

控制与决策

Control and Decision

基于可能度矩阵的概率语言多属性决策方法

方冰, 韩冰, 谢德于

引用本文:

方冰, 韩冰, 谢德于. 基于可能度矩阵的概率语言多属性决策方法[J]. *控制与决策*, 2022, 37(8): 2149–2156.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0350>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

属性值为区间数的决策对象相对可能度关系模型及其应用

Relative possibility relation model for decision making objects with multiple attribute values as interval number and its application
控制与决策. 2022, 37(4): 1025–1034 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.1075>

概率区间值直觉犹豫模糊Maclaurin对称平均算子及决策方法

Probabilistic interval-valued intuitionistic hesitant fuzzy Maclaurin symmetric mean operators and decision method
控制与决策. 2021, 36(5): 1249–1258 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1370>

基于犹豫度和相似度的专家权重确定方法及其应用

Expert weights determination method and application based on hesitancy degree and similarity measure
控制与决策. 2021, 36(6): 1482–1488 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.1382>

基于策略权重的模糊多属性决策方法

Strategic weight manipulation in fuzzy multiple attribute decision making
控制与决策. 2021, 36(5): 1259–1267 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0542>

基于云模型和多层权重求解的多粒度语言大群体决策方法

Multi-granularity linguistic large group decision-making based on cloud model and multi-layer weight determination
控制与决策. 2021, 36(9): 2257–2266 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0102>

基于可能度矩阵的概率语言多属性决策方法

方冰[†], 韩冰, 谢德于

(陆军指挥学院, 南京 210045)

摘要: 为解决两个概率语言术语集之间的优劣比较这一基本问题, 在已有可能度计算方法的基础上, 提出一种改进的可能度公式. 该可能度公式能够克服已有可能度公式的缺点, 具有计算过程简单、区分能力强、易于拓展应用等特点. 进一步研究发现: 基于该可能度公式对多个评估对象进行两两比较得到的可能度矩阵, 具有加性一致性的模糊互补偏好关系; 将多个可能度矩阵加权平均得到的综合可能度矩阵, 也具有加性一致性的模糊互补偏好关系. 据此, 构建一种概率语言多属性决策方法, 并将其应用于军队院校教育教学质量评价. 数值实验表明, 所提出的概率语言多属性决策方法结构简单、计算过程清晰且具有较强的自检能力, 能够通过确保计算过程的正确性来保证决策结果的有效性.

关键词: 概率语言术语集; 多属性决策; 可能度; 可能度矩阵; 加性一致性; 教育教学质量评价

中图分类号: C934

文献标志码: A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0350

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



引用格式: 方冰, 韩冰, 谢德于. 基于可能度矩阵的概率语言多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2022, 37(8): 2149-2156.

Probabilistic linguistic multi-attribute decision-making method based on possibility degree matrix

FANG Bing[†], HAN Bing, XIE De-yu

(Army Command College of PLA, Nanjing 210045, China)

Abstract: To solve the basic problem of comparing two probabilistic linguistic term sets (PLTSs), we propose an improved possibility degree (PD) formula based on the existing ones. The new PD formula is simple to operate and can effectively distinguish any two PLTSs. Moreover, its application can be easily extended. It is found in further research that the PD matrix constructed by pairwise comparing multiple alternatives, based on the new PD formula, constitutes a fuzzy reciprocal preference relationship with additive consistency; the comprehensive possibility matrix constructed by weighted averaging multiple PD matrices, also constitutes a fuzzy reciprocal preference relationship with additive consistency. Based on these findings, we develop a probabilistic linguistic multi-attribute decision-making (MADM) method, and apply it to evaluate the education and teaching quality in military academies. Numerical results show that the proposed probabilistic linguistic MADM method employs a simple structure and has a strong self-checking capability in the calculation process, which can ensure the validity of the decision-making results.

Keywords: probabilistic linguistic term set; multi-attribute decision-making; possibility degree; possibility degree matrix; additive consistency; evaluation of the education and teaching quality

0 引言

多属性决策是现代管理科学研究的核心课题, 不断被众多研究人员注入新元素, 具有广泛的适用性. 多属性决策本质上是在多个相互冲突的指标(亦称属性、准则)间恰当权衡、择优选择. 在多属性决策发展的初级阶段, 人们使用定量信息(如确定值、模糊集^[1]、直觉模糊集^[2]、犹豫模糊集^[3]等)对评估对象进行价值评定. 但是, 随着社会经济的高速发展, 人

类活动变得越来越复杂, 决策问题也变得越来越难以理解; 而且, 决策允许的时间非常有限. 在这种情形下, 定性信息是对评估对象进行价值评定的首选. 从某种意义上讲, 以自然语言形式表达定性评估信息的模糊语言集, 是进行复杂决策实践的唯一选择^[4]. 模糊语言集虽然牺牲了部分表述精度, 却更加切合人们的思维习惯, 能够有效减轻决策者决策时的心理压力. 为应对决策问题复杂性不断增加的情况, 学者们

收稿日期: 2021-03-01; 录用日期: 2021-06-03.

责任编辑: 徐泽水.

[†]通讯作者. E-mail: bingfang_ch@163.com.

提出了更为复杂的语言计算概念,如虚拟语言概念^[5]和语言二元组概念^[6].但是,这些语言计算概念尚不足以表达决策者的犹豫心理,因为它们仅包含了表达定性评估信息的单个语言术语.为了描述定性语境中决策者的犹豫心理,学者们提出了犹豫模糊语言术语集的概念,它允许决策者同时使用多个语言术语对评估对象进行价值评定,从而初步具备了描述群体评价信息的能力^[7-8].但是,在某些情况下,犹豫模糊语言术语集可能会导致严重的信息丢失,比如一位专家提供的定性评价信息是“好”,而另外两位专家提供的是“坏”,此时若将群体偏好信息表达为{“好”,“坏”}是不准确的.

为了精准建模专家群体的定性评估信息,有效描述其思维模糊性和认知不确定性,Pang等^[9]提出了概率语言术语集的概念.概率语言术语集不仅可以表达每个专家的偏好信息,而且能够描述相应偏好信息的权重信息,也即概率^[10-11].相比于犹豫模糊语言术语集,概率语言术语集能够有效避免原始语言评价信息的损失,所表达的定性评价信息能较好地反映群体决策的不确定性特征,而且,概率语言术语集所体现出的灵活性、可信度和可解释性均达到了较高的水准.因此,概率语言术语集能够因其强大的不确定性决策信息表达能力而具有独特优势,引起了人们广泛的研究兴趣.基于概率语言术语集的多属性决策方法也已广泛地应用于项目投资、风险评估、模式识别、医疗诊断等领域,并产生了良好的社会效益^[10].

在概率语言术语集的理论研究上,关于两个概率语言术语集之间的优劣比较这一基本问题却一直没有得到很好的解决.Pang等^[9]定义了概率语言术语集的得分函数和偏差函数,并提出了基于得分值和偏差度的概率语言术语集比较方法.但是,Pang的比较方法是一种基于绝对优先关系的排序,未能反映两个概率语言术语集间的犹豫模糊性,且具有较高的计算复杂度.为更合理地对两个概率语言术语集进行优劣比较,Bai等^[12]基于图解法构造了两个概率语言术语集之间的可能度公式,用于计算一个概率语言术语集不劣于另一个概率语言术语集的程度;Mao等^[13]和Liu等^[14]基于双层比较的方式,构建了更为复杂的可能度计算方法.为有效提高概率语言可能度公式的区分能力,Lin等^[4]综合了Pang的方法和Mao的方法的优点,构建了区分能力更强的可能度计算方法.然而,Lin的可能度计算方法也采用了双层比较的方式,这种比较方式不仅繁琐,而且限制了可能度公式的可能应用场景,将其用途限制在两个概率语言

术语集的优劣比较上.

本文在Lin等学者可能度计算方法的基础上,通过非线性扩展,提出一种改进的概率语言可能度计算公式,新的可能度公式能综合反映两个概率语言术语集的“期望”特征和“方差”特性.数值实验表明,与已有的可能度计算方法相比,本文所提出的概率语言可能度公式计算简单,区分能力强,能够有效实现两个概率语言术语集之间的优劣比较,且易于拓展应用.其次,本文在新可能度公式的基础上,进一步构建一种基于可能度矩阵的新型概率语言多属性决策方法,该决策方法无需对较短的概率语言术语集进行补齐等规范化操作.数值实验表明,基于可能度矩阵的新型概率语言多属性决策方法结构简单,计算过程清晰且具有较强的过程自检能力,能够通过确保计算过程的正确性来保证计算结果的有效性.最后,将所提出的概率语言多属性决策方法运用到新时期军队院校教育教学质量评价上,进一步表明了该方法的有效性.

1 理论基础

1.1 概率语言术语集^[10,15]

语言术语集是一类特殊的集合,它包含了一组有限的语言术语,在定性评估时用作评估语言变量.

定义1 语言术语集 $S = \{s_i | i = 0, 1, \dots, \ell\}$ 由有限个语言术语组成,且按顺序排列; ℓ 是一个给定的正整数, $\ell + 1$ 表示 S 中语言术语的个数,也称为集合 S 的基数.其中: s_i 表示一个语言术语, s_0 和 s_ℓ 分别表示 S 的下界和上界.

定义2 设 $S = \{s_i | i = 0, 1, \dots, \ell\}$ 为给定的参考语言术语集.定义在 S 上的一个概率语言术语集可以表示为

$$L = \{l^k(p^k) | l^k \in S, p^k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n\}. \quad (1)$$

其中: $l^k(p^k)$ 为概率语言元素,其包含两个组成部分:语言术语 l^k ,以及相应的概率信息 p^k ; n 为集合 L 的基数.令 r^k 为语言术语 l^k 的下标, L 内的所有概率语言元素需按 r^k 的值升序排列;如果下标值相同,则按 p^k 的值升序排列.然而,在群决策过程中,可能会有部分专家拒绝给出他们的语言评估信息.因此,概率语言术语集 L 中所有语言术语的概率和可能会出现小于1的情况,也即 $\sum_{k=1}^n p^k \leq 1$.

定义3 如果概率语言术语集 L 的概率信息不满足归一化条件 $\sum_{k=1}^n p^k = 1$,则需要对其进行标准化处理.标准化后的概率语言术语集 \tilde{L} 可以定义为

$$\tilde{L} = \{l^k(\tilde{p}^k) | \tilde{p}^k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n\}; \quad (2)$$

标准化后的概率信息为

$$\tilde{p}^k = p^k / \sum_{k=1}^n p^k. \quad (3)$$

显然, 标准化之后, 集合 \tilde{L} 中所有语言术语的概率和等于 1; 不失一般性, 仍称标准化之后的概率语言术语集为 L , 其性质会在上下文中进行明确.

定义 4 假设 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 为评估专家集合, 其权重向量为 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$, 且满足限制条件 $v_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m$ 和 $\sum_{i=1}^m v_i = 1$. 进一步, 假设专家 $(e_i, i = 1, 2, \dots, m)$ 提供的概率语言评估信息为 $L_i = \{l_i^k(p_i^k) | l_i^k \in S, p_i^k \geq 0\}$. 其中: p_i^k 为语言术语 l_i^k 的概率信息, S 为给定的参考语言术语集. 于是, 专家群体 E 给出的概率语言评估信息可以综合表述为

$$L = \{l^k(p^k) | l^k \in S, p^k = \sum_{i=1}^m v_i q_i^k\}. \quad (4)$$

其中 q_i^k 为概率语言术语集 L_i 中的语言术语 l^k 的概率信息, 其数学表达式为

$$q_i^k = \begin{cases} p_i^j, & l^k \in L_i \text{ and } l^k = l_i^j; \\ 0, & l^k \notin L_i. \end{cases} \quad (5)$$

例 1 假设 3 位专家提供的概率语言术语集形式的评估信息分别为 $L_1 = \{s_1(0.6), s_2(0.2), s_3(0.2)\}$, $L_2 = \{s_2(0.4), s_3(0.6)\}$ 和 $L_3 = \{s_1(1)\}$, 专家权重向量设置为 $\mathbf{v} = (0.3, 0.4, 0.3)^T$. 于是, 根据定义 4, 这 3 位专家给出的概率语言评估信息可以综合表述为 $L = \{s_1(0.48), s_2(0.22), s_3(0.3)\}$.

1.2 二元关系与模糊互补偏好关系^[16-17]

定义 5 假设 U 为评价对象集, 直积 $U \times U$ 的任意子集 R 被称为 U 上的二元关系, 其性质有:

- 1) $\forall u \in U$, 总有 $(u, u) \in R$ 成立, 则称二元关系 R 具有自反性;
- 2) $\forall u, v \in U$, 总有 $(u, v) \in R$ 成立, 或 $(v, u) \in R$ 成立, 则称二元关系 R 具有完备性;
- 3) $\forall u, v \in U$, 若 $(u, v) \in R$ 成立, 有 $(v, u) \in R$ 成立, 则称二元关系 R 具有对称性;
- 4) $\forall u, v \in U$, 若 $(u, v) \in R$ 和 $(v, u) \in R$ 成立, 必然有 $u = v$, 则称二元关系 R 具有反对称性;
- 5) $\forall u, v, w \in U$, 若 $(u, v) \in R$ 和 $(v, w) \in R$ 成立, 有 $(u, w) \in R$ 成立, 则称二元关系 R 具有传递性.

若二元关系 R 具有自反性和传递性, 则称该二元关系为拟序关系; 进一步, 若拟序关系 R 也具有完备性, 则称该二元关系 R 是完备的拟序关系, 也称为弱序关系. 因此, 弱序比拟序多了一个完备性的要求, 即要求 U 中的任意两个元素都能“相互比较”.

事实上, 任何一种评比, 都希望评比结果能够给出一个弱序关系, 即要求在全局评价对象中分出一个优劣次序来.

定义 6 设 U 为评价对象集, 直积 $U \times U$ 的任意模糊子集 R 被称为 U 上的模糊二元关系, 且可表示为矩阵 $\mathbf{R} = (r_{ij})_{n \times n}$, 其中 $r_{ij} \in [0, 1]$. 若对于任意 $1 \leq i, j, k \leq n$, 模糊二元关系矩阵 \mathbf{R} 都能够满足以下 2 个条件:

$$r_{ij} + r_{ji} = 1, \quad (6)$$

$$r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5, \quad (7)$$

则称由矩阵 \mathbf{R} 所确定的模糊二元关系是具有加性一致性的模糊互补偏好关系.

引理 1 设矩阵 $\mathbf{R} = (r_{ij})_{n \times n}$ 是具有加性一致性的模糊互补偏好关系; $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T$ 是矩阵 \mathbf{R} 的排序向量, 且满足限制条件 $d_k \in [0, 1], k = 1, 2, \dots, n$ 和 $\sum_{k=1}^n d_k = 1$. 对于任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 若令下式成立:

$$r_{ij} = d_i - d_j + 0.5, \quad (8)$$

则必然有等式 $r_{ij} = r_{ik} - r_{jk} + 0.5$ 成立, 也即加性一致性关系能够得到保证. 因此, 根据式 (8), 第 i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) 个评价对象的排序值可以计算为

$$d_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^n r_{ij} + 1 \right) - 0.5. \quad (9)$$

根据排序向量 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T$ 的值, 即可对各评价对象进行排序.

2 概率语言可能度计算方法

2.1 Lin 的可能度公式^[4]

为解决已有可能度公式区分能力不强的问题, Lin 等提出了如下概率语言可能度计算方法.

定义 7 假设 $S = \{s_i | i = 0, 1, \dots, \ell\}$ 为给定的参考语言术语集, $L_1 = \{l_1^k(p_1^k) | k = 1, 2, \dots, n_1\}$ 和 $L_2 = \{l_2^k(p_2^k) | k = 1, 2, \dots, n_2\}$ 为定义于其上的两个标准概率语言术语集. 概率语言术语集 $L_1 \geq L_2$ 的可能度公式^[4] 定义为

$$P(L_1 \geq L_2) = 0.5 + \frac{\sum_{k=1}^{n_1} a(l_1^k) - \sum_{k=1}^{n_2} a(l_2^k)}{2\ell}. \quad (10)$$

其中: $a(l_1^k) = r_1^k p_1^k, a(l_2^k) = r_2^k p_2^k, r_1^k$ 和 r_2^k 分别为语言术语项 l_1^k 和 l_2^k 的下标, p_1^k 和 p_2^k 为相应的概率信息.

定义 8 假设 $S = \{s_i | i = 0, 1, \dots, \ell\}$ 为给定的参考语言术语集, $L = \{l^k(p^k) | k = 1, 2, \dots, n\}$ 为定义于其上的标准概率语言术语集. 于是, L 的域值 (range value) 可定义为

$$R(L) = r^+ p^+ - r^- p^-. \quad (11)$$

其中: $r^- = \min\{r^k\}$ 和 $r^+ = \max\{r^k\}$ 分别为 L 的下界和上界, p^- 和 p^+ 为相应的概率信息.

基于式(10)和(11), Lin等将概率语言术语集 L_1 与 L_2 之间的比较规则定义如下:

- 1) 如果 $P(L_1 \geq L_2) > 0.5$, 则有 $L_1 \succ L_2$.
- 2) 如果 $P(L_1 \geq L_2) = 0.5$, 则需要进一步比较其

域值:

- ① 若 $R(L_1) < R(L_2)$, 则有 $L_1 \succ L_2$;
- ② 若 $R(L_1) = R(L_2)$, 则有 $L_1 \sim L_2$.

2.2 改进的可能度公式

定义9 假设 $S = \{s_i | i = 0, 1, \dots, \ell\}$ 为给定的参考语言术语集, $L_1 = \{l_1^k(p_1^k) | k = 1, 2, \dots, n_1\}$ 和 $L_2 = \{l_2^k(p_2^k) | k = 1, 2, \dots, n_2\}$ 为定义于其上的两个标准概率语言术语集. 于是, 概率语言术语集 $L_1 \geq L_2$ 的可能度公式可定义为

$$P(L_1 \geq L_2) = 0.5 + \sum_{k=1}^{n_1} b(l_1^k) - \sum_{k=1}^{n_2} b(l_2^k). \quad (12)$$

其中: $\forall k = 1, 2, \dots, n_1$ 或 $\forall k = 1, 2, \dots, n_2$, 有

$$b(l_1^k) = \left[\frac{r_1^k}{\ell} - 0.5 \left(\frac{r_1^k}{\ell} \right)^2 \right] p_1^k, \quad (13)$$

$$b(l_2^k) = \left[\frac{r_2^k}{\ell} - 0.5 \left(\frac{r_2^k}{\ell} \right)^2 \right] p_2^k, \quad (14)$$

r_1^k 和 r_2^k 分别为语言术语 l_1^k 和 l_2^k 的下标, p_1^k 和 p_2^k 为相应的概率信息.

定义9中所用的非线性变换函数是 $f(x) = x - x^2/2$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, 有 $f'(x) = 1 - x > 0$ 和 $f''(x) = -1 < 0$ 成立. 因此, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内为严格单调递增的凹函数, 且有 $f(0) = 0$ 和 $f(1) = 0.5$. 基于可能度公式(12), 两个概率语言术语集 L_1 与 L_2 之

间的比较规则可定义如下:

- 1) 如果 $P(L_1 \geq L_2) > 0.5$, 则 $L_1 \succ L_2$;
- 2) 如果 $P(L_1 \geq L_2) = 1.0$, 则 L_1 绝对优于 L_2 ;
- 3) 如果 $P(L_1 \geq L_2) = 0.5$, 则 $L_1 \sim L_2$.

2.3 比较分析

定义7所示的可能度计算方法, 本质上是一种基于得分函数的比较方法. 然而, 以“线性和”的方式定义的可能度公式(10)却只能反映两个概率语言术语集“期望”特征的差异, 而无法反映其“方差”特性的差异. 所以, 可能度公式(10)必须辅以其他的手段来完成两个概率语言术语集之间的优劣比较, 比如式(11)中定义的域值. 尽管 Lin 的计算方法比较复杂, 但它确实提高了可能度公式的区分能力.

定义9通过对式(10)所示的可能度公式进行非线性扩展, 提出了改进的可能度公式(12). 改进的可能度公式不仅能够反映两个概率语言术语集“期望”特征的差异, 而且能够反映其“方差”特性的差异; 而且, 改进的可能度公式无需借助双层比较的方式就能完成两个概率语言术语集之间的优劣比较, 且能综合度量其优劣程度. 可以说, 定义9在保留定义7的区分能力的基础上, 进一步降低了计算复杂度.

为充分检验前文所述的几种可能度计算方法的区分能力, 这里构建3组不易区分的概率语言术语集, 进行如表1所示的数值实验. 表1所用的参考语言术语集为 $S = \{s_i | i = 0, 1, \dots, 5\}$. 通过对表1的计算结果进行比较可知, 改进的可能度计算公式能够在区分能力上与 Lin 的可能度计算方法保持一致.

表1 几种可能度公式的计算比较

可能度计算方法	$L_1 = \{s_2(0.5), s_3(0.5)\}$ $L_2 = \{s_1(0.5), s_4(0.5)\}$	$L_1 = \{s_2(0.3), s_3(0.7)\}$ $L_2 = \{s_1(0.5), s_4(0.5)\}$	$L_1 = \{s_2(0.4), s_3(0.2), s_4(0.4)\}$ $L_2 = \{s_1(0.4), s_3(0.2), s_5(0.4)\}$
Bai的方法 ^[12]	$L_1 \sim L_2$	$L_1 \succ L_2$	$L_1 \sim L_2$
Mao的方法 ^[13]	$L_1 \succ L_2$	$L_1 \sim L_2$	$L_1 \succ L_2$
Liu的方法 ^[14]	$L_1 \sim L_2$	$L_1 \succ L_2$	$L_1 \sim L_2$
Lin的方法 ^[14]	$L_1 \succ L_2$	$L_1 \succ L_2$	$L_1 \succ L_2$
本文方法	$L_1 \succ L_2$	$L_1 \succ L_2$	$L_1 \succ L_2$

正如后文所示, 可能度计算公式(12)通过精简双层比较的方式大大拓展了概率语言可能度公式的应用空间, 而不仅仅把其用途局限在对两个概率语言术语集的优劣比较上. 基于新可能度公式对多个评估对象进行两两比较得到的可能度矩阵具有一些优秀的特点, 而这些特点来源于新可能度公式.

2.4 新可能度公式的性质

改进的可能度公式具有一些优秀的性质, 这些性质为其后续拓展应用奠定了坚实的基础. 其性质可

以概括在如下的定理中.

定理1 设 $S = \{s_i | i = 0, 1, \dots, \ell\}$ 为给定的参考语言术语集, $L_i = \{l_i^k(p_i^k) | k = 1, 2, \dots, n_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) 为定义于其上的3个标准概率语言术语集. 于是, 可能度计算公式(12)所具有的性质概括如下:

- 1) 有界性: $0 \leq P(L_1 \geq L_2) \leq 1$;
- 2) 互补性: $P(L_1 \geq L_2) + P(L_2 \geq L_1) = 1$;
- 3) 自反性: $P(L_1 \geq L_1) = 0.5$;
- 4) 传递性: 如果有不等式 $P(L_1 \geq L_2) \geq 0.5$ 和

不等式 $P(L_2 \geq L_3) \geq 0.5$ 成立, 则有不等式 $P(L_1 \geq L_3) \geq 0.5$ 成立;

5) 一致性: 等式 $P(L_1 \geq L_3) = P(L_1 \geq L_2) - P(L_3 \geq L_2) + 0.5$ 恒成立.

证明 1) 有界性证明. 根据式(13)和(14)中的定义可知

$$0 \leq b(l_1^k) \leq 0.5p_1^k, \quad k = 1, 2, \dots, n_1;$$

$$0 \leq b(l_2^k) \leq 0.5p_2^k, \quad k = 1, 2, \dots, n_2.$$

在上面两个不等式的基础上, 根据标准概率语言术语集的概率标准化条件可得

$$-0.5 \leq \sum_{k=1}^{n_1} b(l_1^k) - \sum_{k=1}^{n_2} b(l_2^k) \leq 0.5.$$

进一步, 根据式(12)中的可能度公式定义, 推导可得

$$0 \leq P(L_1 \geq L_2) \leq 1.$$

因此, 由式(12)定义的可能度公式具有性质1).

2) 互补性证明. 根据式(12)中的可能度公式定义, 推导可得

$$P(L_1 \geq L_2) + P(L_2 \geq L_1) = 1.$$

所以, 由式(12)定义的可能度公式具有性质2).

3) 自反性证明. 当两个概率预言术语集相同时, 根据式(12)推导可得

$$P(L_1 \geq L_1) = 0.5 + \sum_{k=1}^{n_1} b(l_1^k) - \sum_{k=1}^{n_1} b(l_1^k) = 0.5.$$

所以, 由式(12)定义的可能度公式具有性质3).

4) 传递性证明. 当不等式 $P(L_1 \geq L_2) \geq 0.5$ 和 $P(L_2 \geq L_3) \geq 0.5$ 成立时, 根据式(12)可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_1} b(l_1^k) - \sum_{k=1}^{n_2} b(l_2^k) &\geq 0, \\ \sum_{k=1}^{n_2} b(l_2^k) - \sum_{k=1}^{n_3} b(l_3^k) &\geq 0. \end{aligned}$$

于是, 在上面两个不等式的基础上, 再次根据式(12)推导可得

$$\begin{aligned} P(L_1 \geq L_3) &= 0.5 + \sum_{k=1}^{n_1} b(l_1^k) - \sum_{k=1}^{n_3} b(l_3^k) = \\ &0.5 + \sum_{k=1}^{n_1} b(l_1^k) - \sum_{k=1}^{n_2} b(l_2^k) + \sum_{k=1}^{n_2} b(l_2^k) - \sum_{k=1}^{n_3} b(l_3^k) \geq 0.5. \end{aligned}$$

所以, 由式(12)定义的可能度公式具有性质4).

5) 一致性证明. 直接根据式(12)中的可能度公式定义, 推导可得

$$\begin{aligned} P(L_1 \geq L_3) &= 0.5 + \sum_{k=1}^{n_1} b(l_1^k) - \sum_{k=1}^{n_3} b(l_3^k) = \\ &0.5 + \sum_{k=1}^{n_1} b(l_1^k) - \sum_{k=1}^{n_2} b(l_2^k) + \sum_{k=1}^{n_2} b(l_2^k) - \sum_{k=1}^{n_3} b(l_3^k) = \end{aligned}$$

$$0.5 + P(L_1 \geq L_2) - P(L_3 \geq L_2).$$

所以, 由式(12)定义的可能度公式具有性质5). □

3 基于可能度矩阵的多属性决策方法

在一个典型的多属性群决策问题中, 通常有多个专家受邀对多个备选方案进行评估, 这些备选方案具有多个评价属性. 假设 $S = \{s_i | i = 0, 1, \dots, \ell\}$ 为评价用的参考语言术语集, 每个专家对每个备选方案的每个属性, 都要依据参考语言术语集 S 给出他们的定性评价信息.

假设集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 为备选方案集, 设集合 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 为评价属性集; 假设属性权重向量为 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, 且满足限制条件 $w_j \in [0, 1], j = 1, 2, \dots, n$ 和 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$. 根据定义4 中所述的方法, 所有专家关于任意备选方案的任意评价属性的语言评估信息可以聚合为一个概率语言术语集. 综合所有专家的语言评估信息可以得到如下概率语言决策矩阵:

$$L_{m \times n} = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m1} & L_{m2} & \dots & L_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (15)$$

本文的目标是依据概率语言决策矩阵 $L_{m \times n}$ 对各备选方案进行综合排序.

3.1 构建综合可能度矩阵

根据改进的可能度计算公式, 单个属性 $c_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 视角下的可能度矩阵可以计算为

$$P_j = \begin{bmatrix} P_{11}^j & P_{12}^j & \dots & P_{1m}^j \\ P_{21}^j & P_{22}^j & \dots & P_{2m}^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1}^j & P_{m2}^j & \dots & P_{mm}^j \end{bmatrix} \quad (16)$$

根据可能度公式(12), 矩阵 P_j 中的矩阵元素可以计算为 $P_{ik}^j = P(L_{ij} \geq L_{kj})$. 进一步, 采取加权算术平均的方式, 综合可能度矩阵可以计算为

$$P = \sum_{j=1}^n w_j P_j. \quad (17)$$

由可能度公式(12)的互补性可知, 综合可能度矩阵 P 构成了一个模糊互补偏好关系, 且具有以下性质.

定理2 由综合可能度矩阵 $P = (P_{ik})_{m \times m}$ 所确立的模糊二元关系

$$P_A = \{(a_i, a_k) | P_{ik} \geq 0.5\} \quad (18)$$

为备选方案集 A 上的弱序关系.

证明 1) 自反性证明. 由可能度公式(12)的性质3)可知 $\forall a_i, i = 1, 2, \dots, m$, 都有

$$P_{ii}^j = P(L_{ij} \geq L_{ij}) = 0.5, \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

根据式(17), 进一步推导可得

$$P_{ii} = \sum_{j=1}^n w_j P_{ii}^j = 0.5.$$

因此, 由综合可能度矩阵 \mathbf{P} 所确立的二元关系 P_A 具有自反性.

2) 传递性证明. 由式(12)的性质4)可知, $\forall i, k, l = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, 都有下列关系成立: 若不等式关系 $P_{ik}^j \geq 0.5$ 和 $P_{kl}^j \geq 0.5$ 成立, 则必然有不等式 $P_{il}^j \geq 0.5$ 成立. 进一步, 根据式(17)推导可得, 若不等式关系 $P_{ik} \geq 0.5$ 和 $P_{kl} \geq 0.5$ 成立, 则有不等式 $P_{il} \geq 0.5$ 成立. 因此, 由综合可能度矩阵 \mathbf{P} 所确立的二元关系 P_A 具有传递性.

3) 完备性证明. 由可能度计算公式(12)的性质2)可知, $\forall i, k = 1, 2, \dots, m$, 都有等式 $P_{ik}^j + P_{ki}^j = 1, \forall j = 1, 2, \dots, n$ 成立. 进一步, 根据式(17)推导可得, 等式 $P_{ik} + P_{ki} = 1$ 必然成立. 同时, 由可能度公式(12)的性质1)可知, $\forall i, k = 1, 2, \dots, m$, 不等式 $1 \geq P_{ik}^j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, n$ 必然成立. 进一步, 根据式(17)推导可得, 不等式 $1 \geq P_{ik} \geq 0$ 必然成立. 所以, $\forall i, k = 1, 2, \dots, m$, 不等式关系 $P_{ik} \geq 0.5$ 或 $P_{ki} \geq 0.5$ 必然有一个成立. 因此, 由综合可能度矩阵 \mathbf{P} 所确立的二元关系 P_A 具有完备性.

综上所述, 由综合可能度矩阵 \mathbf{P} 所确立的模糊二元关系 P_A 为弱序关系. \square

3.2 备选方案排序

定理3 由式(17)确定的综合可能度矩阵 $\mathbf{P} = (P_{ik})_{m \times m}$ 是具有加性一致性的模糊互补偏好关系.

证明 根据定理2中的推导可知, $P_{ik} + P_{ki} = 1$. 同时, 由可能度公式(12)的性质5)可知, $\forall i, k, l = 1, 2, \dots, m$, 必然有等式 $P_{ik}^j = P_{il}^j - P_{kl}^j + 0.5, \forall j = 1, 2, \dots, n$ 成立. 进一步, 根据式(17)推导可得

$$P_{ik} = P_{il} - P_{kl} + 0.5. \quad (19)$$

因此, 根据定义6可知, 综合可能度矩阵 \mathbf{P} 是具有加性一致性的模糊互补偏好关系. \square

设向量 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T$ 是矩阵 \mathbf{P} 的排序

向量, 且满足限制条件 $d_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m$ 和 $\sum_{i=1}^m d_i = 1$. 根据引理1可得

$$d_i = \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^m P_{ik} + 1 \right) - 0.5. \quad (20)$$

因此, 可以根据向量 $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)^T$ 的值, 对各备选方案进行优劣排序.

4 案例分析

党的“十九大”召开以来, 以习近平同志为核心的党中央坚持教育优先发展战略, 把加强师资队伍建设和全面提高教育质量摆在了更加突出的位置. 2018年1月, 中共中央、国务院颁布了《关于全面深化新时代教师队伍建设改革的意见》; 2020年10月, 中共中央、国务院印发了《深化新时代教育评价改革总体方案》. 教育教学质量评价是国家教育事业健康发展的指挥棒, 是健全立德树人教育机制的重要内容, 在教育改革创新中具有关键性、前瞻性和引领性地位作用, 事关党的教育事业的发展方向. 探索教育教学质量评估指标体系并构建相应的评价模型, 能够帮助人们厘清教师教育教学的本质内涵, 对于推动建立科学的、符合时代要求的教师评价制度, 形成基于证据的教育教学决策机制, 进而提高教育教学质量, 引导师资队伍发展和促进教育公平具有重要而深远的意义^[18].

军队院校在教育教学质量评价过程中, 需要考虑的因素更多, 如何充分发挥评估专家的集体智慧, 科学评价推荐教育人才, 已成为各级决策者需要面对、亟需解决的现实课题. 军队院校教育教学质量并非只是狭义上的课堂教学质量, 它涉及到教育教学的全过程, 包括教育教学的条件、过程和结果等各个环节, 是教师队伍满足军队教育事业发展需求的程度表征. 军队院校教育教学质量的内涵可表现为宏观层面的师资队伍结构优化、中观层面的教师品质培育和微观层面的教学政治性和道德性实现. 军队院校教育教学质量评估指标体系不仅是教师教育教学质量水平的测试仪, 也是指引教师队伍职业发展的风向标; 它承载了军队系统的特殊教育需求, 是军委办学方针政策和教育理念在军事教育教学过程中的具体体现, 也是军队对教师队伍的合理期待.

表2 军队院校教育教学质量评估指标体系

评估指标	指标含义
军政素质 α_1	具有一定的军事体能和技能, 心理调适能力强, 政治敏感性高, 政策把握准
职业操守 α_2	甘守寂寞, 注重师德师风建设, 对院校教育有强烈的职业认同, 对学员充满仁爱之心
职业素养 α_3	具有一定的专业知识和专业技能, 能够针对教学要求搞好教学设计、教案编写和备课试教
职业能力 α_4	具有融洽的师生关系, 能够逐步提高课堂教学能力和管理水平, 能够根据职业要求进行研究创新

本文以打赢未来体系化战争为引领,根据军事转型的现实需求和教师队伍建设现状,构建出如表2所示的教育教学质量评估指标体系.

4.1 排序步骤

为从4个候选个体中评选出最优秀的教育人才,某军事学院教育教学评价委员会通过问卷调

查、逐个访谈、业绩查询、综合考试等形式对4个候选个体进行详细了解,并提供了如表3所示的标准化概率语言决策矩阵A.在决策矩阵A中,每个概率语言术语集形式的评估信息都是某个分项的综合评价结果.

表3 标准化的概率语言决策矩阵A

方案	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	$\{s_6(1)\}$	$\{s_5(0.75), s_6(0.25)\}$	$\{s_3(0.25), s_4(0.5), s_5(0.25)\}$	$\{s_4(0.75), s_5(0.25)\}$
a_2	$\{s_4(0.25), s_5(0.75)\}$	$\{s_4(0.5), s_5(0.5)\}$	$\{s_5(0.67), s_6(0.33)\}$	$\{s_5(0.25), s_6(0.75)\}$
a_3	$\{s_4(0.5), s_5(0.5)\}$	$\{s_3(0.33), s_4(0.67)\}$	$\{s_4(0.25), s_5(0.5), s_6(0.25)\}$	$\{s_5(0.33), s_6(0.67)\}$
a_4	$\{s_5(0.75), s_6(0.25)\}$	$\{s_4(0.5), s_5(0.5)\}$	$\{s_5(1)\}$	$\{s_4(0.25), s_5(0.5), s_6(0.25)\}$

评估指标 $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ 的权重向量设置为 $w = (0.3, 0.3, 0.2, 0.2)$. 本文目标是根据矩阵A确定候选个体 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 的综合排序,其具体步骤如下.

step 1: 计算单个指标视角下的可能度矩阵. 根据可能度公式(12),对候选个体的概率语言评价信息进行两两比较,计算结果为

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5243 & 0.5347 & 0.5104 \\ 0.4757 & 0.5 & 0.5104 & 0.4861 \\ 0.4653 & 0.4896 & 0.5 & 0.4757 \\ 0.4896 & 0.5139 & 0.5243 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5243 & 0.5681 & 0.5243 \\ 0.4757 & 0.5 & 0.5437 & 0.5 \\ 0.4319 & 0.4563 & 0.5 & 0.4563 \\ 0.4757 & 0.5 & 0.5437 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4468 & 0.4583 & 0.4514 \\ 0.5532 & 0.5 & 0.5115 & 0.5046 \\ 0.5417 & 0.4885 & 0.5 & 0.4931 \\ 0.5486 & 0.4954 & 0.5069 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4583 & 0.4594 & 0.4757 \\ 0.5417 & 0.5 & 0.5011 & 0.5174 \\ 0.5406 & 0.4989 & 0.5 & 0.5163 \\ 0.5243 & 0.4826 & 0.4838 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

step 2: 计算综合可能度矩阵. 根据式(17),采用加权平均的方式,得到综合可能度矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4956 & 0.5144 & 0.4958 \\ 0.5044 & 0.5 & 0.5188 & 0.5002 \\ 0.4856 & 0.4812 & 0.5 & 0.4814 \\ 0.5042 & 0.4998 & 0.5186 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

step 3: 计算各候选个体的排序值. 根据式(20),可得各候选个体的排序值为

$$d_1 = 0.2515, d_2 = 0.2558,$$

$$d_3 = 0.2371, d_4 = 0.2556.$$

排序值越高,候选个体越优秀.

step 4: 对各候选个体进行排序. 根据step 3的计算结果,将4个候选个体综合排序为

$$a_2 \succ a_4 \succ a_1 \succ a_3.$$

根据这个排序结果可知:候选个体 a_2 最优,候选个体 a_3 最劣.

4.2 对比分析

上述概率语言多属性决策问题也可采用信息集成的方式进行处理. 基于文献[19]中的运算规则,基数为 q 的概率语言术语集 $L = \{l^k(p^k) | k = 1, 2, \dots, q\}$ 的得分函数可定义为

$$E(L) = \sum_{k=1}^q \frac{l^k}{\ell} p^k. \tag{21}$$

进一步, n 个概率语言术语集 $L_j = \{l_j(p_j)\} (j = 1, 2, \dots, n)$ 的加权几何平均 (probabilistic linguistic weighted geometric, PLWG) 算子可定义为

$$\bigotimes_{j=1}^n L_j^{w_j} = \bigcup_{l_j(p_j) \in L_j, j=1, \dots, n} \left\{ \prod_{j=1}^n l_j^{w_j} \left(\prod_{j=1}^n p_j \right) \right\}. \tag{22}$$

其中: $l_j(p_j) (j = 1, 2, \dots, n)$ 是 L_j 中概率语言元素的通项表达式; $w_j \in [0, 1] (j = 1, 2, \dots, n)$ 是 L_j 的权重信息,且满足归一化条件 $\sum_{j=1}^n w_j = 1$.

将式(22)应用于表3所示的决策矩阵,可以得到各候选个体的综合评估值;然后根据式(21),得到各候选个体的综合得分为

$$E(a_1) = 0.8235, E(a_2) = 0.8254,$$

$$E(a_3) = 0.7506, E(a_4) = 0.8164.$$

得分值越高,候选个体越优秀. 采用 PLWG 算子得到的排序结果为

$$a_2 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_3.$$

根据这个排序结果可知: 候选个体 a_2 最优, 候选个体 a_3 最劣. 从最终结果上来看, PLWG 集成算子和基于可能度矩阵的决策方法是一致的.

从计算过程看, 4.1 节中的过程矩阵 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 和 P 均满足矩阵关系式 $A + A^T = I$. 因此, 基于可能度矩阵的决策方法在计算过程中随时可以进行自检, 能够通过确保计算过程的正确性来保证计算结果的有效性.

5 结论

本文在已有可能度计算方法的基础上, 提出了一个改进的概率语言可能度公式, 该公式操作简单、区分能力强、能够有效实现两个概率语言术语集之间的优劣比较, 且易于拓展应用. 在新可能度公式基础上, 本文构建了一种基于可能度矩阵的概率语言多属性决策方法, 并将其成功地应用于军队院校教育教学质量评价. 数值实验表明: 基于可能度矩阵的概率语言多属性决策方法结构简单、易于理解、计算过程具有很强的自检性, 能够通过确保计算过程正确性来保证计算结果的有效性, 且无需对较短概率语言术语集进行补齐等规范化操作.

参考文献(References)

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. *Information and Control*, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, 20(1): 87-96.
- [3] Torra V. Hesitant fuzzy sets[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2010, 25(6): 529-539.
- [4] Lin M W, Huang C, Xu Z S, et al. Evaluating IoT platforms using integrated probabilistic linguistic MCDM method[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2020, 7(11): 11195-11208.
- [5] Xu Z S, Wang H. On the syntax and semantics of virtual linguistic terms for information fusion in decision making[J]. *Information Fusion*, 2017, 34: 43-48.
- [6] Herrera F, Martinez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(6): 746-752.
- [7] Liao H C, Xu Z S, Herrera-Viedma E, et al. Hesitant fuzzy linguistic term set and its application in decision making: A state-of-the-art survey[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2018, 20(7): 2084-2110.
- [8] Wang H, Xu Z S, Zeng X J. Hesitant fuzzy linguistic term sets for linguistic decision making: Current developments, issues and challenges[J]. *Information Fusion*, 2018, 43: 1-12.
- [9] Pang Q, Wang H, Xu Z S. Probabilistic linguistic term sets in multi-attribute group decision making[J]. *Information Sciences*, 2016, 369: 128-143.
- [10] Liao H C, Mi X M, Xu Z S. A survey of decision-making methods with probabilistic linguistic information: Bibliometrics, preliminaries, methodologies, applications and future directions[J]. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2020, 19(1): 81-134.
- [11] Wu X L, Liao H C. An approach to quality function deployment based on probabilistic linguistic term sets and ORESTE method for multi-expert multi-criteria decision making[J]. *Information Fusion*, 2018, 43: 13-26.
- [12] Bai C Z, Zhang R, Qian L X, et al. Comparisons of probabilistic linguistic term sets for multi-criteria decision making[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2017, 119: 284-291.
- [13] Mao X B, Wu M, Dong J Y, et al. A new method for probabilistic linguistic multi-attribute group decision making: Application to the selection of financial technologies[J]. *Applied Soft Computing*, 2019, 77: 155-175.
- [14] Liu P D, Teng F. Probabilistic linguistic TODIM method for selecting products through online product reviews[J]. *Information Sciences*, 2019, 485: 441-455.
- [15] Ju P H, Chen Z, Ran Y, et al. A novel QFD method considering expert's psychological behavior character under probabilistic linguistic environment[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2020, 52(7): 193-200.
- [16] Wang B L, Liang J Y, Hu Y H. Granular computing based hesitant fuzzy multi-criteria decision making[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2016, 29(3): 252-262.
- [17] Xu Z S. Generalized fuzzy consistent matrix and its priority method[J]. *Journal of PLA University of Science and Technology: Natural Science*, 2000, 1(6): 97-99.
- [18] Li S, Zheng L, Zhang S, et al. Teacher education and teaching evaluation system and model construction[J]. *Journal of Southwest University: Social Science Edition*, 2020, 46(6): 82-90.
- [19] Gou X J, Xu Z S. Novel basic operational laws for linguistic terms, hesitant fuzzy linguistic term sets and probabilistic linguistic term sets[J]. *Information Sciences*, 2016, 372: 407-427.

作者简介

方冰(1980—), 男, 讲师, 博士, 从事信息融合、军事运筹、决策分析、数学优化等研究, E-mail: bingfang_ch@163.com;

韩冰(1976—), 男, 副教授, 博士, 从事军事运筹、建模与仿真、决策分析等研究, E-mail: hbgfy126.com;

谢德于(1979—), 男, 讲师, 硕士, 从事军事运筹、建模与仿真、态势融合等研究, E-mail: 33181968@qq.com.

(责任编辑: 李君玲)