

# 控制与决策

Control and Decision

多输入C-ARMA系统参数和时延的梯度追踪辨识算法

陶太洋, 汪宝, 汪学海

引用本文:

陶太洋,汪宝,汪学海. 多输入C-ARMA系统参数和时延的梯度追踪辨识算法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(8): 2085–2090.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1773>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

[有理模型辨识的两类新方法——混合迭代与柔性最小二乘法](#)

Two novel identification methods for rational models—Compound iterative algorithm and flexible least squares algorithm

*控制与决策*. 2022, 37(1): 58–66 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0935>

[一种基于变量约简的稀疏优化算法](#)

A sparse optimization algorithm based on variable reduction

*控制与决策*. 2022, 37(6): 1550–1558 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1735>

[多智能体系统的多步近似次梯度随机投影优化算法](#)

Multi-step approximate subgradient random projection optimization algorithm for multi-agent system

*控制与决策*. 2022, 37(2): 431–437 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0888>

[基于KRLS的非均匀采样非线性系统辨识](#)

Identification of non-uniformly sampled nonlinear systems based on KRLS

*控制与决策*. 2021, 36(12): 3049–3055 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0962>

[基于稀疏度阶数优化的杂波密度估计算法](#)

A clutter density estimation algorithm by optimized sparsity order

*控制与决策*. 2020, 35(12): 2923–2930 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0429>

# 多输入 C-ARMA 系统参数和时延的梯度追踪辨识算法

陶太洋<sup>1†</sup>, 汪宝<sup>2</sup>, 汪学海<sup>3</sup>

(1. 南阳理工学院 智能制造学院, 河南 南阳 473004; 2. 南阳理工学院 信息工程学院, 河南 南阳 473004;  
3. 信阳师范学院 数学与统计学院, 河南 信阳 464000)

**摘要:** 考虑含有输入时延的多输入单输出受控滑动平均自回归系统模型的参数和时延估计问题. 参数化后的系统模型具有稀疏特性, 受递阶辨识原理和压缩感知理论的启发, 结合梯度搜索原理和匹配追踪思想提出针对该模型的梯度追踪迭代辨识算法. 相比正交匹配追踪迭代算法, 所提出的算法计算量较小且具有较高的辨识效率. 最后通过数值仿真实例验证所提出算法的有效性.

**关键词:** 参数估计; 时延; 梯度追踪; 多输入; 递阶原理; 稀疏

中图分类号: TP273 文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2020.1773

引用格式: 陶太洋, 汪宝, 汪学海. 多输入 C-ARMA 系统参数和时延的梯度追踪辨识算法[J]. 控制与决策, 2022, 37(8): 2085-2090.

## Parameter and time delay estimation algorithm based on gradient pursuit for multi-input C-ARMA systems

TAO Tai-yang<sup>1†</sup>, WANG Bao<sup>2</sup>, WANG Xue-hai<sup>3</sup>

(1. School of Intelligent Manufacturing, Nanyang Institute of Technology, Nanyang 473004, China; 2. School of Information Engineering, Nanyang Institute of Technology, Nanyang 473004, China; 3. School of Mathematics and Statistics, Xinyang Normal University, Xinyang 464000, China)

**Abstract:** This paper considers the parameters and input time delays identification for multiple-input single-output controlled auto-regressive moving average (MISO C-ARMA) systems with unknown input time delays. The parameterized model can be treated as a sparse system. According to the hierarchical identification principle, gradient search principle and matching pursuit idea, a gradient pursuit iterative-based algorithm is presented to simultaneously estimate parameters and time delays of MISO C-ARMA systems. The proposed algorithm can reduce the computational cost compared with the orthogonal matching pursuit iterative-based algorithm. Finally, a simulation example is given to show the effectiveness of the proposed algorithm.

**Keywords:** parameter estimation; time delay; gradient pursuit; multi-input; hierarchical principle; sparse

## 0 引言

在实际的工业过程控制中,时延是一种普遍存在的现象.例如冶金、石油蒸馏、化工过程中原材料的输送,加热炉加热、冷库制冷等过程中都存在较大时延的现象.时延是工业过程中需要面对的一个重要问题,同参数辨识一样关系到系统的控制效果和最终实际效益,是需要严肃对待的科学问题.对于含有时延系统的辨识,通常是先对时延进行估计,在获得系统的时延估计后,再对系统参数进行辨识,最终得到完整的系统模型.常用的时延估计方法有 Smith 预估

法、最优控制法等,也可直接加载系统激励,测量系统响应时间,从而得到系统的时延估计.文献[1]给出了一种加载阶跃激励、测量系统阶跃响应的方法,直接估计系统的参数和时延.近年来,随着研究人员的不断深入,各种新的方法不断涌现.例如:文献[2]采用鲁棒自适应方法对系统时延进行了估计;文献[3]采用 T-S 模糊模型对系统的时滞进行估计并实现控制;文献[4]基于递阶辨识原理,结合牛顿迭代搜索和梯度搜索<sup>[5]</sup>方法对系统的参数和时滞进行了估计.文献[1-4]中方法对单输入系统能够获得较好的效果,

收稿日期: 2020-12-19; 录用日期: 2021-05-12.

基金项目: 国家自然科学基金项目(12004202); 河南省高等学校重点科研项目(21A413006); 河南省科技攻关项目(202102210297).

责任编辑: 柴利.

<sup>†</sup>通讯作者. E-mail: taoxue12358@126.com.

当推广到多输入系统后,由于输入增加且各个通道的情况各不相同,将会导致算法的复杂度和计算量大幅增加,需要耗费更多的资源,特别是在一些特殊情况下,单纯加载激励与实际工况不一致,难以获得良好的估计结果,从而导致较差的控制效果.因此,如何在耗费较少资源的情况下,实现对含有时延的多输入系统参数和时延的联合估计是一项十分有意义的工作.

对于多输入系统进行辨识,一种常用的方法是将其分解为多个单输入单输出系统.当系统输入含有未知时延时,可以预估时延的大小,采取适当规模的过参数化方法,得到稀疏的参数向量<sup>[6]</sup>(参数向量中只有少量的关键非零参数,其余参数均为零).对含有过参数化的高维参数向量系统模型进行辨识,若采用常规算法如最小二乘类算法<sup>[7]</sup>、梯度算法<sup>[8]</sup>、极大似然算法<sup>[9]</sup>等,需要大量的采样测量数据,增大了辨识成本.在极端情况下,某些系统只能获得有限的采样数据,因此常规算法是不完全适用的.针对参数向量的稀疏特性,结合压缩感知思想<sup>[10]</sup>实现对稀疏参数向量的估计.贪婪算法<sup>[11]</sup>是一种最为常用的压缩感知重构方法,例如正交匹配追踪算法、块正交匹配追踪算法、压缩采样匹配追踪算法等.在多输入系统的参数和时延辨识方面:文献[12]采用正交匹配追踪算法及其改进方法,实现了对含有未知时延的多输入受控自回归系统的参数与时延的联合估计;文献[13]针对含有时延的多输入受控自回归系统,采用梯度方法实现了参数与时延的联合估计;文献[14]采用辅助模型与压缩采样匹配追踪相结合的方法对一类闭环系统实现辨识;文献[15]针对含有时延的多输入方程误差类系统,结合辅助模型辨识思想和正交匹配追踪方法,实现了参数和时延的估计.这类算法能够根据有限的采样测量数据获得较好的辨识效果,节约了辨识成本.

针对受有色噪声干扰且含有未知时延的多输入受控自回归系统,文献[16]基于递阶原理给出了正交匹配追踪迭代算法,该算法在计算过程中的核心是运用最小二乘方法,需要对信息矩阵求逆,具有较大的计算量.为了减少计算量,进一步提高辨识效率,本文基于递阶辨识思想和梯度搜索原理,研究含有未知时延的多输入单输出的受控自回归滑动平均系统的参数与时延的联合估计方法.

## 1 系统描述

考虑如图1所示的含有输入时延的多输入单输出受控滑动平均自回归(MISO C-ARMA)系统:

$$y(t) = \sum_{i=1}^r z^{-\tau_i} B_i(z) u_i(t) + \frac{D(z)}{C(z)} v(t). \quad (1)$$

其中:系统含有 $r$ 个独立输入; $u_i(t)$ 、 $\tau_i$ 分别是第 $i$ 个通道的输入和时延; $y(t)$ 是系统输出; $\{v(t)\}$ 是零均值方差为 $\sigma^2$ 的白噪声序列; $B_i(z)$ 、 $C(z)$ 和 $D(z)$ 均是时间移位算子 $z^{-1}$ 的常系数多项式,且有

$$B_i(z) := b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2} + \dots + b_{i n_{bi}} z^{-i n_{bi}},$$

$$C(z) := 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c},$$

$$D(z) := 1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_{n_d} z^{-n_d}.$$

这里系统阶次 $n_{bi}$ 、 $n_c$ 、 $n_d$ 已知,参数及输入通道时滞 $\tau_i$ 未知.不失一般性,假设当 $t \leq 0$ 时, $y(t) = 0$ ,  $u_i(t) = 0$ ,  $v(t) = 0$ .

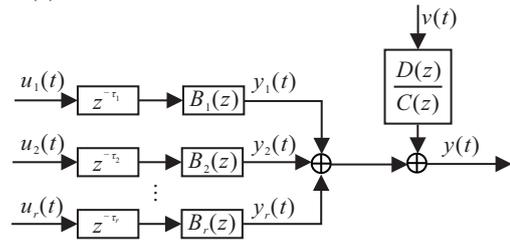


图1 MISO C-ARMA系统

由于输入通道中含有未知时延,采用过参数化方法,令输入数据的回归长度满足<sup>[13]</sup> $l \geq \max(\tau_i + n_{bi})$ .定义系统信息向量 $\varphi_s(t)$ 、噪声信息向量 $\varphi_n(t)$ 、信息参数向量 $\theta_s$ 、噪声参数向量 $\theta_n$ 如下:

$$\varphi_s(t) := [\varphi_1^T(t), \varphi_2^T(t), \dots, \varphi_r^T(t)]^T;$$

$$\varphi_n(t) := [-w(t-1), -w(t-2), \dots, -w(t-n_c), \\ v(t-1), v(t-2), \dots, v(t-n_d)]^T;$$

$$\theta_s := [\theta_1^T, \theta_2^T, \dots, \theta_r^T]^T;$$

$$\theta_n := [c_1, c_2, \dots, c_{n_c}, d_1, d_2, \dots, d_{n_d}]^T;$$

$$\varphi_i(t) := [u_i(t-1), \dots, u_i(t-\tau_i), u_i(t-\tau_i-1), \\ \dots, u_i(t-\tau_i-n_{bi}), \dots, u_i(t-l)]^T;$$

$$\theta_i := [0, \dots, 0, b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{i n_{bi}}, 0, \dots, 0]^T. \quad (2)$$

定义中间变量

$$w(t) := \frac{D(z)}{C(z)} v(t) = [1 - C(z)]w(t) + D(z)v(t) = \\ \varphi_n^T(t)\theta_n + v(t),$$

则式(1)可改写为

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \varphi_i^T(t)\theta_i + w(t) = \varphi^T(t)\theta + v(t). \quad (3)$$

其中: $\varphi(t) = [\varphi_s^T(t), \varphi_n^T(t)]^T$ ,  $\theta = [\theta_s^T, \theta_n^T]^T \in \mathbf{R}^N$ ,  $N = lr + n_c + n_d$ .由式(2)可知,参数向量 $\theta$ 是仅有少量的非零参数的高维稀疏向量.MISO C-ARMA系统可作为稀疏系统进行辨识.

当有 $m$ 组采样数据时,有

$$\mathbf{Y} := [y(t+1), y(t+2), \dots, y(t+m)]^T \in \mathbf{R}^m;$$

$$\begin{aligned}\Phi &:= [\varphi(t+1), \varphi(t+2), \dots, \varphi(t+m)]^T \in \mathbf{R}^{m \times N}; \\ \mathbf{V} &:= [v(t+1), v(t+2), \dots, v(t+m)]^T \in \mathbf{R}^m.\end{aligned}$$

可得式(3)的堆积形式为

$$\mathbf{Y} = \Phi \boldsymbol{\theta} + \mathbf{V}. \quad (4)$$

文献[16]给出了针对该系统的正交匹配追踪迭代算法,其核心步骤为最小二乘方法.为减小计算量、提高辨识效率,下面采用梯度追踪迭代辨识算法进行辨识.

## 2 梯度追踪迭代辨识算法

根据压缩感知重构理论,图1所示系统的辨识问题可描述为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min \|\boldsymbol{\theta}\|_0; \text{ s.t. } \|\mathbf{Y} - \Phi \boldsymbol{\theta}\| < \varepsilon.$$

其中: $\varepsilon > 0$ 为设定的允许误差, $\|\boldsymbol{\theta}\|_0$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的零范数.

将式(4)改写为如下线性组合加噪声向量的形式:

$$\mathbf{Y} = \phi_1 \theta_1 + \phi_2 \theta_2 + \dots + \phi_i \theta_i + \dots + \phi_N \theta_N + \mathbf{V},$$

其中 $\phi_i, \theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 分别为信息矩阵的第 $i$ 列和参数向量的第 $i$ 个参数.由于参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 稀疏,上式的右侧只有少量关键非零项.辨识目标即确定少量非零项的位置,根据采样测量数据估计非零参数,并结合先验条件实现对时延的估计.

由于 $\Phi$ 中包含未知的噪声信息 $-w(t-i), v(t-i)$ ,难以确定非零参数的位置.解决思路是:采用递阶辨识和交互估计原理,令 $k = 1, 2, \dots$ 为更新未知噪声项的迭代变量,用 $k-1$ 次的估计值 $\hat{w}_{k-1}(t-i), \hat{v}_{k-1}(t-i)$ 代替未知的 $-w(t-i), v(t-i)$ .替代后的信息向量 $\varphi(t)$ 表示为

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_k(t) &= [\varphi_s^T(t), -\hat{w}_{k-1}(t-1), -\hat{w}_{k-1}(t-2), \dots, \\ &\quad -\hat{w}_{k-1}(t-n_c), \hat{v}_{k-1}(t-1), \\ &\quad \hat{v}_{k-1}(t-2), \dots, \hat{v}_{k-1}(t-n_d)]^T.\end{aligned} \quad (5)$$

结合式(2)与(3), $-w(t-i), v(t-i)$ 的估计值 $\hat{w}_{k-1}(t-i), \hat{v}_{k-1}(t-i)$ 可由下式计算:

$$\begin{aligned}\hat{w}_k(t-i) &= y(t-i) - \hat{\varphi}_{s,k}^T(t-i) \hat{\boldsymbol{\theta}}_{s,k}, \\ \hat{v}_k(t-i) &= \hat{w}_k(t-i) - \hat{\varphi}_{n,k}^T(t-i) \hat{\boldsymbol{\theta}}_{n,k}.\end{aligned} \quad (6)$$

定义 $q$ 为选择非零参数的内部迭代变量, $\lambda_{k,q}$ 为索引,表示第 $k$ 次迭代更新信息矩阵后第 $q$ 次内部迭代所确定非零参数的位置; $\Lambda_{k,q}$ 为索引集; $\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}$ 为由索引集指示的 $\hat{\phi}_i$ 构成的子信息矩阵; $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k,q}$ 为第 $k, q$ 次迭代得到的参数估计; $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{k,q} \in \mathbf{R}^N$ 为第 $k, q$ 次根据 $\Lambda_{k,q}$ 重构的参数向量;每次迭代的残差用 $\mathbf{r}_{k,q}$ 表示.

由式(5)与(6)可重构不含未知项的信息向量和信息矩阵

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_k(t) &= [\varphi_s^T(t), -\hat{w}_{k-1}(t-1), -\hat{w}_{k-1}(t-2), \\ &\quad \dots, -\hat{w}_{k-1}(t-n_c), \hat{v}_{k-1}(t-1), \\ &\quad \hat{v}_{k-1}(t-2), \dots, \hat{v}_{k-1}(t-n_d)]^T,\end{aligned} \quad (7)$$

$$\hat{\Phi}_k = [\hat{\varphi}_k(t+1), \hat{\varphi}_k(t+2), \dots, \hat{\varphi}_k(t+m)]^T.$$

定义残差

$$\mathbf{r}_{k,q} := \mathbf{Y} - \hat{\Phi}_k \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{k,q} \quad (8)$$

为确定关键非零参数位置,定义准则函数

$$\varepsilon_{k,q}(i) := \|\phi_i \theta_i - \mathbf{r}_{k,q-1}\|^2, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

使 $\varepsilon_{k,q}(i)$ 最小的 $\phi_i \theta_i$ 即为第 $q$ 次迭代所要确定的非零参数.极小化 $\varepsilon_{k,q}(i)$ 有 $\theta_i = \frac{\phi_i^T \mathbf{r}_{k,q-1}}{\|\phi_i\|^2}$ ,将 $\theta_i$ 代回 $\varepsilon_{k,q}(i)$ 可得

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k,q}(i) &= \min_{\theta_i} \|\phi_i \theta_i - \mathbf{r}_{k,q-1}\|^2 = \\ &\quad \|\mathbf{r}_{k,q-1}\|^2 - \left( \frac{\phi_i^T \mathbf{r}_{k,q-1}}{\|\phi_i\|} \right)^2.\end{aligned} \quad (9)$$

由式(9)可知,当 $\mathbf{r}_{k,q-1}$ 与 $\frac{\phi_i^T}{\|\phi_i\|}$ 内积最大时, $\varepsilon_{k,q}(i)$ 有最小值.即第 $q$ 次迭代确定的索引为

$$\lambda_{k,q} = \arg \max_{i \in \Omega \setminus \Lambda_{k,q-1}} \left| \left\langle \mathbf{r}_{k,q-1}, \frac{\phi_i}{\|\phi_i\|} \right\rangle \right|, \quad (10)$$

由 $\lambda_{k,q}$ 分别更新索引集 $\Lambda_{k,q}$ 和子信息矩阵 $\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}$ ,有

$$\begin{aligned}\Lambda_{k,q} &:= \Lambda_{k,q-1} \cup \lambda_{k,q}, \\ \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} &:= \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q-1}} \cup \phi_{\lambda_{k,q}}.\end{aligned} \quad (11)$$

为了获得非零参数的估计,定义准则函数

$$J(\boldsymbol{\theta}_{k,q}) = \|\mathbf{Y} - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \boldsymbol{\theta}_{k,q}\|^2.$$

采用负梯度搜索原理<sup>[5]</sup>,极小化 $J(\boldsymbol{\theta}_{k,q})$ 可得迭代算法

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k,q} &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k,q-1} - \frac{\mu_{k,q}}{2} \text{grad}[J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k,q-1})] = \\ &\quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k,q-1} + \mu_{k,q} \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T [\mathbf{Y} - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k,q-1}],\end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\mu_{k,q}$ 为迭代步长.

值得注意的是:因为等式右边 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k,q-1}$ 为 $q-1$ 维向量,式(12)无法得到第 $q$ 次迭代的估计.为了解决这一问题,在 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k,q-1}$ 中应根据 $\Lambda_{k,q}$ 对应地增加一个零元素,重构 $q$ 维的参数向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Lambda_{k,q}}$ 代替式(12)中的 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k,q-1}$ ,即

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k,q} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Lambda_{k,q}} + \mu_{k,q} \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T [\mathbf{Y} - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Lambda_{k,q}}]. \quad (13)$$

值得说明的是 $\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\Lambda_{k,q}} = \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k,q-1}$ .

将式(13)代入 $J(\boldsymbol{\theta}_{k,q})$ 可求得最佳迭代步长

$$g(\mu_{k,q}) = J(\hat{\theta}_{k,q}) = \|Y - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\theta}_{\Lambda_{k,q}}\|^2 - 2\mu_{k,q} \|\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T [Y - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\theta}_{\Lambda_{k,q}}]\|^2 + \mu_{k,q}^2 \|\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T [Y - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\theta}_{\Lambda_{k,q}}]\|^2.$$

对  $\mu_{k,q}$  求导并令其为零,则有

$$\frac{\partial g(\mu_{k,q})}{\partial \mu_{k,q}} = -2 \|\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T [Y - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\theta}_{\Lambda_{k,q}}]\|^2 + 2\mu_{k,q} \|\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T [Y - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\theta}_{\Lambda_{k,q}}]\|^2 = 0.$$

可得最佳迭代步长  $\mu_{k,q}$  为

$$\mu_{k,q} = \frac{\|\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T [Y - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\theta}_{\Lambda_{k,q}}]\|^2}{\|\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T [Y - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\theta}_{\Lambda_{k,q}}]\|^2} = \frac{\mathbf{r}_{k,q-1}^T \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \nabla_{k,q}}{\|\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \nabla_{k,q}\|^2} = \frac{\langle \mathbf{r}_{k,q-1}, \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \nabla_{k,q} \rangle}{\|\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \nabla_{k,q}\|^2}, \quad (14)$$

其中  $\nabla_{k,q} := \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T [Y - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\theta}_{\Lambda_{k,q}}]$ . 残差  $\mathbf{r}_{k,q}$  可由式(8)计算,但需要进行矩阵和向量的乘法运算,计算量较大. 为进一步减小计算量,将式(13)代入(8)可得

$$\mathbf{r}_{k,q} = \mathbf{r}_{k,q-1} - \mu_{k,q} \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \nabla_{k,q}. \quad (15)$$

式(15)为  $\mathbf{r}_{k,q}$  的递推表达式,由于  $\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \nabla_{k,q}$  和  $\mathbf{r}_{k,q-1}$  已得到,式(15)与(8)相比可减少计算量.

由式(6)~(15)可得含有未知时延的 MISO C-ARMA 系统的梯度追踪迭代 (gradient pursuit iterative, GPI) 辨识算法. 具体实施步骤如下.

step 1: 收集有限的输入输出数据  $\{u_i(t), y(t): i =$

$1, 2, \dots, r; t = 1, 2, \dots, m\}$ , 设定参数估计精度  $\varepsilon$ .

step 2: 设置初值, 令  $\mathbf{r}_{0,0} = \mathbf{Y}, \Lambda_{0,0} = \emptyset, \hat{\Phi}_{\Lambda_{0,0}} = \emptyset, \hat{\theta}_0 = \mathbf{0}$ .

step 3: 由式(7)构造堆积信息矩阵  $\hat{\Phi}_k$ .

step 4: 根据式(10)确定索引  $\lambda_q$ , 并根据式(11)更新集合  $\Lambda_{k,q}$  和子信息矩阵  $\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}$ .

step 5: 根据  $\Lambda_{k,q}$  由  $\hat{\theta}_{\Lambda_{k,q-1}}$  构造  $\hat{\theta}_{\Lambda_{k,q}}$ .

step 6: 由式(14)计算迭代步长; 由式(13)计算参数估计  $\hat{\theta}_{k,q}$ ; 并根据  $\Lambda_{k,q}$  将  $\hat{\theta}_{k,q}$  恢复为  $N$  维的  $\hat{\vartheta}_{k,q}$ .

step 7: 比较  $\hat{\vartheta}_{k,q}$  和  $\hat{\vartheta}_{k,q-1}$ , 如果  $\|\hat{\vartheta}_{k,q} - \hat{\vartheta}_{k,q-1}\| > \varepsilon_0$ , 则由式(15)更新残差  $\mathbf{r}_{k,q}$ , 且令  $q = q + 1$ , 回到 step 4 继续迭代; 否则迭代停止, 获得第  $k$  次迭代的参数估计向量  $\hat{\theta}_k$ .

step 8: 由式(6)根据  $\hat{\theta}_k$  更新  $-\hat{w}_k(t-i), \hat{v}_k(t-i)$ .

step 9: 比较  $\hat{\theta}_k$  和  $\hat{\theta}_{k-1}$ , 如果  $\|\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}\| > \varepsilon$ , 则令  $k = k + 1$ , 回到 step 3 继续迭代; 否则得到参数向量估计  $\hat{\theta}$ .

根据参数估计值  $\hat{\theta} \in \mathbf{R}^N$  结构, 输入通道数据回归长度  $l$  以及  $n_{bi}, n_c, n_d$  等先验知识, 可计算得到各输入通道的时延

$$\hat{\tau}_1 = n_1, \hat{\tau}_i = n_i - (l - \hat{\tau}_{i-1} - n_{bi}), i = 2, 3, \dots, r, \quad (16)$$

其中  $n_i$  为参数向量  $\hat{\theta} \in \mathbf{R}^N$  中第  $i$  个零元素块所包含的零元素数目.

### 3 计算量分析

与文献[16]中的正交匹配追踪迭代(OMPI)算

表1 GPI算法和OMPI算法计算量比较

算法	变量	计算序列	乘法次数	加法次数
OMPI	$\hat{\theta}_{k,q}$	$S_{k,q} := \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}$	$q^2 m$	$q^2(m-1)$
		$S'_{k,q} := S_{k,q}^{-1}$	$q^3$	$q^3 - q^2$
		$\beta_{k,q} := \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T Y$	$qm$	$q(m-1)$
		$\hat{\theta}_{k,q} = S'_{k,q} \beta_{k,q}$	$q^2$	$q(q-1)$
	$\mathbf{r}_{k,q}$	$\mathbf{r}_{k,q} := Y - \hat{\Phi}_k \hat{\vartheta}_{k,q}$	$qmN$	$qmN$
		总计 ( $N_1$ )	$\sum_{q=1}^K [2q^3 + 2q^2 m + 2q(mN + m - 1)]$	
GPI	$\hat{\theta}_{k,q}$	$\nabla_{k,q} = \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T [Y - \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \hat{\theta}_{\Lambda_{k,q}}]$	$2qm$	$(2m-1)q$
		$Q_{k,q} := \hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}} \nabla_{k,q}$	$qm$	$(q-1)m$
		$\mu_{k,q} = \frac{\langle \mathbf{r}_{k,q-1}, Q_{k,q} \rangle}{\ Q_{k,q}\ ^2}$	$2m+1$	$2(m-1)$
		$\hat{\theta}_{k,q} = \hat{\theta}_{k,q-1} + \mu_{k,q} \nabla_{k,q}$	$q$	$q$
	$\mathbf{r}_{k,q}$	$\mathbf{r}_{k,q} = \mathbf{r}_{k,q-1} - \mu_{k,q} Q_{k,q}$	$N$	$N$
		总计 ( $N_2$ )	$\sum_{q=1}^K [6qm + 3m + 2N + q - 1]$	

法相比,GPI算法不需要计算协方差矩阵  $\mathbf{S}_k := [\hat{\Phi}_{\Lambda_{k,q}}^T \Phi_{\Lambda_{k,q}}]^{-1}$ ,因而有较小的计算量. 算法的计算量通常可以用浮点预算次数计算(即每次迭代所需的加法次数和乘法次数)<sup>[17]</sup>. 为了有效地说明,OMPI算法和GPI算法的计算量如表1所示(相同步骤的计算量不再比较).

显然计算量  $N_1 > N_2$ ,表明文中针对含有未知时延MISO C-ARMA系统提出的GPI算法计算量与OMPI算法计算量相比较小.

### 4 仿真实例

考虑如下含有未知输入时延的MISO C-ARMA模型:

$$y(t) = \sum_{i=1}^3 z^{-\tau_i} B_i(z) u_i(t) + \frac{D(z)}{C(z)} v(t),$$

$$B_1(z) = 1.85z^{-1} + 1.20z^{-2},$$

$$B_2(z) = -1.00z^{-1} + 0.90z^{-2},$$

$$B_3(z) = -1.90z^{-1} + 0.60z^{-2},$$

$$C(z) = 1 - 0.70z^{-1},$$

$$D(z) = 1 + 0.20z^{-1}.$$

系统输入通道的时滞分别为  $\tau_1 = 9, \tau_2 = 14, \tau_3 = 19$ . 取  $l = 40$ ,系统的参数向量为

$$\theta = [\mathbf{0}_9, 1.85, 1.20, \mathbf{0}_{43}, -1.00, 0.90, \mathbf{0}_{43}, -1.90, 0.60, \mathbf{0}_{19}, -0.70, 0.20]^T \in \mathbf{R}^N,$$

其中  $\mathbf{0}_i$  表示有  $i$  个零元素的块.  $N = lr + n_c + n_d = 122$ ,关键非零参数为

$$K = \sum_{i=1}^3 n_{bi} + n_c + n_d = 8.$$

仿真时,输入  $\{u_i(t)\}$  采用零均值单位方差随机不相关序列,噪声  $\{v(t)\}$  为零均值方差为  $\sigma^2$  的白噪声序列. 定义参数估计误差  $\delta := \|\theta - \hat{\theta}_k\|/\|\theta\| \times 100\%$ .

取采样数据长度  $m = 300$ ,当  $\sigma^2$  为  $0.50^2$  和  $1.00^2$  时,采用GPI算法,  $\delta$  随  $k$  的变化如图2所示. GPI算法预测的系统输出和真实输出及误差如图3所示. 当噪声方差  $\sigma^2 = 0.50^2$  时,估计得到的稀疏参数向量中非零参数索引及数值如表2所示.

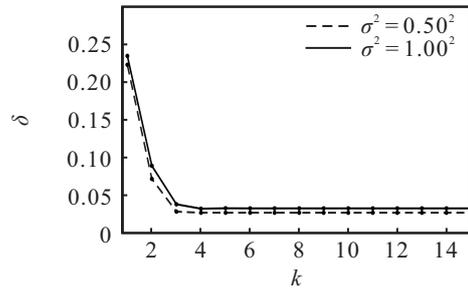


图2 不同噪声下参数估计误差随迭代次数k的变化

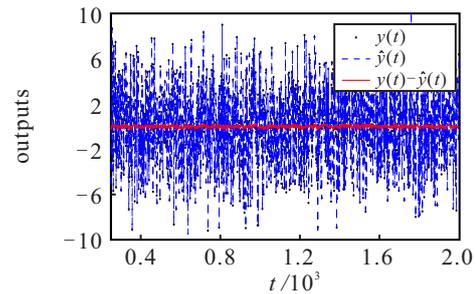


图3 系统真实输出和预测输出比较

表2 GPI算法得到的稀疏参数向量索引及参数估计

索引值	10	11	55	56	100	101	121	122
参数估计值	1.8776	1.2158	-0.93381	0.89094	-1.9382	0.61047	-0.73068	0.19322

在同一台计算机上分别运行OMPI算法和GPI算法,运行时长分别为0.487415s, 0.435738s,表明GPI算法具有较高的效率,与计算量分析结果相一致.

由表2中的索引位置可知,  $\hat{\theta}$  中各个零元素块分别为  $n_1 = 9, n_2 = 43, n_3 = 43, n_4 = 19$ . 结合式(16)可计算得到各输入通道的时延为

$$\hat{\tau}_1 = n_1 = 9,$$

$$\hat{\tau}_2 = n_2 - (l - \hat{\tau}_1 - n_{b1}) =$$

$$43 - (40 - 9 - 2) = 14,$$

$$\hat{\tau}_3 = n_3 - (l - \hat{\tau}_2 - n_{b2}) =$$

$$43 - (40 - 14 - 2) = 19. \quad (17)$$

综合图2、图3、表2及式(17)可知: 1) GPI算法的参数估计误差随迭代次数  $k$  的增加逐渐减少,最终趋于稳定; 2) 在有限采样数据量下, GPI算法能够达到较好的辨识精度; 3) GPI算法在有效估计参数的同时能够获得系统时延的估计; 4) GPI算法在不同的噪声下均能够达到较好的辨识精度,具有一定的鲁棒性.

### 5 结论

针对含有未知时滞的MISO C-ARMA系统的参数与时延估计问题对参数化的系统模型所具有的稀

疏特征,基于递阶原理和压缩感知思想,采用梯度追踪算法实现参数辨识和时延估计. 所提出的算法能够有效获取稀疏参数向量中关键非零参数的位置,从而实现待辨识模型的降维,进而利用有限的测量数据实现参数和时延估计. 与正交匹配追踪迭代算法相比,所提出的算法在获得较高辨识精度的同时具有较少的计算量. 仿真实例表明该算法是有效的.

#### 参考文献(References)

- [1] Wang Q G, Guo X, Zhang Y. Direct identification of continuous time delay systems from step responses[J]. *Journal of Process Control*, 2001, 11(5): 531-542.
- [2] Li L W, Zhang H L, Ren X M. Robust adaptive identification for sandwich systems with unknown time-delay[J]. *ISA Transactions*, 2020, 100: 289-298.
- [3] Islam S I, Lim C C, Shi P. Robust fault detection of T-S fuzzy systems with time-delay using fuzzy functional observer[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2020, 392: 1-23.
- [4] Bedoui S, Ltaief M, Abderrahim K. Hierarchical gradient based identification of discrete-time delay systems[C]. *The 52nd IEEE Conference on Decision and Control*. Firenze, 2013: 4565-4570.
- [5] 丁锋. 系统辨识新论[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 200-220.  
(Ding F. *System identification—New theory and methods*[M]. Beijing: Science Press, 2013: 200-220.)
- [6] Tropp J A. Just relax: Convex programming methods for identifying sparse signals in noise[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(3): 1030-1051.
- [7] Ding F, Meng D D, Dai J Y, et al. Least squares based iterative parameter estimation algorithm for stochastic dynamical systems with ARMA noise using the model equivalence[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2018, 16(2): 630-639.
- [8] Ding F, Pan J, Alsaedi A, et al. Gradient-based iterative parameter estimation algorithms for dynamical systems from observation data[J]. *Mathematics*, 2019, 7(5): 428.
- [9] Liu L J, Wang Y, Wang C, et al. Maximum likelihood recursive least squares estimation for multivariate equation-error ARMA systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, 355(15): 7609-7625.
- [10] Donoho D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [11] Tropp J A. Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2004, 50(10): 2231-2242.
- [12] 刘艳君, 陶太洋, 丁锋. MISO系统基于正交匹配追踪算法的参数与时滞联合估计[J]. *控制与决策*, 2015, 30(11): 2103-2107.  
(Liu Y J, Tao T Y, Ding F. Parameter and time-delay identification for MISO systems based on orthogonal matching pursuit algorithm[J]. *Control and Decision*, 2015, 30(11): 2103-2107.)
- [13] 陶太洋, 刘艳君, 丁锋. MISO-FIR系统的梯度追踪辨识算法[J]. *信息与控制*, 2016, 45(2): 151-156.  
(Tao T Y, Liu Y J, Ding F. Gradient pursuit identification algorithm for MISO-FIR systems[J]. *Information and Control*, 2016, 45(2): 151-156.)
- [14] 刘艳君, 韩雪, 丁锋. 基于辅助变量的压缩采样匹配追踪闭环系统辨识方法[J]. *控制与决策*, 2017, 32(10): 1837-1843.  
(Liu Y J, Han X, Ding F. An instrumental variable based compressed sampling matching pursuit method for closed-loop identification[J]. *Control and Decision*, 2017, 32(10): 1837-1843.)
- [15] 刘艳君, 尤俊瑶, 丁锋. 基于辅助模型正交匹配追踪的多输入系统迭代辨识算法[J]. *控制与决策*, 2019, 34(4): 787-792.  
(Liu Y J, You J Y, Ding F. Iterative identification for multiple-input systems based on auxiliary model-orthogonal matching pursuit[J]. *Control and Decision*, 2019, 34(4): 787-792.)
- [16] Tao T Y, Tian F. A parameter and time delays estimation algorithm for MISO FIR-ARMA systems[C]. *The 32nd Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. Hefei, 2020: 1010-1014.
- [17] 丁锋. 辨识方法的计算效率(2): 迭代算法[J]. *南京信息工程大学学报: 自然科学版*, 2012, 4(5): 385-401.  
(Ding F. Computational efficiency of the identification methods—Part B: Iterative algorithms[J]. *Journal of Nanjing University of Information Science & Technology: Natural Science Edition*, 2012, 4(5): 385-401.)

#### 作者简介

陶太洋(1990—), 男, 硕士, 从事系统辨识、自适应控制的研究, E-mail: taoyue12358@126.com;

汪宝(1992—), 男, 讲师, 博士, 从事量子光学、图像处理的研究, E-mail: baowang@hust.edu.cn;

汪学海(1981—), 男, 副教授, 博士, 从事系统辨识、自适应控制等研究, E-mail: xuehaiwang735@163.com.

(责任编辑: 闫妍)