022 5 | 2.268 4 | 0.721 6 | 0.707 5 |
| | YYPO | 37.150 9 | 80.401 7 | 57.012 2 | 11.505 7 |
| | CSIOYYPO | 26.827 5 | 56.824 6 | 40.842 4 | 8.751 0 |
| | NYYPO | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |
| $f_{10}$ | GA | 0.101 4 | 0.260 4 | 0.185 1 | 0.044 4 |
| | PSO | 0.245 4 | 0.741 4 | 0.454 9 | 0.145 8 |
| | SA | 0.642 9 | 0.721 2 | 0.687 1 | 0.026 4 |
| | ALO | 0.252 0 | 0.592 4 | 0.434 6 | 0.080 2 |
| | GWO | 3.081 1e-206 | 0.039 7 | 0.003 6 | 0.010 3 |
| | SCA | 2.595 8e-06 | 0.162 4 | 0.021 9 | 0.044 4 |
| | YYPO | 0.029 7 | 0.085 6 | 0.064 5 | 0.017 2 |
| | CSIOYYPO | 0.002 2 | 0.031 3 | 0.011 3 | 0.006 9 |
| | NYYPO | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |
| $f_{11}$ | GA | 1.983 8e-04 | 9.212 5 | 0.490 2 | 2.053 6 |
| | PSO | 1.737 5e-07 | 11.891 5 | 1.475 4 | 2.827 7 |
| | SA | 1.155 4e+05 | 1.108 2e+11 | 7.162 9e+09 | 2.474 9e+10 |
| | ALO | 32.045 2 | 3.598 9e+08 | 2.441 4e+07 | 8.112 1e+07 |
| | GWO | 4.094 2e-76 | 1.544 4e-46 | 7.727 3e-48 | 3.453 2e-47 |
| | SCA | 2.481 2e-08 | 0.709 7 | 0.045 6 | 0.161 6 |
| | YYPO | 0.008 3 | 55.693 9 | 3.301 3 | 12.343 3 |
| | CSIOYYPO | 2.856 2e-04 | 0.374 7 | 0.027 4 | 0.082 4 |
| | NYYPO | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** | **0.000 0** |

由表2可见: 1) 基本阴阳平衡优化算法YYPO在求解上述优化问题的计算精度均不理想,表明该优化方法的搜索性能需要进一步提高,CSIOYYPO算法计算精度的提高十分有限. 而新型阴阳平衡优化算法NYYPO在所有测试函数的计算精度上均有显著提升,计算结果明显优于YYPO算法和CSIOYYPO算法. 与其他类型的智能优化算法相比,在测试函数$f_2$上,灰狼优化算法GWO、正弦余弦算法SCA和新型阴阳平衡优化算法NYYPO的计算精度相同. 对其他10个测试函数而言,新型阴阳平衡优化算法NYYPO计算精度的优势十分显著. 2) 与其他8种算法相比,本文算法在所有测试函数上获得的标准差是最小的,表明NYYPO算法的优化性能更加稳定.

此外,给出9种优化方法非参数Friedman检验的Average rank值,分别为4.727 3、 5.272 7、 8.545 5、6.818 2、2.090 9、4.636 4、7.272 7、4.545 5和1.090 9. $P$值为2.325 4e-11,远小于显著性水平0.05. 在结果中,Average rank指标值越小,算法性能越好. 新型阴阳平衡优化算法排名第1,从统计学上也表明NYYPO算法具有更好的优化性能.

为更加形象地表达新型阴阳平衡优化算法搜索性能的优势,图1给出9种算法在函数$f_3$上的寻优曲线对比结果. 由图1可见,NYYPO算法的计算精度和优化速度优于其他8种算法. 在新算法中,利用小波精英解学习策略,一方面可以保留算法的进化方向,另一方面也可以产生更好的$P_1$和$P_2$,更好地引导算

法进行局部搜索和全局探索. 此外, 采用多角度搜索策略, 能够进行全方位的寻优, 提高算法发现全局最优解的概率. 因此, 新型阴阳平衡优化算法NYYPO具有更好的优化性能.

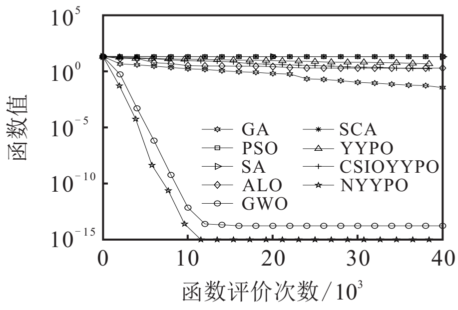


**图 1　算法寻优曲线对比**

### 4.2　组合优化问题

除采用连续优化问题测试NYYPO算法性能外, 还采用瓶颈旅行商问题(bottleneck traveling salesman problem, BTSP) 进一步测试算法的优化性能. BTSP问题是一种扩展形式的旅行商问题, 要求在Hamilton回路中两城市间最远距离最短, 即瓶颈距离尽可能最小[21].

采用图论描述BTSP问题. 令$G = (V, E)$表示赋权完全图, $V$和$E$分别表示顶点集和边集, 任意两个顶点之间的距离$d_{ij}$已知. 如果$(i, j)$在回路路径上, 则令$x_{ij} = 1$, 否则令$x_{ij} = 0$. 瓶颈旅行商问题的数学模型可以表示为

$$\min\ Z = \max\{d_{ij}x_{ij} | i, j \in V\}. \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i \in V; \\ &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j \in V; \\ &\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \leqslant |S| - 1,\ \forall S \in V; \\ &x_{ij} \in \{0, 1\}. \end{aligned} \tag{18}$$

其中: $n$为图$G$中顶点个数; $|S|$为点集$S$包含图$G$的顶点个数; 式(18)前两个约束条件可保证每个顶点只被访问一次; 第3个约束条件可保证不会产生任何子回路. 满足式(18)的解就可以表示为Hamilton回路.

为充分发挥NYYPO算法解决连续优化问题的优势, 算法搜索空间设置在$[0, 1]^n$内, 但是需要将其连续形式的个体位置表示成BTSP问题离散形式的解. 这里, 采用随机键方法实现两者的转换. 此外, 采用上述解的表示方法, 可以直接产生BTSP问题的可行解. 在实验中, 采用TSPLIB中的算例测试NYYPO算法的优化性能, 并将其与遗传算法(GA)、模拟退火算法(SA)、微粒群优化算法(PSO)和蚁群优化算法(ACO)的计算结果进行比较. 最大函数评价次数设为50 000, 本文算法其他参数不变, 其他算法参数根据文献[2]设置, 均采用基于2-opt的局部搜索. 每种算法独立运行30次, 统计其平均值, 实验结果如表3所示.

**表 3　BTSP计算结果比较**

| 问题类型 | GA | SA | PSO | ACO | NYYPO | 已知最优值 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Eil101 | 14.2 | 15.3 | 13.9 | **13.0** | **13.0** | 13.0 |
| Lin105 | 516.5 | 588.3 | 532.6 | 501.2 | **487.0** | 487.0 |
| b127 | 78 996.2 | 88 533.4 | 88 012.9 | 78 982.3 | **78 851.3** | 7 846.0 |
| ch130 | 156.7 | 168.9 | 154.4 | 146.3 | **135.5** | 132.0 |
| pr136 | 38 012.9 | 38 698.1 | 38 455.6 | 38 365.8 | **28 979.8** | 28 976.0 |
| ch150 | 107.3 | 123.8 | 138.6 | 112.4 | **92.8** | 89.0 |
| KroB150 | 479.6 | 505.1 | 498.5 | 475.8 | **411.3** | 366.0 |
| Rat195 | 28.9 | 35.6 | 39.9 | 27.5 | **21.8** | 21.0 |
| KroA200 | 456.9 | 523.1 | 606.1 | 502.3 | **356.6** | 340.0 |
| gil262 | 42.1 | 58.7 | 61.4 | 39.2 | **25.3** | 22.0 |

由表3可见, 与遗传算法(GA)、 模拟退火算法(SA)、微粒群优化算法(PSO)和蚁群优化算法(ACO)相比, 算法NYYPO在求解绝大多数BTSP问题上优势显著, 为该问题的解决提供了有效方法, 也能够为其他组合优化问题的求解提供参考.

## 5　结　论

为提高基本阴阳平衡优化算法的性能, 本文提出了一种新型阴阳平衡优化算法NYYPO, 该方法主要包括以下两个特征: 1) 设计小波精英解学习策略以产生更高质量的解, 引导算法更好地进行全局搜索和局部搜索; 2) 将搜索角度引入全局勘探和局部开发的解更新方程中, 从各个角度进行优化搜索. 数值实验表明, NYYPO算法计算精度更好, 优化速度更快. 将新算法用于求解多目标优化问题是下一步的研究工作.

## 参考文献(References)

[1] Punnathanam V, Kotecha P. Yin-Yang-pair Optimization: A novel lightweight optimization algorithm[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2016, 54: 62-79.

[2] 刘勇, 马良, 张惠珍, 等. 智能优化算法[M]. 上海: 上海人民出版社, 2019: 3-169.
(Liu Y, Ma L, Zhang H Z, et al. Intelligent optimization algorithms[M]. Shanghai: Shanghai People's Publishing House, 2019: 3-169.)

[3] 李士勇, 李研, 林永茂. 智能优化方法与涌现计算[M]. 北京: 清华大学出版社, 2019: 552-556.
(Li S Y, Li Y, Lin Y M. Intelligent optimization algorithms and emergent computation[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2019: 552-556.)

[4] Heidari A A, Kazemizade O, Hakimpour F. A new hybrid Yin-Yang-pair-particle swarm optimization algorithm for uncapacitated warehouse location problems[J]. The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 2017, 42: 373-379.

[5] Maharana D, Kommadath R, Kotecha P. Dynamic Yin-Yang Pair optimization and its performance on single objective real parameter problems of CEC 2017[C]. IEEE Congress on Evolutionary Computation. Donostia, 2017: 2390-2396.

[6] 许秋艳, 马良, 刘勇. 基于混沌搜索和错卦变换的阴阳平衡优化算法[J]. 计算机应用, 2020, 40(8): 2305-2312.
(Xu Q Y, Ma L, Liu Y. Yin-Yang-pair optimization algorithm based on chaos search and intricate operator[J]. Journal of Computer Applications, 2020, 40(8): 2305-2312.)

[7] Punnathanam V, Kotecha P. Reduced Yin-Yang-Pair optimization and its performance on the CEC 2016 expensive case[C]. IEEE Congress on Evolutionary Computation. Vancouver, 2016: 2996-3002.

[8] Yang B, Yu T, Shu H C, et al. Perturbation observer based fractional-order PID control of photovoltaics inverters for solar energy harvesting via Yin-Yang-Pair optimization[J]. Energy Conversion and Management, 2018, 171: 170-187.

[9] Song D R, Liu J B, Yang J, et al. Optimal design of wind turbines on high-altitude sites based on improved Yin-Yang pair optimization[J]. Energy, 2020, 193: 116794.

[10] 张勇, 夏长红, 巩敦卫, 等. 基于多种群协同微粒群优化的流数据聚类算法[J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1879-1883.
(Zhang Y, Xia C H, Gong D W, et al. Streaming data clustering using cooperative particle swarm optimization[J]. Control and Decision, 2016, 31(10): 1879-1883.)

[11] 刘宇琦, 赵宏伟, 王玉. 一种基于QPSO优化的流形学习的视频人脸识别算法[J]. 自动化学报, 2020, 46(2): 256-263.
(Liu Y Q, Zhao H W, Wang Y. Video face recognition method based on QPSO and manifold learning[J]. Acta Automatica Sinica, 2020, 46(2): 256-263.)

[12] Deng W, Xu J J, Song Y J, et al. Differential evolution algorithm with wavelet basis function and optimal mutation strategy for complex optimization problem[J]. Applied Soft Computing, 2021, 100: 106724.

[13] 程慕鑫, 刘漫丹, 夏伟. 基于小波变异的改进粒子群算法[J]. 华东理工大学学报: 自然科学版, 2013, 39(1): 90-94.
(Cheng M X, Liu M D, Xia W. A modified particle swarm optimization based on wavelet mutation[J]. Journal of East China University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2013, 39(1): 90-94.)

[14] 王坤, 侯树贤, 王力. 基于自适应变异PSO-SVM的APU性能参数预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2021, 43(2): 526-536.
(Wang K, Hou S X, Wang L. APU performance parameter prediction model based on adaptive variation PSO-SVM[J]. Systems Engineering and Electronics, 2021, 43(2): 526-536.)

[15] 王正志, 薄涛. 进化计算[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2000: 61-81.
(Wang Z Z, Bo T. Evolutionary computing[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2000: 61-81.)

[16] Li B L, Chen J H, Shi X L, et al. On the convergence of multivariant optimization algorithm[J]. Applied Soft Computing, 2016, 48: 230-239.

[17] 金林鹏, 李均利, 魏平, 等. 用于函数优化的最大引力优化算法[J]. 模式识别与人工智能, 2010, 23(5): 653-662.
(Jin L P, Li J L, Wei P, et al. Maximal gravitation optimization algorithm for function optimization[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2010, 23(5): 653-662.)

[18] Abualigah L, Shehab M, Alshinwan M, et al. Ant lion optimizer: A comprehensive survey of its variants and applications[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2021, 28(3): 1397-1416.

[19] Faris H, Aljarah I, Al-Betar M A, et al. Grey wolf optimizer: A review of recent variants and applications[J]. Neural Computing and Applications, 2018, 30(2): 413-435.

[20] Mirjalili S. SCA: A sine cosine algorithm for solving optimization problems[J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 96: 120-133.

[21] 马良, 朱刚. 蚁群优化算法[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 57-61.
(Ma L, Zhu G. Ant colony optimization algorithm[M]. Beijing: Science Press, 2010: 57-61.)

## 作者简介

许秋艳 (1981−), 女, 博士生, 从事智能优化、系统工程的研究, E-mail: 44424072@qq.com;

马良 (1964−), 男, 教授, 博士生导师,从事智能优化、系统工程等研究, E-mail: maliang@usst.edu.cn;

刘勇 (1982−), 男, 副教授, 博士, 从事智能优化、系统工程等研究, E-mail: liuyong.seu@163.com.

(责任编辑：郑晓蕾)